NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DEWULF

Note sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 424-427

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__424_1>

NOTE SUR LES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOIDE;

PAR M. DEWULF,
Capitaine du génie, à Bougie.

Les propriétés focales des lignes de courbure de l'ellipsoïde ont été dans ces derniers temps l'objet des études de plusieurs géomètres.

Il ne sera pas sans utilité de rappeler par ordre d'ancienneté les principaux théorèmes qui se rapportent à ces propriétés.

MONGE. — Par chaque ligne de courbure de l'ellipsoïde passent trois cylindres du second ordre dont les axes coïncident avec les trois axes de l'ellipsoïde. Tous les cylindres de même axe passant par les différentes lignes de courbure sont homofocaux.

DUPIN. — Si deux surfaces se coupent orthogonalement, elles se coupent réciproquement suivant leurs lignes de courbure.

PONCELET (*Propriétés projectives*, p. 395). — Les sommets des différents cônes du second ordre qui renferment la courbe d'intersection de deux surfaces quelconques du second ordre, sont tels, que le plan polaire de l'un quelconque d'entre eux passe à la fois par tous les autres.

Le nombre de ces sommets est au plus de quatre, et le tétraèdre qui leur appartient est tel, qu'une arête quelconque a pour polaire réciproque dans l'une et dans l'autre surface l'arête respectivement opposée de ce tétraèdre.

Ce théorème très-général, très-important, est malheureusement peu connu.

JACOBI (*Journal de Liouville*, t. XI, p. 237). — Chaque ligne de courbure de l'ellipsoïde a deux foyers.

CATALAN (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. VI, année 1847). — Si deux surfaces du second ordre ont leurs plans principaux parallèles chacun à chacun, leur intersection est sur une surface de révolution du second ordre (*).

VALSON (1854). — Il existe deux sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde aux points ombilicaux, telles, que la somme ou la différence des tangentes menées d'un point quelconque d'une ligne de courbure ellipsoïdale est constante.

Il existe un plan directeur par rapport à chaque sphère.

HELLERMANN (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1858). — Généralisation des propriétés précédentes. Elles existent pour six sphères placées deux à deux sur les trois axes de la surface du second ordre.

DEL BECCARO (*Annali di Tortolini*, 1859). — Exten-

(*) Il est important de remarquer qu'en 1838 (*Journal de Liouville*, t. III, p. 402) M. Chasles et qu'en 1843 (*Journal de Crelle*) M. Steiner avaient énoncé la propriété de deux cercles doublement tangents à une conique, que la somme ou la différence des tangentes menées d'un point de la conique à ces deux cercles est constante.

sion des propriétés précédentes aux surfaces dénuées de centre et théorème analogue à celui de Joachimsthal pour les surfaces du second ordre dénuées de centre.

L'abbé Aoust (mai 1859, *Comptes rendus*). — Par une même ligne de courbure de l'ellipsoïde passent trois surfaces de révolution du second ordre, dont les axes de révolution coïncident avec les trois axes de l'ellipsoïde.

Toutes les surfaces de révolution qui ont même axe et qui passent par les différentes lignes de courbure d'une même série sont tangentes aux deux sphères focales dont les centres sont situés sur l'axe de révolution.

L'abbé Aoust (novembre 1859, *Comptes rendus*). — Toutes les propriétés d'un certain ordre des lignes de courbure de l'ellipsoïde, et notamment les propriétés focales, se déduisent d'une manière élémentaire du théorème des trois surfaces de révolution passant par une même ligne de courbure.

L'abbé Aoust, 1861. — 1° Si l'on mène deux sphères égales doublement tangentes à un ellipsoïde, telles, que leurs centres soient situés sur l'un des trois axes et que leur rayon soit moyen proportionnel entre les deux rayons principaux de courbure de l'ellipsoïde menés à l'extrémité de cet axe, toutes les surfaces de révolution du second ordre autour du même axe, et tangentes à ces deux sphères, déterminent, par leur intersection avec l'ellipsoïde, les deux systèmes de lignes de courbure de cette surface.

2° Si l'on mène les deux plans perpendiculaires à l'axe, contenant chacun l'une des cordes de contact de l'ellipsoïde avec les deux sphères, les surfaces de révolution dont les contacts avec les deux sphères sont situés entre les deux plans déterminent toutes les lignes de courbure d'un système, et celles dont les contours sont situés hors des deux plans déterminent toutes les lignes de courbure de l'autre système.

Il y a trois manières d'obtenir les lignes de courbure de l'ellipsoïde par son intersection avec des surfaces de révolution du second ordre suivant que l'on prend pour axe de révolution de ces surfaces l'un des trois axes de l'ellipsoïde.

Je ferai voir dans une autre Note comment tous ces théorèmes peuvent se déduire de celui de Poncelet.