NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANGE LE TAUNÉAC

Note sur la question 572

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 393-395

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__393_1>

NOTE SUR LA QUESTION 572;

PAR M. ANGE LE TAUNÉAC.

Le principe invoqué à la fin de la page 266 peut être énoncé en ces termes :

« Si le terme général d'une série, u_n, a la forme $f'(n)$, » la somme S_n des n premiers termes sera donnée par la

» formule

$$S_n = f(n) + \text{const.} »$$

On aurait, par exemple,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = l(3) - 1,$$

résultat évidemment absurde.

Il n'est pas étonnant, d'après ces prémisses, que la valeur indiquée (p. 267) pour la limite de la somme des termes de la série

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{7.8.9} + \ldots$$

soit inexacte; cette valeur est $\frac{1}{4} l 2$, comme le trouve M. Prinz (p. 286).

Du reste, la série d'Euler peut être sommée par le procédé suivant, très-connu, et applicable à une foule de cas.

Soit

$$y = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^7}{5.6.7} + \frac{x^{11}}{9.10.11} + \ldots,$$

x étant supposé compris entre $+1$ et -1.

Prenant les dérivées des deux membres, on obtient

$$y''' = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$y''' = \frac{1}{1 - x^4}.$$

De là on conclut successivement :

$$y'' = \frac{1}{4} l(1 + x) - \frac{1}{4} l(1 - x) + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tang} x,$$

$$y' = \frac{1}{4}(1+x)\,l(1+x) + \frac{1}{4}(1-x)\,l(1-x)$$
$$- \frac{1}{4}\,l(1+x^2) + \frac{1}{2}\,x \text{ arc tang } x,$$
$$y = \frac{1}{8}(1+x)^2\,l(1+x) - \frac{1}{8}(1-x)^2\,l(1-x) - \frac{1}{4}\,x\,l(1+x^2)$$
$$- \frac{1}{4}(1-x^2) \text{ arc tang } x.$$

Si, dans cette dernière formule, on suppose $x = 1$, on trouve

$$y = \frac{1}{4}\,l\,2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots.$$

En combinant les relations précédentes, on en obtient d'autres; par exemple celle-ci, que je propose aux jeunes lecteurs des *Annales* :

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.5.9} + \frac{1}{4.7.13} + \frac{1}{5.7.17} + \ldots.$$

(3 juillet 1861.)