NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DESGRANGES

Sur une espèce particulière de surface gauche du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 348-352

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__348_1>

SUR UNE ESPÈCE PARTICULIÈRE DE SURFACE GAUCHE DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. DESGRANGES.

Cette surface S est engendrée par une droite L qui se meut en s'appuyant sur deux droites données A et B, de telle sorte que la distance $\overline{pp'}$ des deux points p, p' où L coupe A et B reste constante.

Soit $pp' = D$.

Je me propose d'étudier d'abord cette surface par les seuls procédés de la géométrie, ou, pour parler plus exactement, indépendamment de son équation.

Je prends pour plan horizontal un plan parallèle aux deux directrices A et B, et passant par l'une de ces directrices.

lm située dans le plan horizontal sera une des deux directrices, ou A.

Nota. La projection de la deuxième directrice B. J'appelle *m* la distance de B au plan horizontal, θ l'angle des deux directrices.

Soit *ab* la projection horizontale d'une génératrice quelconque, et Δ l'angle que cette projection fait avec la directrice *lm*.

La distance $\overline{cd}$ des points *c* et *d* où *ab* rencontre les projections des deux directrices, est une constante $=\sqrt{D^2-m^2}$ que j'appelle *k*.

Toutes les génératrices font avec le plan horizontal un angle constant dont la tangente $=\frac{m}{k}$.

Donc la surface a un cône directeur (cône droit à base circulaire et dont l'axe est vertical).

Si l'on fait mouvoir la droite *ab*, son point *d* restant toujours sur *nt*, projection de B, et son point C sur *lm* ou A, on aura toutes les projections de la génératrice de S.

Or on sait que dans ce mouvement tous les points de *ab* décrivent des ellipses dont le centre est O (*).

Donc toutes les sections horizontales de la surface sont des ellipses qui ont toutes leur centre sur la plus courte

(*) L'équation de ces ellipses, en prenant *lm* pour axe des x, O pour l'origine et désignant par *c* la distance du point décrivant au point *c* de *ab*, *c* pouvant être positif ou négatif, est

$$c^2x^2+[k^2\cot^2\theta+(c-k)^2]y^2-2ck\cot\theta.xy=c^2(c-k)^2.$$

sur la plus courte distance prolongée des deux directrices.

La surface S a donc un axe qui coïncide avec cette plus courte distance.

A l'infini l'ellipse devient un cercle; pour $z = m$, elle se confond avec B; pour $z = 0$, elle se confond avec A; pour $z = \frac{m}{2}$, les deux axes de l'ellipse sont sur les deux bissectrices de l'angle des deux directrices A et B.

La génératrice quelconque (ab) (*) de S est une des deux génératrices principales du paraboloïde gauche R, qui a pour directrices A et B, et dont le plan directeur P a cette même génératrice pour ligne de plus grande pente.

(Les horizontales de ce plan sont perpendiculaires à (ab) et à ab et la droite $\overline{fcg}$ perpendiculaire à ab au point C est sa trace horizontale.)

Or aux points c et d, R et S ont bien évidemment même plan tangent; il est d'ailleurs facile de voir que le plan P est tangent à la fois aux deux surfaces R et S à l'infini : les deux surfaces S et R sont donc tangentes l'une à l'autre tout le long de (ab).

Donc S est l'enveloppe du paraboloïde R qui a pour directrices constantes A et B, et dont le plan directeur variable P fait un angle constant tang $= \frac{m}{l}$ avec le plan horizontal.

La projection ab de la génératrice a pour enveloppe une certaine courbe C (je donnerai plus bas le moyen de la construire géométriquement). Cette courbe est la projection de la ligne de striction de la surface S.

(*) J'entends par génératrices principales d'un paraboloïde les deux génératrices qui passent par le sommet.

J'entends par (ab) la ligne qui a pour projection ab; par (a) le point qui a pour projection a.

La ligne de striction est décrite par le sommet du paraboloïde R.

Le cylindre vertical qui a pour trace la courbe C, est tangent à S suivant la ligne de striction.

Quand l'angle A de *ab* avec *lm* est droit, le plan tangent à la surface est le même tout le long de *ab*, sauf au point (*d*) (où la génératrice (*ab*) coupe B), point de striction pour lequel le plan tangent est vertical, et a *ab* pour trace horizontale (*).

On voit bien qu'il y a quatre génératrices pour lesquelles cela a lieu.

Quand les deux directrices A et B font un angle droit, qu'on a $\theta = 90^\circ$, la projection horizontale de la ligne de striction est une courbe du sixième degré bien connue dont l'équation est (**)

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}};$$

les deux autres projections sont

$$k^2 z^3 = m^3 x^2 \quad \text{et} \quad k^2 (z - m)^3 m^3 y^2.$$

Dans ce cas particulier de $\theta = 90^\circ$, toutes les courbes horizontales de la surface S sont des ellipses dont les axes coïncident avec les x et les y. De $z = 0$ à $z = m$ la somme de ces axes $= k$; pour $z >$ ou < 0, la différence de ces axes $=$ K; pour $z = \frac{m}{2}$, on a un cercle $R = \frac{m}{2}$ qui par-

---

(*) Un point quelconque α de *ab* décrit une ellipse; quand *ab* vient à prendre une position telle que l'angle $bcm = 90^\circ$, il est bien évident que l'ordonnee $c\alpha$ est un maximum; donc en α la tangente à l'ellipse est parallèle a *lm*. Donc, etc. (CHARLES DUPIN, *Développements de Géométrie.*)

(**) On sait que c'est là l'équation de l'enveloppe de toutes les droites dont la partie interceptée entre les axes des x et y est constante $= k$.

Et aussi de toutes les ellipses $A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2$ pour lesquelles on a $A + B = K$.

tage la surface en deux nappes évidemment superposables, etc.

On remarque quelque chose d'analogue dans le paraboloïde gauche isocèle.

L'équation de la surface S, dans le cas où l'angle θ est quelconque, est

$$(z-m)^2(k^2z^2-m^2x^2)=(myz-m^2x\cot\theta)^2.$$

Si l'on suppose $\theta=90^\circ$, elle se réduit à

$$\text{(A)}\qquad k^2z^2(z-m)^2-m^2y^2z^2-(z-m)^2m^2x^2=0.$$

Dans ce cas particulier, l'équation du paraboloïde R qui a pour directrices constantes les deux droites A et B, et dont le plan directeur variable P fait avec le plan horizontal un angle constant dont la tangente

$$\frac{m}{\sqrt{a^2-m^2}}=\frac{m}{k}$$

est

$$\text{(B)}\qquad mayz=m(m-z)x+k(m-z)z\sqrt{1+a^2},$$

a étant la cotangente de l'angle que la trace horizontale du plan directeur P fait avec les x.

Si l'on suppose que a prenne toutes les valeurs possibles et que l'on cherche l'équation de la surface enveloppe de tous les paraboloïdes que représente (B), on retombe sur l'équation (A).

Le calcul ne présente aucune difficulté : mais dans le cas général l'équation du paraboloïde R est du quatrième degré en a, et il n'est pas facile d'éliminer a entre cette équation et sa dérivée.

Note du Rédacteur. La courbe C a été étudiée dans les *Nouvelles Annales* par Joachimsthal (t. VI, p. 260 et 263) et par M. Bouteiller.