J.-CH. DUPAIN

Solution de la question 192

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 57-63

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__57_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 192

(voir t. VII, p. 368);

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur agregé, ancien elève de l'Ecole Normale.

Lieu des points tels, que la somme de leurs distances aux deux côtés d'un angle droit xOy soit égale à une quantité donnée c.

I.

Je supposerai, pour abréger le langage, que le plan xOy soit horizontal. Soient M un point de l'espace (x, y, z) du lieu; MA, MB les distances aux côtés de l'angle droit

$$\mathrm{MA} = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \mathrm{MB} = \sqrt{y^2 + z^2};$$

$$(1) \qquad \sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = c.$$

Cette équation, en tenant compte des doubles signes implicitement renfermés dans les radicaux, et en remarquant que c est toujours positif, représente trois équations :

$$(2) \qquad \mathrm{MA} + \mathrm{MB} = c,$$

$$(3) \qquad \mathrm{MA} - \mathrm{MB} = c,$$

$$(4) \qquad \mathrm{MB} - \mathrm{MA} = c.$$

La première seule répond à l'énoncé; tous les points qui satisfont à l'équation (2) ne sont pas extérieurs à deux cylindres de section droite circulaire, ayant leurs rayons égaux à c, et dont les axes respectifs sont Ox, Oy. En effet, pour tous ces points il faut que $\mathrm{MA} < c$, $\mathrm{MB} < c$.

Les points qui satisfont aux équations (3) et (4) sont tels, que la *différence* de leurs distances aux axes Ox, Oy est égale à c; ils peuvent être situés à des distances des axes indéfiniment croissantes.

Ceux qui satisfont en particulier à l'équation (3) ne sont pas intérieurs à un cylindre ayant pour axe Ox et pour rayon c, parce que $MA > c$.

Ceux enfin qui satisfont à l'équation (4) ne sont pas intérieurs à un cylindre ayant pour axe Oy et pour rayon c, parce que $MB > c$.

Le lieu donné par l'équation (1) comprendra donc une partie fermée et des nappes infinies.

Nous excluons le cas où c serait nul; l'équation (1) se réduit à

$$y = \pm x,$$

qui représente les plans bissecteurs des dièdres qui ont Oz pour arête.

L'équation (1), débarrassée de ses radicaux, devient

$$(5)\qquad y^4 - 2x^2y^2 + x^4 - 2c^2y^2 - 2c^2x^2 + c^4 = 4c^2z^2.$$

A la première vue on aperçoit que les plans coordonnés sont des plans principaux, que les axes coordonnés sont des axes de surface, que l'origine est un centre, et qu'enfin la surface est symétrique par rapport aux plans bissecteurs des plans coordonnés verticaux.

L'équation de la surface rapportée à ces plans bissecteurs est

$$(6)\qquad 4x'^2y'^2 - 2c^2x'^2 - 2c^2y'^2 + c^4 = 4c^2z^2.$$

II.

Sections de la surface par des plans horizontaux.

Je suppose d'abord $z = 0$, ce qui donne

$$4x'^2y'^2 - 2c^2x'^2 - 2c^2y'^2 + c^4 = 0,$$

ou par la décomposition en facteurs

$$\left(y' - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)\left(y' + \frac{c}{\sqrt{2}}\right)\left(x' - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)\left(x' + \frac{c}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Le lieu se compose de quatre parallèles aux axes Ox', Oy', formant un carré ABCD.

Les côtés du carré répondent à l'équation (2) et leurs prolongements à l'équation (3) et à l'équation (4).

Je suppose maintenant $z = a$ et $a < \frac{c}{2}$, la valeur de y'^2 peut s'écrire :

$$y'^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{2a^2c^2}{2x'^2 - c^2}.$$

Lorsque $2x'^2 \geqq c^2$, y' a toujours deux valeurs réelles égales sauf le signe ; d'ailleurs y' est nul pour $x' = \infty$ et infini pour $x' = \pm \frac{c}{\sqrt{2}}$. J'obtiens ainsi quatre branches hyperboliques, les côtés étant prolongés : deux, situées dans les angles A et D du carré, conviennent à l'équation (3) ; les deux autres, dans les angles B et C, à l'équation (4).

Enfin, dans l'intérieur du carré ABCD, se trouve une courbe fermée ayant deux axes dirigés suivant Ox', Oy'. Les quatre demi-axes ont la même valeur

$$\sqrt{\frac{c^2 - 4a^2}{2}}.$$

En considérant l'équation (5) où l'on remplace z par a, il est facile de reconnaître que Ox et Oy sont des directions d'axes pour la courbe fermée. Les quatre nouveaux demi-axes de la courbe fermée ont pour longueur $\sqrt{c^2 - 2ac}$ et ceux des quatre branches hyperboliques $\sqrt{c^2 + ac}$.

Nous avons ainsi une idée assez nette de la section horizontale. Lorsque z augmente, la courbe fermée se resserre et les branches hyperboliques s'écartent des asymptotes.

Quand $z = \frac{c}{2}$, la courbe fermée se réduit à un point, et elle disparaît quand z surpasse $\frac{c}{2}$.

