DELLAC

Solution de la question 572 et démonstration d'un théorème de M. Garcet

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 366-375
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__366_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 572 ET DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. GARCET

(voir t. XIX, p. 32),

PAR M. DELLAC,
Professeur à Amiens (*).

La question que nous allons résoudre est celle-ci :

Connaissant la somme d'une série ordonnée par rapport aux puissances ascendantes d'une variable x, trouver la somme d'une quelconque des séries que l'on obtient en prenant les termes de n en n.

La série donnée peut s'ecrire

$$(1)\quad F(x) = \sum \left[A^{pn} x + B^{pn+1} x + C^{pn+2} x + \ldots + L^{(p+1)n-1} x\right].$$

Je désignerai par S_0 la somme des termes dans lesquels l'exposant de x est multiple de n, par S_1 la somme de ceux où cet exposant est égal à un multiple de $n+1$; de même pour $S_2, S_3, \ldots, S_{n-1}$.

Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité dont la formule générale est

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Dans l'équation (1), je remplace x successivement par $\alpha x, \beta x, \gamma x, \ldots, \omega x$ et j'ai

$$\begin{aligned}
M_0 + iN_0 &= S_0 + S_1\alpha + S_2\alpha^2 + \ldots + S_{n-1}\alpha^{n-1},\\
M_1 + iN_1 &= S_0 + S_1\beta + S_2\beta^2 + \ldots + S_{n-1}\beta^{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
M_{n-1} + iN_{n-1} &= S_0 + S_1\omega + S_2\omega^2 + \ldots + S_{n-1}\omega^{n-1}.
\end{aligned}$$

(*) A changé de résidence. TM

J'ajoute toutes ces égalités membre à membre en remarquant que

$$\alpha^p + \beta^p + \ldots + \omega^p = 0,$$

toutes les fois que p n'est pas multiple de n. Dans le second membre, il ne reste que des quantités réelles; il doit donc en être de même dans le premier; et c'est ce qu'il était facile de prévoir, puisque les racines α, β,..., ω étant conjuguées deux à deux ou réelles, donnent des résultats conjugués ou réels. Donc

$$S_0 = \frac{M_0 + M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1}}{n}.$$

Pour avoir S_1, multiplions la première des égalités précédentes par α^{n-1}, la deuxième par β^{n-1}, et ainsi de suite, puis ajoutons. On obtient

$$S_1 = \frac{M'_0 + M'_1 + M'_2 + \ldots + M'_{n-1}}{n},$$

en posant

$$M'_h + i N'_h = (M_h + i N_h)\left(\cos\frac{2h\pi}{n} + i \sin\frac{2h\pi}{n}\right)^{n-1};$$

d'où

$$M'_h = M_h \cos\frac{2(n-1)h\pi}{n} - N_h \sin\frac{2(n-1)h\pi}{n}.$$

On trouvera de même

$$S_2 = \frac{M''_0 + M''_1 + \ldots + M''_{n-1}}{n},$$

en posant

$$M''_h = M_h \cos\frac{2(n-2)h\pi}{n} - N_h \sin\frac{2(n-2)h\pi}{n},$$

et en général

$$S_p = \frac{M_0^{(p)} + M_1^{(p)} + M_2^{(p)} + \ldots + M_{n-1}^{(p)}}{n},$$

en posant

$$M_h^{(p)} = M_h \cos \frac{2(n-p)h\pi}{n} - N_h \sin \frac{2(n-p)h\pi}{n}.$$

Dans la série S_0 les exposants de x croîtront de n unités d'un terme à l'autre; mais si l'on pose $y = x^n$, on aura une nouvelle série ayant les mêmes coefficients et dans laquelle les exposants de la variable croîtront seulement d'une unité. On fera de même pour $\frac{S_1}{x}, \frac{S_2}{x^2}, \ldots$

Tout ce qui précède s'applique aussi aux suites limitées, par exemple au binôme de Newton.

Si la série proposée reste convergente pour $x = 1$, elle le sera aussi pour $x = \alpha$, car le module de α est l'unité. On pourra donc remplacer x dans l'équation (1) successivement par les racines $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$, ce qui revient à faire $x = 1$ dans les résultats déjà obtenus.

