NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. DE VIRIEU

Solution de la question 503

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 353-356

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__353_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 503

(voir t. XIX, p. 44 et 81);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Répétiteur à Lyon (institution de M. Poncin).

1. Soit à résoudre l'équation

$$(1)\quad a^4(a^4-1)^4(x^2+14x+1)^3=(a^8+14a^4+1)^3\,x\,(x-1)^4.$$

Aucune des racines n'étant nulle, on peut diviser par x^3

$$a^4(a^4-1)^4\left(x+\frac{1}{x}+14\right)^3$$
$$=(a^8+14a^4+1)^3\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}-4x-4\cdot\frac{1}{x}+4\right);$$

posant

$$x+\frac{1}{x}=z,\qquad z=u+2,$$

on a

$$a^4(a^4-1)^4(z+14)^3=(a^8+14a^4+1)^3(z-2)^2,$$
$$a^4(a^4-1)^4(u+16)^3=(a^8+14a^4+1)^3u^2,$$

et comme on a identiquement

$$(a^8+14a^4+1)^3=[(a^4-1)^2+16a^4]^3$$

l'équation en u devient

$$a^4(a^4-1)^4u^3-\left.\begin{array}{r}(a^4-1)^6\\-768a^8(a^4-1)^2\\-4096a^{12}\end{array}\right|\begin{array}{l}u^2+768a^4(a^4-1)^4u\\+4096a^4(a^4-1)^4=0.\\ \end{array}$$

$2a^4$ étant une des racines de la proposée, une des valeurs de z est $u^4 + \frac{1}{a^4}$; la valeur correspondante de u est $a^4 - 2 + \frac{1}{a^4}$ ou $\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2$ ou $\frac{(a^4-1)^2}{a^4}$ le premier membre de l'équation en u est donc divisible par

$$a^4 u - (a^4 - 1)^2$$

la division s'effectue rapidement, grâce à la forme du premier membre, et l'équation (1) est ramenée aux suivantes :

$$a^4 u - (a^4 - 1)^2 = 0, \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} &(a^4-1)^4 u^2 - 256 a^4 [3(a^4-1)^2 + 16a^4] u \\ &\qquad - 4096 a^4 (a^4-1)^2 = 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$x = \frac{u + 2 \pm \sqrt{u^2 + 4u}}{2};$$

or l'équation (3) donne

$$u = 64a^2 \frac{[6a^2(a^4-1)^2 + 32a^6] \pm (a^4+1)[a^8 + 14a^4 + 1]}{(a^4-1)^4}$$

$$= \pm 64 a^2 \frac{(a^2 \pm 1)^6}{(a^4-1)^4},$$

en prenant à la fois les signes supérieurs ou les signes inférieurs (2). Les équations (2) et (3) donnent ainsi les valeurs suivantes de u :

$$u = \frac{(a^4-1)^2}{a^4},$$

$$u = +64a^2 \frac{(a^2+1)^2}{(a^2-1)^4},$$

$$u = -64a^2 \frac{(a^2-1)^2}{(a^2+1)^4}.$$

3. **Prenons la première valeur de u :**

$$u = \frac{(a^4-1)^2}{a^4}, \qquad u+2 = \frac{a^8+1}{a^4},$$

$$u+4 = \frac{(a^4+1)^2}{a^4}, \quad \pm\sqrt{u^3+4u} = \pm\frac{a^8-1}{a^4};$$

$$(4) \qquad x = \frac{1}{2}\frac{(a^8+1)\pm(a^8-1)}{a^4}.$$

Prenons la deuxième valeur de u:

$$u = 64a^2\frac{(u^2+1)^2}{(a^2-1)^4},$$

$$u+2 = \frac{2a^8+56a^6+70a^4+56a^2+2}{(a^2-1)^4}$$

$$= \frac{(a+1)^8+(a-1)^8}{(a^2-1)^4},$$

$$u+4 = 4\frac{(a^4+6a^2+1)^2}{(a^2-1)^4} \pm\sqrt{u^2+4u}$$

$$= \pm\frac{16a^7+112a^5+112a^3+16a}{(a^2-1)^4}$$

$$= \pm\frac{(a+1)^8-(a-1)^8}{(a^2-1)^4},$$

$$(5) \quad x = \frac{1}{2}\frac{[(a+1)^8+(a-1)^8]\pm[(a+1)^8-(a-1)^8]}{(a^2-1)^4}.$$

Prenons la troisième valeur de u :

$$u = -64a^2\frac{(a^2-1)^2}{(a^2+1)^4},$$

$$u+2 = \frac{2a^8-56a^6+70a^4-56a^2+2}{(a^2+1)^4}$$

$$= \frac{(a+\sqrt{-1})^8+(a-\sqrt{-1})^8}{(a^2+1)^4},$$

$$u+4=4\,\frac{(a^4-6a^2+1)^2}{(a^2+1)^4}\pm\sqrt{u^2+4u}$$

$$=\pm\frac{(16a^7-112a^5+112a^3-16a)\sqrt{-1}}{(a^2+1)^4}$$

$$=\frac{(a+\sqrt{-1})^8-(a-\sqrt{-1})^8}{(a^2+1)^4},$$

$$(6)\quad x=\frac{1}{2}\,\frac{\left[(a+\sqrt{-1})^8+(a-\sqrt{-1})^8\right]\pm\left[(a+\sqrt{-1})^8-(a-\sqrt{-1})^8\right]}{(a^2+1)^4}.$$

4. Donc, en vertu des formules (4) (5) (6), les racines de

$$a^4(a^4-1)^4(x^3+14x+1)^3=(a^8+14a^4+1)^3x(x-1)^4$$

sont

$$a^4,\qquad \frac{1}{a^4},\qquad \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^4,$$

$$\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^4,\quad \left(\frac{a+\sqrt{-1}}{a-\sqrt{-1}}\right)^4,\quad \left(\frac{a-\sqrt{-1}}{a+\sqrt{-1}}\right)^4.$$