

J. DE VIRIEU

Solution de la question 503

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 353-356

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__353_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 503

(voir t. XIX, p. 44 et 51);

PAR M. J. DE VIRIEU,

Répétiteur à Lyon (institution de M. Poncin).

1. Soit à résoudre l'équation

$$(1) \quad a^4(a^4-1)^4(x^2+14x+1)^3 = (a^8+14a^4+1)^3 x(x-1)^4.$$

Aucune des racines n'étant nulle, on peut diviser par x^3

$$\begin{aligned} & a^4(a^4-1)^4 \left(x + \frac{1}{x} + 14\right)^3 \\ &= (a^8+14a^4+1)^3 \left(x^2+2+\frac{1}{x^2}-4x-4\frac{1}{x}+4\right); \end{aligned}$$

posant

$$x + \frac{1}{x} = z, \quad z = u + 2,$$

on a

$$a^4(a^4-1)^4(z+14)^3 = (a^8+14a^4+1)^3(z-2)^2,$$

$$a^4(a^4-1)^4(u+16)^3 = (a^8+14a^4+1)^3 u^2,$$

et comme on a identiquement

$$(a^8+14a^4+1)^3 = [(a^4-1)^2+16a^4]^3$$

l'équation en u devient

$$\begin{aligned} a^4(a^4-1)^4 u^3 - & \left. \begin{aligned} & (a^4-1)^6 \\ & - 768a^8(a^4-1)^3 \\ & - 4096a^{12} \end{aligned} \right\} u^2 + 768a^4(a^4-1)^4 u \\ & + 4096a^4(a^4-1)^4 = 0. \end{aligned}$$

2a⁴ étant une des racines de la proposée, une des va-

leurs de z est $u^4 + \frac{1}{a^4}$; la valeur correspondante de u est $a^4 - 2 + \frac{1}{a^4}$ ou $\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2$ ou $\frac{(a^4 - 1)^2}{a^4}$ le premier membre de l'équation en u est donc divisible par

$$a^4 u - (a^4 - 1)^2$$

la division s'effectue rapidement, grâce à la forme du premier membre, et l'équation (1) est ramenée aux suivantes :

$$(2) \quad a^4 u - (a^4 - 1)^2 = 0,$$

$$(3) \quad \begin{cases} (a^4 - 1)^4 u^2 - 256 a^4 [3(a^4 - 1)^2 + 16 a^4] u \\ - 4096 a^4 (a^4 - 1)^2 = 0, \end{cases}$$

$$x = \frac{u + 2 \pm \sqrt{u^2 + 4u}}{2};$$

or l'équation (3) donne

$$\begin{aligned} u &= 64 a^2 \frac{[6 a^2 (a^4 - 1)^2 + 32 a^6] \pm (a^4 + 1) [a^8 + 14 a^4 + 1]}{(a^4 - 1)^4} \\ &= \pm 64 a^2 \frac{(a^2 \pm 1)^6}{(a^4 - 1)^4}, \end{aligned}$$

en prenant à la fois les signes supérieurs ou les signes inférieurs (2). Les équations (2) et (3) donnent ainsi les valeurs suivantes de u :

$$u = \frac{(a^4 - 1)^2}{a^4},$$

$$u = + 64 a^2 \frac{(a^2 + 1)^2}{(a^2 - 1)^4},$$

$$u = - 64 a^2 \frac{(a^2 - 1)^2}{(a^2 + 1)^4}.$$

3. Prenons la première valeur de u :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{(a^4 - 1)^2}{a^4}, & u + 2 &= \frac{a^8 + 1}{a^4}, \\
 u + 4 &= \frac{(a^4 + 1)^2}{a^4}, & \pm \sqrt{u^2 + 4}u &= \pm \frac{a^8 - 1}{a^4}; \\
 (4) \quad x &= \frac{1}{2} \frac{(a^8 + 1) \pm (a^8 - 1)}{a^4}.
 \end{aligned}$$

Prenons la deuxième valeur de u :

$$\begin{aligned}
 u &= 64 a^2 \frac{(u^2 + 1)^2}{(a^2 - 1)^4}, \\
 u + 2 &= \frac{2a^8 + 56a^6 + 70a^4 + 56a^2 + 2}{(a^2 - 1)^4} \\
 &= \frac{(a + 1)^8 + (a - 1)^8}{(a^2 - 1)^4}, \\
 u + 4 &= 4 \frac{(a^4 + 6a^2 + 1)^2}{(a^2 - 1)^8} \pm \sqrt{u^2 + 4}u \\
 &= \pm \frac{16a^7 + 112a^5 + 112a^3 + 16a}{(a^2 - 1)^4} \\
 &= \pm \frac{(a + 1)^8 - (a - 1)^8}{(a^2 - 1)^4}, \\
 (5) \quad x &= \frac{1}{2} \frac{[(a + 1)^8 + (a - 1)^8] \pm [(a + 1)^8 - (a - 1)^8]}{(a^2 - 1)^4}.
 \end{aligned}$$

Prenons la troisième valeur de u :

$$\begin{aligned}
 u &= -64 a^2 \frac{(a^2 - 1)^2}{(a^2 + 1)^4}, \\
 u + 2 &= \frac{2a^8 - 56a^6 + 70a^4 - 56a^2 + 2}{(a^2 + 1)^4} \\
 &= \frac{(a + \sqrt{-1})^8 + (a - \sqrt{-1})^8}{(a^2 + 1)^4},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u + 4 &= 4 \frac{(a^4 - 6a^2 + 1)^2}{(a^2 + 1)^4} \pm \sqrt{u^2 + 4u} \\
 &= \pm \frac{(16a^7 - 112a^5 + 112a^3 - 16a) \sqrt{-1}}{(a^2 + 1)^4} \\
 &= \frac{(a + \sqrt{-1})^8 - (a - \sqrt{-1})^8}{(a^2 + 1)^4},
 \end{aligned}$$

$$(6) \quad x = \frac{1}{2} \frac{[(a + \sqrt{-1})^8 + (a - \sqrt{-1})^8] \pm [(a + \sqrt{-1})^8 - (a - \sqrt{-1})^8]}{(a^2 + 1)^4}.$$

4. Donc, en vertu des formules (4) (5) (6), les racines de

$$a^4(a^4 - 1)^4(x^3 + 14x + 1)^3 = (a^8 + 14a^4 + 1)^3 x(x - 1)^4$$

sont

$$\begin{aligned}
 &a^4, \quad \frac{1}{a^4}, \quad \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^4, \\
 &\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^4, \quad \left(\frac{a+\sqrt{-1}}{a-\sqrt{-1}}\right)^4, \quad \left(\frac{a-\sqrt{-1}}{a+\sqrt{-1}}\right)^4.
 \end{aligned}$$