Pour avoir des séries auxquelles nous puissions appliquer la théorie précédente, partons de celle-ci

$$-\log(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots.$$

Multipliant par dx et intégrant, il vient

$$(1-x)\log(1-x) + x = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \ldots;$$

multipliant par dx et intégrant

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{4}(3x-2) - \frac{1}{2}(1-x^2)\log(1-x) \\ &\qquad = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les intégrations se font aisément dans le premier membre si l'on pose

$$1 - x = y.$$

Dans cette série (2), prenons les coefficients de quatre en quatre. Pour

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = -1$$

on a

$$\frac{1}{4} = S_0 + S_1 + S_2 + S_3,$$

$$\frac{5}{4} - 2\log 2 = S_0 - S_1 + S_2 - S_3,$$

d'où

$$S_0 + S_2 = \frac{3}{4} - \log 2,$$

$$S_1 + S_3 = \log 2 - \frac{1}{2}.$$

Faisons maintenant $x = -i = -\sqrt{-1}$. Le second membre devient

$$S_0 - S_2 + i(S_3 - S_1),$$

et voyons ce que devient le premier.

Supposons qu'on ait à chercher $\log(1 - x)$, x étant imaginaire. On posera

$$1 - x = 1 - a - bi = e^{u - vi} = e^u(\cos v - i \sin v),$$

d'où

$$1 - a = e^u \cos v, \qquad b = e^u \sin v,$$

$$e^u = \sqrt{(1 + x)^2 + b^2}, \qquad u = \frac{1}{2}\log[(1 - a)^2 + b^2],$$

$$\tang v = \frac{b}{1 - a}, \qquad v = \varphi + k\pi,$$

en posant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{1-a};$$

de sorte que

$$\log(1-x) = u - \iota(\varphi + k\pi).$$

Ce logarithme est en général indéterminé. Mais dans la question qui nous occupe, l'indétermination est levée par cette considération que le second membre de l'équation (2) est une série qui n'est convergente que dans le cercle décrit de l'origine comme centre et avec un rayon égal à l'unité (voir *Fonctions doublement périodiques* de Briot). Par conséquent la variable ne peut pas sortir de ce cercle, et par suite ne peut pas tourner autour du point singulier $a = +1$, $b = 0$. Or on sait que dans le logarithme de $1 - x$, k ne passe d'une valeur à une autre que lorsque la variable indépendante x tourne autour du point $a = 1$, $b = 0$; et comme dans notre question elle ne peut pas le faire, k aura toujours la même valeur quel que soit x. Or pour $x = 0$, k est nul; il est donc nul pour toute valeur de x, et l'on a

$$\log(1-x) = u - \varphi\iota.$$

Si

$$x = -\iota, \quad a = 0, \quad b = 1,$$

par suite

$$u = \frac{1}{2}\log 2, \quad \operatorname{tang}\varphi = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

et on obtient

$$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} + \iota\,\frac{1-\log 2}{2} = S_0 - S_2 + \iota(S_3 - S_1),$$

d'ou

$$S_0 - S_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}, \quad S_3 - S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2.$$

Combinant ces deux équations avec les précédentes, on obtient

$$S_3 = \frac{1}{4}\log 2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots,$$

$$S_0 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{10.11.12} + \ldots,$$

$$S_1 = \frac{3}{4}\log 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{7.8.9} + \frac{1}{11.12.13} + \ldots,$$

$$S_2 = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{8.9.10} + \frac{1}{12.13.14} + \ldots.$$

La première de ces relations démontre la question 572.

En opérant de la même manière, on obtiendra les coefficients de la série pris de trois en trois :

$$S_0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}\log 3 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{7.8.9} + \ldots,$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{8.9.10} + \ldots,$$

$$S_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots$$

Si l'on veut prendre les termes de trois en trois en conservant la variable x, on trouvera, après tout calcul fait,

$$S_0 = \frac{\varphi}{2\sqrt{3}}(2x + x^2) - \frac{1}{6}\left(1 + x - \frac{x^2}{2}\right)\log(1 + x + x^2)$$
$$- \frac{1}{6}(1 - x)^2 \log(1 - x),$$

$$S_1 = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}(1 - x)^2 \log(1 - x)$$
$$+ \frac{1}{12}(1 + 4x + x^2)\log(1 + x + x^2) + \frac{\varphi}{2\sqrt{3}}(1 - x^2),$$

$$S_2 = \frac{3x^2}{4} - \frac{1}{6}(1 - x^2)^2 \log(1 - x)$$

$$+ \frac{1}{12}(1 - 2x - 2x^2)\log(1 + x + x^2) - \frac{\varphi}{2\sqrt{3}}(1 + 2a),$$

en posant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{x\sqrt{3}}{x + 2}.$$

