Collat

Solution de la question 579

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 430-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__430_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 579

(voir page 138);

PAR M. COLLAT,

Professeur au collége de Montignac-sur-Vezère (Dordogne) (*).

Étant donnée une courbe quelconque sur la sphère, d'un point fixe C sur la sphère menons à la courbe le rayon vecteur sphérique CO; prenons sur ce rayon un point O tel, qu'on ait

$$\frac{\sin\frac{CO'}{2}}{\sin\frac{CO}{2}}=\alpha,$$

quantité constante. Le lieu des points O′ forme une seconde courbe telle, qu'on aura : aire de la courbe CO′ est à l'aire de la courbe CO comme α^2 est à 1.

(*) Collége dirigé par M. Baillement, chef de bataillon du génie en non-activité pour infirmité temporaire.

Lemme. L'élément de la surface sphérique compris entre deux rayons vecteurs sphériques infiniment voisins et un arc de la courbe a pour expression

$$dS = 2R^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\, dL,$$

R est le rayon de la sphère, dL l'angle des deux plans qui contiennent les rayons vecteurs et λ la distance angulaire du point O au point C.

Pour le démontrer, du point C comme centre je décris sur la sphère une circonférence passant par le point O et coupant le rayon infiniment voisin au point ω. On peut négliger $O\omega O$, infiniment petit du second ordre. Quant à $CO\omega$, son rapport à la zone qui aurait C comme pôle et CP comme hauteur de la zone est égal à $\frac{dL}{d\pi}$. Cette zone a pour surface

$$2\pi R \times CP = 2\pi R^2 (1 - \cos\lambda) = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2};$$

donc

$$dS = 2R^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\, dL.$$

Théorème. Soient AB et A′ B′ les deux courbes dépendant l'une de l'autre par la relation

$$\frac{\sin \frac{CO'}{2}}{\sin \frac{CO}{2}} = \alpha;$$

$$\text{l'élément } CO\omega = dS = 2R^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\, dL,$$

$$\text{»} \qquad CO'\omega' = dS' = 2R^2 \sin^2 \frac{\lambda'}{2}\, dL;$$

donc

$$\frac{dS'}{dS} = \frac{\sin^2 \frac{\lambda'}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} = \alpha^2;$$

or

$$\text{CAB} = \int dS,$$
$$\text{CA}'\,\text{B}' = \int dS';$$

par conséquent

$$\frac{\int dS'}{\int dS} = \alpha^2,$$

puisque tous les éléments de la surface CA′ B′ sont avec les éléments de la surface CAB dans un rapport constant α^2.