

PAINVIN

**Application de la nouvelle analyse aux
surfaces du second ordre (fin)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 321-341

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__321_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES
DU SECOND ORDRE (FIN)**

(voir t. XX, p. 243);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS.

§ I. — *Polaires réciproques de deux surfaces du second degré qui se coupent suivant deux courbes planes.*

104. La première surface ayant pour équation

$$(1) \quad S = \sum a_{rs} x_r x_s = 0, \quad (a_{rs} = a_{sr})$$

l'équation de la seconde pourra s'écrire sous la forme

$$(2) \quad S' = S + 2 MN = 0;$$

M et N représentant deux plans connus,

$$(3) \quad \begin{cases} M = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ N = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = 0. \end{cases}$$

L'équation générale des surfaces du second degré passant par les courbes d'intersection des deux surfaces S' et S sera

$$(4) \quad S'' = S + 2 \lambda MN = 0,$$

λ désignant une constante indéterminée.

105. Ceci posé, cherchons les polaires réciproques des surfaces S et S' , et du système des surfaces S'' ; nous désignerons ces réciproques respectivement par Σ , Σ' , Σ'' .

Si l'on représente par Δ le discriminant de la surface S ,

et par α_{rs} les dérivées partielles de Δ , de sorte que

$$(5) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{rs} = \alpha_{sr} = \frac{d\Delta}{da_{rs}}$$

nous aurons pour la réciproque de S (n° 95) :

$$(6) \quad \Sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = -S \alpha_{rs} x_r x_s.$$

Pour obtenir la réciproque de S' , nous chercherons d'abord la réciproque de S'' , et dans le résultat nous ferons $\lambda = 1$. Or la réciproque de S'' est (95) :

$$(7) \quad \Sigma'' = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda(m_1 n_1 + m_1 n_1) & a_{12} + \lambda(m_1 n_2 + m_2 n_1) & a_{13} + \lambda(m_1 n_3 + m_3 n_1) & a_{14} + \lambda(m_1 n_4 + m_4 n_1) & x_1 \\ a_{21} + \lambda(m_2 n_1 + m_1 n_2) & a_{22} + \lambda(m_2 n_2 + m_2 n_2) & a_{23} + \lambda(m_2 n_3 + m_3 n_2) & a_{24} + \lambda(m_2 n_4 + m_4 n_2) & x_2 \\ a_{31} + \lambda(m_3 n_1 + m_1 n_3) & a_{32} + \lambda(m_3 n_2 + m_2 n_3) & a_{33} + \lambda(m_3 n_3 + m_3 n_3) & a_{34} + \lambda(m_3 n_4 + m_4 n_3) & x_3 \\ a_{41} + \lambda(m_4 n_1 + m_1 n_4) & a_{42} + \lambda(m_4 n_2 + m_2 n_4) & a_{43} + \lambda(m_4 n_3 + m_3 n_4) & a_{44} + \lambda(m_4 n_4 + m_4 n_4) & x_4 \\ x_1 + 0 & x_2 + 0 & x_3 + 0 & x_4 + 0 & 0 \end{vmatrix}$$

106. Introduisons d'abord les notations suivantes :

$$(8) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ m & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ \beta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ \gamma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ \mathbf{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right\}$$

N. B. $\alpha = 0$, $\beta = 0$, sont les conditions pour que les plans M ou N soient tangents à la surface $S = 0$; $\mathbf{D} = 0$ est la condition pour que la droite intersection de ces deux plans soit aussi tangente à la surface S.

(9)

$$\left. \begin{aligned}
 \text{P} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \frac{d\gamma}{dn_1} + x_2 \frac{d\gamma}{dn_2} + x_3 \frac{d\gamma}{dn_3} + x_4 \frac{d\gamma}{dn_4}, \\
 \text{Q} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \frac{d\gamma}{dm_1} + x_2 \frac{d\gamma}{dm_2} + x_3 \frac{d\gamma}{dm_3} + x_4 \frac{d\gamma}{dm_4},
 \end{aligned} \right\}$$

P et Q représentent des plans.

(10)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & x_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$G = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & x_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$E = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 & x_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

En appliquant la formule générale bien connue

$$P \frac{d^2 P}{da_{r_1} da_{r_1}} = \frac{dP}{da_{r_1}} \frac{dP}{da_{r_1}} - \frac{dP}{da_{r_1}} \frac{dP}{da_{r_1}}$$

on trouve, entre ces déterminants, les relations suivantes qui nous seront d'une grande utilité :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta . D = \alpha \beta - \gamma^2 ; \\ \Delta . E = \alpha Q - \gamma P ; \\ \Delta . A = \alpha \Sigma - P^2 ; \\ \Delta . G = \gamma \Sigma - PQ ; \\ \alpha . H = DA - E^2 . \end{array} \right.$$

On conclut de ces dernières égalités

$$(12) \quad \Delta^2 . H = \Delta D . \Sigma - (\beta P^2 - 2\gamma PQ + \alpha Q^2).$$

Les relations (11) nous conduisent à plusieurs conséquences géométriques :

1°. Le plan E passe par l'intersection des plans P et Q.

