Intérêt simple et intérêt composé ; d'après M. Oettinger

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 441-447
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__441_0>

INTÉRÊT SIMPLE ET INTÉRÊT COMPOSÉ;

D'APRÈS M. OETTINGER,
Professeur à l'Université de Fribourg (Brisgau).

GRUNERT, *Archiv. der Math. und Physik*, t. XXXVI, 2e cahier p. 189; 1861.

On doit une somme C payable en n années, savoir chaque année la même somme $\frac{C}{n}$; l'intérêt annuel est de r pour 1; le débiteur veut se libérer en une fois, combien doit-il donner à son créancier?

Il y a deux modes de libération :

1° *Par intérêt simple.* Le premier payement vaut actuellement $\frac{C}{n(1+r)}$, le deuxième payement vaut actuellement $\frac{C}{n(1+2r)}$, etc.; désignant par x la somme totale à payer actuellement, on a

$$x = \frac{C}{n}\left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+2r} + \frac{1}{1+3r} + \ldots + \frac{1}{1+nr}\right).$$

On ne peut pas trouver le terme général de la somme de cette série.

Soient

$$C = 20000, \quad n = 20, \quad r = 0{,}05,$$

on trouve

$$x = 13616{,}067635\ldots.$$

2° *Par intérêt composé.* On a

$$x = \frac{C}{r(1+r)^n};$$

conservant les mêmes nombres, on a

$$x = 12462,210343\ldots$$

Ainsi d'après le second mode le créancier reçoit moins que d'après le premier, et l'on peut démontrer qu'il en est toujours ainsi. Lequel de ces deux modes est le plus équitable? Parmi les jurisconsultes, chacun de ces modes a des partisans; d'autres restent neutres et déclarent que c'est au créancier et au débiteur à faire telle convention qu'ils jugent convenable.

En 1683, Leibniz publia dans les *Acta Eruditorum*, p. 425, ce Mémoire : *Meditatio juridico-mathematica de interusurio simplice*, et s'exprime ainsi :

Interusurium sive resegmentum anticipationis, vulgo rabat, *est differentia inter pecuniam in diem certum debitam et præsentum ejus valorem, seu quanto plus temporis petit, vel quanto minus solvere æquum sit, qui post aliquot annos demum debiturus, nunc solvit. Hujus quantitas, quæ apud jurisconsultos passim non satis, et apud aliquos non satis recte explicatur, occurato calculo* definiri potest, *duabus suppositionibus ex jure assumtis.*

Et il se prononce pour l'*intérêt composé*, mais sans en dire la raison. Il parvient à la même formule que dessus, mais par une voie différente de celle d'aujourd'hui; il somme la série infinie

$$1 - nr + \frac{n.n+1}{1.2} r^2 - \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3} r^3 + \ldots$$

et ne traite même que les cinq cas particuliers où n a une de ces valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et $r = 0{,}05$. Le Mémoire est terminé par une Table correspondant aux quarante valeurs de n, 1, 2, 3,..., 40, et pour $r = 0{,}05$.

On a cru longtemps que Leibniz était l'inventeur de l'intérêt composé. Mais Kastner a montré (*Fortsetzung der Rechenkunst*, 2ᵉ édit., p. 270) que Stevin, dans sa *Practique de l'arithmétique*, p. 185, a déjà donné des Tables pour calculer la valeur actuelle d'un capital par intérêt simple et intérêt composé (*Œuvres mathématiques* de Simon Stevin, revues et augmentées par Alb. Girard. Fol. Leyde, 1634). Le Mémoire de Leibniz est de 1683. On ne connaît pas d'auteur du second mode, antérieur à Stevin.

On a fait contre le premier mode une objection irréfutable. D'après ce mode, la valeur actuelle d'un capital à payer au bout de n années serait $\frac{C}{n}(1 - nr)$, et si $nr = 1$; la valeur actuelle serait nulle, et si $nr > 1$, le créancier deviendrait débiteur, résultats absurdes.

M. Œttinger cherche à prouver mathématiquement, par des arguments fondés sur la nature de la dette, que le second mode est le plus équitable.

Le créancier et le débiteur contractent entre eux une convention; le premier, à un instant donné, confie au second une certaine somme comptant, le second s'oblige, non-seulement de rendre l'argent à la fois ou successivement, mais de faire valoir l'argent qui reste entre ses mains. Lorsque le débiteur a rempli les conditions sur le payement des annuités et des intérêts, la dette est éteinte; le créancier n'agit qu'une seule fois au premier instant en donnant la somme, tandis que le débiteur doit agir continuellement; c'est pour cela qu'on ne compare pas des sommes à payer simultanément, mais successivement et dont la valeur doit être ramenée à une époque fixée.

La somme de ces valeurs réduites doit être égale au capital prêté; car si le débiteur voulait se libérer tout de suite, il devrait immédiatement rendre toutes les annuités; c'est donc là le vrai critérium...

Soit un capital C payable en n annuités plus les intérêts du capital restant. Soient A_p une de ces annuités, L_p le $n^{ième}$ payement; on aura

$$L_p = A_p + (A_p + A_{p+1} + \ldots + A_n)r.$$

On donne à p successivement toutes les valeurs 1, 2, 3,..., n.

