NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PEAUCELLIER

Relation entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa perspective et considérations sur les foyers des lunettes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 427-430

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__427_1>

RELATION

entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa perspective et considérations sur les foyers des lunettes ;

Par M. PEAUCELLIER,
Capitaine du génie, à Nice

Soient a, b, c trois points infiniment voisins d'une courbe et a', b', c' leurs perspectives sur une surface quelconque prise d'un point O. L'angle visuel des éléments ab, $a'b'$ est représenté par l'une ou l'autre des expressions

$$\frac{ab \sin(ab, Oa)}{Oa}, \quad \frac{a'b' \sin(a'b', Oa')}{Oa'};$$

en sorte que

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{Oa'}{Oa} \frac{\sin(ab, Oa)}{\sin(a'b', Oa')} = \frac{R'}{R} \frac{\sin(RT)}{\sin(R'T')},$$

R, R′ étant les rayons de courbure respectifs et T, T′ les tangentes aux points considérés a et a'.

On arriverait à la même expression pour la limite des rapports $\frac{b'c'}{bc}$, $\frac{a'c'}{ac}$; d'où il suit que

$$(1) \qquad \frac{a'b' \times b'c' \times a'c'}{ab \times bc \times ac} = \left(\frac{R'}{R}\right) \frac{\sin^3(RT)}{\sin^3(R'T')}.$$

Si l'on appelle S, S′ les surfaces et P, P′ les plans des triangles abc, $a'b'c'$, on a l'égalité

$$(2) \qquad \frac{S \sin(R, P)}{S' \sin(R', P')} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Enfin l'expression du rayon du cercle circonscrit au triangle abc, c'est-à-dire du rayon de courbure en a, est

$$r = \frac{ab \times bc \times ac}{4S};$$

de même

$$r' = \frac{a'b' \times b'c' \times a'c'}{4S'}.$$

La combinaison de ces égalités avec les relations (1) et (2) donne

$$\frac{r'}{r} = \frac{R'}{R}\left(\frac{\sin R, T}{\sin R', T'}\right)^3 \frac{\sin(P', R')}{\sin(P, R)};$$

c'est la relation qui existe entre les rayons de courbure de deux points correspondants.

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{r'}{r} = \frac{p'}{p}\left(\frac{T'}{T}\right)^3,$$

p, p' représentant les distances du centre perspectif aux plans osculateurs, T, T′ les longueurs des tangentes issues d'un même point et aboutissant aux points considérés a et a'.

Si l'on considère une courbe et une perspective planes, le rapport $\frac{p'}{p}$ est constant, et les rayons de courbure varient proportionnellement aux cubes des tangentes.

Le lieu des points de rencontre des tangentes correspondantes est une droite.

Deux courbes du second ordre situées dans un même plan peuvent être considérées comme perspectives l'une de l'autre. Les centres perpectifs sont les deux points de rencontre des tangentes communes de même espèce.

On en conclut que le lieu des rencontres des tangentes en des points correspondants est une ligne droite telle, que le rapport des rayons de courbure aux points de contact varie proportionnellement aux cubes des tangentes aboutissant à ces points. Il existe quatre droites de cette espèce.

Une courbe du second degré peut être considérée comme la perspective d'une conique égale tracée sur le cône perspectif et placée dans une position symétrique; alors $p = p'$. Si l'on suppose que le centre perspectif se rapproche indéfiniment du plan de la courbe donnée, cette courbe et sa perspective se superposeront. L'égalité

$$\frac{r'}{r} = \frac{p'}{p}\left(\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}\right)^3 = \frac{\mathrm{T}'^3}{\mathrm{T}^3}$$

subsistera, et comme le sommet du cône a été choisi tout à fait arbitrairement, il en résulte ce théorème :

Dans toute section conique les rayons de courbure en deux points sont entre eux comme les cubes des longueurs des tangentes qui aboutissent à ces points.

Énoncés.

I. La formule *rigoureuse* des foyers conjugués d'une lentille revient à l'égalité $ff' = -k^2$ (f et f' représentant les distances de deux foyers conjugués à deux points fixes, lesquels sont eux-mêmes les foyers principaux).

II. Un système de lentilles ayant même axe principal se comporte comme une lentille unique quant aux foyers, et comme une autre lentille unique quant aux images.