La surface se présente donc à nous comme une voûte surbaissée, reposant sur un carré et flanquée de quatre nappes infinies qui n'ont chacune qu'un point de commun avec elle.

III.

Sections verticales perpendiculaires à Oy'.

Je remplace dans l'équation (6) y' par a, ce qui donne

$$4c^2 z^2 + 2y'^2 (c^2 - 2a^2) = c^2 (c^2 - 2a^2).$$

Lorsque $c^2 > 2a^2$, le plan vertical perpendiculaire rencontre la surface fermée, les sections sont des ellipses, l'un des axes est horizontal et de longueur constante $\frac{c}{\sqrt{2}}$, l'autre diminue de $\frac{c}{2}$ à o. Quand a^2 a dépassé $\frac{c^2}{2}$, le plan rencontre deux nappes infinies, et les sections sont des hyperboles ayant l'axe transverse horizontal et s'ouvrant de plus en plus.

On peut répéter identiquement la même chose sur les sections verticales perpendiculaires à Ox'.

IV.

Sections verticales par les plans zOx et zOy.

Je fais d'abord $y = 0$ dans l'équation (5), et j'obtiens

$$x^2 - c^2 = \pm 2cz,$$

qui représente deux paraboles tournées en sens contraire. On peut remarquer que $OH = \frac{c}{2}$, $OA = c$; les foyers sont à l'origine.

En posant $x = 0$ dans l'équation (5), on trouverait deux autres paraboles identiques aux précédentes, mais situées dans le plan zOy.

On reconnaît aisément que ces quatre paraboles sont des *lignes de pente*, parce que leurs plans contiennent les axes des sections horizontales.

V.

Sections verticales passant par l'axe Oz.

Je prends de nouveaux axes horizontaux OX, OY; si je pose $XOx = \alpha$,

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

l'équation (5) devient

$$(X^2\cos 2\alpha - 2XY\sin 2\alpha - Y^2\cos 2\alpha)^2$$
$$- 2c^2(X^2 + Y^2) + c^4 = 4c^2z^2.$$

La section de la surface par le plan zOX aura pour équation

$$(7) \qquad X^4\cos^2 2\alpha - 2c^2X^2 + c^4 = 4c^2z^2;$$

il nous suffira de faire varier α entre $0°$ et $45°$ exclusivement. Nous trouverons commode de décomposer en facteurs le premier membre de l'équation (7) :

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\cos^2 2\alpha\left(X^2 - \frac{c^2}{\cos^2 2\alpha} - \frac{c^2\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right) \\ &\qquad \times\left(X^2 - \frac{c^2}{\cos^2 2\alpha} + \frac{c^2\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right) = 4c^2z^2. \end{aligned}$$

Nous aurons également besoin de différentier l'équation (7) :

$$(9)\qquad \frac{dz}{dX}=\frac{X(X^2\cos^2 2\alpha - c^2)}{2c^2z}.$$

Étudions seulement les valeurs positives de z et de X. Pour

$$X=0$$

z a une valeur maximum $\frac{c}{2}$; puis z diminue, il devient nul pour

$$X^2=\frac{c^2}{\cos^2 2\alpha}-\frac{c^2\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha},$$

la tangente est alors verticale; à partir de ce moment z devient imaginaire; il est de nouveau nul quand

$$X^2=\frac{c^2}{\cos^2 2\alpha}+\frac{c^2\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha},$$

et la tangente est de nouveau verticale; z augmente ensuite indéfiniment; on ne voit pas immédiatement les variations de la tangente, mais pour

$$z=\infty$$

elle devient verticale, ce qui suppose une inflexion. Nous pouvons déjà attribuer à la courbe une forme analogue à une lemniscate, savoir une branche fermée et deux branches infinies détachées.

Pour déterminer avec précision l'inflexion, il faudrait différentier deux fois l'équation (7), ce qui donne

$$3X^2\cos^2 2\alpha - c^2 = 2c^2z\frac{d^2z}{dX^2}+2c^2\left(\frac{dz}{dX}\right)^2,$$

puis supposer $\frac{d^2z}{dX^2}=0$. On trouve ainsi une équation en X du sixième degré, qui s'abaisse au troisième, et qu'il serait trop long de discuter.

Le rayon de courbure au sommet H a pour expression $\dfrac{1}{\left(\dfrac{d^2z}{dX^2}\right)}$ ou, substitutions faites, $2c$; il est donc indépendant de α, et par suite le point H est un ombilic de la surface.

VI.

Plan tangent.

L'équation du plan tangent en un point ayant pour coordonnées ξ, η, ζ, est

$$(x' - \xi)\xi(2\eta^2 - c^2) + (y' - \eta)\eta(2\xi^2 - c^2) = 2c^2\zeta(z' - \zeta);$$

il est parallèle à zOx' le long des droites indéfinies AD, BC, et parallèle à zOy' le long des droites AB, CD; il est indéterminé aux quatre points A, B, C, D. C'est donc par des *pointes* que les quatre nappes infinies touchent la surface fermée.