Ainsi on a

$$S_0 = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^6}{4.5.6} + \frac{x^9}{7.8.9} + \ldots$$

Si l'on veut que la série ne renferme que des puissances successives, on posera

$$x^3 = y, \quad x = y^{\frac{1}{3}},$$

et alors

$$S_0 = \frac{y}{1.2.3} + \frac{y^2}{4.5.6} + \frac{y^3}{7.8.9} + \ldots$$

avec

$$S_0 = \frac{\varphi}{2\sqrt{3}}\left(2y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$- \frac{1}{6}\left(1 + y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}\right)\log\left(1 + y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$- \frac{1}{6}\left(1 - y^{\frac{1}{3}}\right)^2 \log\left(1 - y^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{y^{\frac{1}{3}} + 2}.$$

Pour $y=\frac{1}{8}$, on obtient

$$\frac{5\varphi}{8\sqrt{3}}-\frac{11}{48}\log 7+\frac{1}{2}\log 2$$

$$=\frac{1}{1.2.3}\,\frac{1}{8}+\frac{1}{4.5.6}\,\frac{1}{8^2}+\frac{1}{7.8.9}\,\frac{1}{8^3}+\ldots,$$

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Appliquons encore la théorie précédente au binôme de Newton, et comptons les coefficients binomiaux pris de trois en trois.

On a

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots.$$

Si l'on y fait $x=1$, on obtient

$$2^m=S_0+S_1+S_2;$$

pour $x=\alpha=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, on a

$$(1+mx)=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m=\left(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}\right)^m$$
$$=\cos\frac{2m\pi}{6}+i\sin\frac{2m\pi}{6},$$

et par suite

$$\cos\frac{2m\pi}{6}=S_0-\frac{1}{2}S_1-\frac{1}{2}S_2,$$

$$\sin\frac{2m\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}(S_1-S_2).$$

De là résultent

$$S_0 = \frac{2m + 2\cos\frac{2m\pi}{6}}{3},$$

$$S_1 = \frac{2^m + \sqrt{3}\sin\frac{2m\pi}{6} - \cos\frac{2m\pi}{6}}{3},$$

$$S_2 = \frac{2^m - \sqrt{3}\sin\frac{2m\pi}{6} - \cos\frac{2m\pi}{6}}{3}.$$

Ces formules conviennent à toutes les valeurs positives de m, mais elles ne conviennent pas aux valeurs négatives, car le binôme n'est pas convergent pour $x = 1$ lorsque m est négatif.

Dans le cas de m entier et positif, on distinguera six cas et on obtiendra

$$m = 6n, \qquad S_0 - 1 = S_1 = S_2 = \frac{2^m - 1}{3},$$

$$m = 6n + 1, \qquad S_0 = S_1 = S_2 + 1 = \frac{2^m + 1}{3},$$

$$m = 6n + 2, \qquad S_0 = S_1 - 1 = S_2 = \frac{2^m - 1}{3},$$

$$m = 6n + 3, \qquad S_0 + 1 = S_1 = S_2 = \frac{2^m + 1}{3},$$

$$m = 6n + 4, \qquad S_0 = S_1 = S_2 - 1 = \frac{2^m - 1}{3},$$

$$m = 6n + 5, \qquad S_0 = S_1 + 1 = S_2 = \frac{2^m + 1}{3}.$$

On voit qu'il y a toujours égalité à l'unité près entre les trois sommes S_0, S_1, S_2.

Ainsi se trouve démontré le théorème du capitaine Garcet, 1860, p. 32.

On pourrait de même prendre les coefficients de quatre en quatre et retrouver les formules de la page 9 (1861) et page 147. (Dans ces dernières, on a mis S_2 au lieu de S_3 et réciproquement.)