Ramenant L_p au temps initial *par intérêt composé* et faisant la somme de toutes les réductions, on aura

$$\sum_1^n \frac{L_p}{(1+r)^p} = \sum_1^n \frac{A_p}{(1+r)^p} + \frac{rA_p}{\sum_1^p (1+r)^p} = R;$$

or

$$\frac{rA_p'}{\sum (1+r)^p} = rA_p \frac{1-(1+r)^{-p}}{n} = A_p - \frac{A^p}{(1+r)^p},$$

donc

$$\sum_1^n \frac{A_p}{(1+r)^p} = \sum_1^n A_p = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Ainsi l'intérêt composé satisfait au critérium indiqué cidessus.

Appliquons maintenant l'*intérêt simple.*

On a l'inégalité

$$\frac{1}{1+mr} > \frac{1}{(1+r)^n} \quad \text{pour} \quad m > 1:$$

donc

$$\sum_1^n \frac{L_p}{1+pr} > \sum \frac{L_p}{(1+r)^p}$$

ou

$$\sum_1^n \frac{L_p}{1+pr} > A_1 + A_2 + \ldots + A_n;$$

par conséquent le critérium n'a plus lieu, le rabat est trop grand.

Si les intérêts se payent par *semestre* et les annuités par années, il faut poser

$$r = 2r',$$

où l'on trouve, employant l'intérêt composé,

$$\frac{L_1}{(1+r_1)} = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{1+r_1},$$

$$\frac{L_2}{(1+r_1)^2} = \frac{A_1}{(1+r')^2} + \frac{A_1 + \ldots + A_n}{(1+r^2)},$$

$$\frac{L_3}{(1+r_1)^3} = \frac{A_2 + \ldots + A_n}{(1+r)},$$

et ainsi de suite.

Faisant la somme, on trouve comme ci-dessus

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

pour cette somme, ce qui n'a plus lieu pour l'intérêt simple.

L'auteur donne encore une seconde démonstration relative à l'emploi exclusif de l'intérêt composé.

Exemple numérique. Les neuf sommes décroissant par 50 francs : 1500, 1450, 1400, 1350, 1300, 1250, 1200, 1150, 1100, 1050 sont à rembourser année par année en 10 années, savoir 1500 à la fin de la première année et 1050 à la fin de la dixième année.

Appliquant l'intérêt composé et $r = 0{,}05$, la valeur actuelle est 9999,999999.

Cette question revient à celle-ci :

Un capital de 10000 francs doit être remboursable en 10 années par annuités de 1000 francs en tenant compte des intérêts à 5 pour 100. On a donc

$$C = 10000, \quad A_1 = A_2 = \ldots = A_9 = 1000;$$

alors

$$L_1 = 1500, \quad L_2 = 1450, \ldots, \quad L_3 = 1050,$$

et réduisant, on trouve

$$R = 10000 \text{ à très-peu près.}$$

Appliquant l'intérêt simple, on obtient

$$R = 10259,46731644,$$

réduction trop grande.

M. OErsted discute encore d'autres cas.

En tête du Mémoire, l'auteur a mis avec une érudition germanique une bibliographie complète, livres, dissertations, journaux, de la polémique relative aux deux intérêts, depuis Leibniz (1684) jusqu'à nos jours (1854).

La Synagogue proscrit toute espèce d'intérêt entre israélites et prend des précautions minutieuses pour qu'on ne puisse éluder la défense. Ainsi le créancier ne peut accepter aucun présent, aucun cadeau de son débiteur, ni accepter de lui une vente, un loyer inférieurs au prix vénal, au prix de location, et cela pendant un espace de temps assez long. Mais Moïse permet l'intérêt envers l'étranger venant commercer en Palestine, car la défense aurait rendu tout commerce avec le dehors impossible. L'Eglise a imité la Synagogue, mais les casuistes ont trouvé moyen de tranquilliser la conscience des capitalistes. On sait qu'un procès de banqueroute perdu par les Jésuites à Marseille a beaucoup contribué à l'abolition de leur ordre en 1773.

Il paraît que l'érudit géomètre d'outre-Rhin n'a pas eu connaissance de l'ouvrage suivant, assez rare :

Tableau comparatif de la nouvelle et de l'ancienne *méthode de calculer les intérêts composés à cinq pour cent*, par Jean-Baptiste de Mangold, chevalier de Saint-Louis, chef de bataillon en retraite. In-8 de 171 pages.

Ce Mémoire, adressé à Louis XVIII, fut renvoyé au Ministre de l'Intérieur, qui conseilla de le soumettre à l'Académie des Sciences qui, d'après un Rapport très-favorable de M. Cauchy (24 mars 1817), donna une complète approbation. Dès lors le Ministre de l'Intérieur déclara qu'il fallait une disposition législative. A cet effet l'auteur adressa une pétition à la Chambre des Députés, et, à la suite d'un Rapport très-élogieux de M. de Coupigny, député du Pas-de-Calais (*Moniteur* du 19 février 1822), le Mémoire de M. de Mangold fut renvoyé au bureau des renseignements et au Ministre de l'Intérieur, et l'affaire, selon l'ordinaire, en est restée là.

Le Rapport de Cauchy n'est pas inséré dans les Mémoires de l'Académie. Il se trouve sans doute aux Archives et j'essayerai d'en avoir communication.

M. de Mangold a vécu retiré à Vieux-Brissac (Haut-Rhin). On n'en parle dans aucun dictionnaire biographique.