

BAEHR

Propriété de coefficients du binôme et théorème Sylvester sur les déterminants

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 417-420

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__417_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**PROPRIÉTÉ DES COEFFICIENTS DU BINÔME
ET THÉORÈME SYLVESTER SUR LES DÉTERMINANTS ;**

PAR M. BAEHR,
Professeur à Groningue.

I. Soit l'identité

$$(1) \quad \sum_{m=0}^{m=p} (-1)^m A_m x^m (1-x)^{p-m} = \sum A'_m x^m, \dots,$$

où les coefficients A au premier membre sont tout à fait arbitraires et indépendants entre eux. Désignant les coefficients du développement de $(a+b)^q$ de la manière suivante

$$1 = \binom{q}{0}, \quad \frac{q}{1} = \binom{q}{1}, \quad \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} = \binom{q}{2}, \dots,$$

$$\frac{q(q-1) \dots (q-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} = \binom{q}{m} = \binom{q}{q-m},$$

on aura

$$(a) \quad A'_{p-m} = (-1)^{p-m} \sum_{\mu} \binom{\mu}{m} A_{p-\mu}, \dots$$

Si dans l'équation (1) on change x en $-\frac{x}{1-x}$, et par conséquent $1-x$ en $\frac{1}{1-x}$, et si l'on multiplie ensuite les deux membres par $(1-x)^p$, elle devient

$$\sum A_m x^m = \sum (-1)^m A'_m x^m (1-x)^{p-m},$$

de sorte que l'on a réciproquement

$$(b) \quad A_{p-m} = (-1)^{p-m} \sum_{\mu} \binom{\mu}{m} A'_{p-\mu} \dots$$

Changeant dans l'équation (1) x en $1-x$, elle devient

$$\sum (-1)^m A_m x^{p-m} (1-x)^n = \sum A'_m (1-x)^m,$$

et, égalisant les coefficients de x^{p-m} dans les deux membres, on obtient encore

$$(c) \quad (-1)^{\mu} \sum_{\mu=0}^{\mu=p-m} \binom{p-\mu}{m} A_{p-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\mu=m'} \binom{p-\mu}{p-m} A'_{p-\mu}.$$

Eliminant A' entre (a) et (b) et ensuite entre (a) et (c), on aura les deux identités

$$A_{p-m} = (-1)^m \sum_n \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \binom{\mu}{m} A_{p-n}$$

et

$$\sum \binom{p-\mu}{m} A_{p-\mu} = \sum_n \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \binom{p-\mu}{p-m} A_{p-n},$$

où l'on peut se passer de marquer les limites des variables n et μ , parce que le symbole $\binom{q}{m}$ est zéro lorsque la valeur de la variable est en dehors de ses limites.

La première de ces deux formules donne

$$\sum_{\mu} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \binom{\mu}{m} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \geq m, \\ (-1)^m, & \text{si } n = m, \end{cases}$$

et la seconde

$$\sum_{\mu} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \binom{p-\mu}{p-m} = \binom{p-n}{m} = \begin{cases} 0, & \text{si } n > p-m, \\ 1, & \text{si } n = p-m. \end{cases}$$

(419)

Ainsi l'on a par exemple, faisant $n = 8$, $m = 4$,
 $p = 14$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \binom{8}{\mu} \binom{\mu}{4} \\ &= 70.1 - 56.5 + 28.15 - 8.35 + 1.70 = 0, \\ & \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \binom{8}{\mu} \binom{14-\mu}{10} \\ &= 1.1001 - 8.286 + 28.66 - 56.11 + 70.1 = 15 \\ &= \binom{6}{4} = \binom{6}{2}, \end{aligned}$$

et faisant $n = 10 = p - m$ et $n = 12 > p - m$,

$$\begin{aligned} & \sum (-1)^{\mu} \binom{10}{\mu} \binom{14-\mu}{10} \\ &= 1.1001 - 10.286 + 45.66 - 120.11 + 210.1 = 1, \\ & \sum (-1)^{\mu} \binom{12}{\mu} \binom{14-\mu}{10} \\ &= 1.1001 - 12.286 + 66.66 - 220.11 + 495.1 = 0. \end{aligned}$$

II. Le théorème de M. Sylvester sur le déterminant Δ (BRIOSCHI, traduction de M. Combescure, p. 33) peut aussi facilement se déduire des plus simples propriétés des déterminants, sans qu'on ait recours à leur multiplication. Premièrement on voit aisément que la valeur de Δ ne change pas, si, exceptant les éléments de la dernière colonne et ceux de la dernière ligne, on ajoute aux éléments d'une même ligne la même quantité h_2 ; car on a

successivement

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_{1,1} + h_1 & a_{1,2} + h_1 & \dots & a_{1,n} + h_1 & 1 \\ a_{2,1} + h_2 & a_{2,2} + h_2 & \dots & a_{2,n} + h_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} + h_n & a_{n,2} + h_n & \dots & a_{n,n} + h_n & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{1,1} + h_1 & a_{1,2} - a_{1,1} & \dots & a_{1,n} - a_{1,1} & 1 \\ a_{2,1} + h_2 & a_{2,2} - a_{2,1} & \dots & a_{2,n} - a_{2,1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} + h_n & a_{n,2} - a_{n,1} & \dots & a_{n,n} - a_{n,1} & 1 \\ 1 + 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} - a_{1,1} & \dots & a_{1,n} - a_{1,1} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} - a_{2,1} & \dots & a_{2,n} - a_{2,1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} - a_{n,1} & \dots & a_{n,n} - a_{n,1} & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \Delta;
 \end{aligned}$$

il en sera de même lorsqu'on ajoute, sous la même restriction, aux éléments d'une même colonne la même quantité k_i ; donc, en faisant les deux substitutions l'une après l'autre, on obtiendra $\Delta = H$.
