Géométrie élémentaire. Problème d'optique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 44-46

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__44_0>

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. — PROBLÈME D'OPTIQUE.

1. Problème. *Étant donné un quadrilatère plan, trouver le lieu du point dans son plan, d'où deux des côtés opposés du quadrilatère sont vus sous le même angle.*

Solution. ABCD est le quadrilatère donné; AB et CD les côtés opposés. Si sur AB et CD on construit deux segments de cercles capables de l'angle donné, les points d'intersection des arcs appartiennent au lieu cherché. Soit O l'intersection de AB et CD; prenons OAB pour axe des x et OCD pour axe des y, et soit ν l'angle des axes.

L'équation du cercle dont AB est une corde est

$$(1) \qquad P + Dy + Ex + F = 0.$$

L'équation du cercle dont CD est une corde est

$$(1) \qquad P + D'y + E'x + F' = 0;$$

$P = y^2 + 2xy\cos\nu + x^2$; E, F, D', F' sont des quantités connues; D et E' des quantités variables. On a

$$4\overline{AB}^2 = E^2 - 4F, \quad 4\overline{CD}^2 = D'^2 - 4F'.$$

R et R' étant les rayons des cercles AB, CD, on a

$$4\sin^2\nu . R^2 = E^2 - 2DE \cos\nu + D^2 - 4F\sin^2\nu,$$
$$4\sin^2\nu . R'^2 = E'^2 - 2D'E'\cos\nu + D'^2 - 4F'\sin^2\nu.$$

Pour que les segments soient semblables, on doit avoir

$$\frac{AB}{R} = \frac{CD}{R'};$$

donc

$$(E^2 - 4F)(E'^2 - 2D'E'\cos\nu + D'^2 - 4F'\sin^2\nu)$$
$$= (D'^2 - 4F')(E^2 - 2DE\cos\nu + D^2 - 4F\sin^2\nu).$$

Substituant dans cette équation les valeurs de D et E', tirées des équations (1), on obtient

$$\begin{aligned}(E^2 - 4F)[(P + D'y + F')^2 + 2D'x\cos\nu(P + D'y + F')\\ + x^2(D'^2 - 4F'\sin^2\nu)]\\ = (D'^2 - 4F')[(P + Ex + F)^2 + 2Ey\cos\nu(P + Ex + F)\\ + y^2(E^2 - 4F\sin^2\nu)],\end{aligned}$$

équation du quatrième degré, ligne du genre parabolique.

2. Les distances des centres des cercles aux cordes respectives sont proportionnelles à ces cordes; donc la droite des centres a pour enveloppe une parabole, et le milieu de la distance des centres décrit une droite (t. VI, p. 403).

3. Il est évident que la courbe passe par les points d'intersection des côtés AB, CD; AC, BD; AD, BC. Les points de la courbe sont ceux où les côtés AB, CD sont vus sous des angles dont les sinus sont égaux.

4. Lorsque les côtés AB, CD sont égaux, on a

$$E^2 - 4F = D'^2 - 4F',$$

et l'équation se réduit au troisième degré.

5. Si les côtés AB, CD sont parallèles, on est amené encore à une équation du quatrième degré.

6. Problème. Même énoncé. *Les segments* AB, CD *sont sur la même droite.*

Solution. Prenant des axes rectangulaires, on a pour l'équation du lieu

$$(E^2 - 4F)[(P + E'x + E')^2 + x^2(D'^2 - 4F')]$$
$$= (D'^2 - 4F')[(P + Ex + F)^2 + x^2(E^2 - 4F)],$$

où

$$P = y^2 + x^2;$$

d'où l'on tire

$$(E^2 - 4F)^{\frac{1}{2}}(P + E'x + F') \pm (D'^2 - 4F')^{\frac{1}{2}}(P + Ex + F) = 0.$$

C'est le système de deux cercles faciles à construire.

Corollaire. Il existe donc huit points dont on peut voir trois segments d'une droite, sous des angles dont les sinus sont égaux.