2°. La surface A est circonscrite à la réciproque Σ suivant la courbe déterminée par le plan P.

3°. La surface B, obtenue en changeant dans A les m en n , est circonscrite à la réciproque Σ suivant la courbe déterminée par le plan Q.

4°. La surface G coupe la réciproque Σ suivant les deux courbes planes P et Q;

5°. La surface H est circonscrite à la surface A suivant la courbe déterminée par le plan E.

Etc., etc.

107. Occupons-nous maintenant de la recherche de

la réciproque Σ'' . Si l'on *développe par colonnes* le déterminant (7) on obtient immédiatement

$$(13) \quad \Sigma'' = \Sigma - 2G\lambda - H\lambda^2.$$

108. En faisant $\lambda = 1$, et en ayant égard aux relations (11) et (12), on trouvera pour la réciproque Σ' de S'

$$(14) \quad \Delta^2 \Sigma' = \delta^2 \Sigma + [\beta P^2 + 2(\Delta - \gamma)PQ + \alpha Q^2],$$

après avoir posé

$$(15) \quad \delta^2 = (\Delta - \gamma)^2 - \alpha\beta.$$

Enfin, si nous décomposons la parenthèse en facteurs du premier degré, et que nous posons

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{N} = \frac{1}{\delta\sqrt{2\beta}} [\beta P + (\Delta - \gamma + \delta)Q], \\ \mathfrak{T} = \frac{1}{\delta\sqrt{2\beta}} [\beta P + (\Delta - \gamma - \delta)Q], \end{cases}$$

nous obtiendrons définitivement pour la réciproque de S'

$$(17) \quad \frac{\Delta^2}{\delta^2} \Sigma' = \Sigma + 2\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{T} = 0.$$

Si l'on se rappelle que la réciproque de S est

$$(18) \quad \Sigma = 0,$$

nous concluons, à l'inspection de ces deux équations, le théorème suivant :

Lorsque deux surfaces du second degré se coupent suivant deux courbes planes, leurs polaires réciproques se coupent aussi suivant deux courbes planes.

Et comme cas particulier : *Lorsque deux surfaces du second degré sont circonscrites l'une à l'autre, il en est de même de leurs polaires réciproques.*

§ II. — *Équation des cônes circonscrits à deux surfaces du second degré.*

109. Imaginons les cônes circonscrits aux deux surfaces du second degré S et S' , puis cherchons le *système réciproque*. Σ et Σ' seront, par exemple, les réciproques de S et S' . Mais, chaque plan tangent *commun* aux deux surfaces S et S' *correspondra* à un point *commun* aux deux réciproques Σ et Σ' ; et, puisque les plans tangents à un même cône passent par le même point, les points correspondants seront dans un même plan; donc les deux surfaces Σ et Σ' se couperont suivant deux courbes planes; par suite, les réciproques de Σ et Σ' , c'est-à-dire S et S' , se couperont aussi suivant deux courbes planes.

Ainsi, deux surfaces du second degré ne peuvent avoir des cônes tangents communs qu'à la condition de se couper suivant des courbes planes.

110. Ceci étant admis, considérons les deux surfaces

$$(1) \quad T = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \alpha_{33} x_3^2 + \alpha_{44} x_4^2 + 2 \alpha_{12} x_1 x_2 \\ + 2 \alpha_{13} x_1 x_3 + 2 \alpha_{14} x_1 x_4 + 2 \alpha_{23} x_2 x_3 \\ + 2 \alpha_{24} x_2 x_4 + 2 \alpha_{34} x_3 x_4 \end{array} \right\} = 0,$$

$$(2) \quad T' = T - 2 \mathfrak{N} \mathfrak{U} = 0$$

qui se coupent suivant deux courbes planes.

Les Δ , α , β , γ , δ , $\alpha_{r,s}$, ont les significations déterminées par les relations (5), (8), (15) du paragraphe précédent; les plans \mathfrak{N} et \mathfrak{U} ont pour équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{N} = M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 + M_4 x_4, \\ \mathfrak{U} = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4; \end{array} \right.$$

et les M_r , N_r sont définis comme il suit

$$(4) \quad \begin{cases} M_r = \frac{1}{\delta \sqrt{2} \beta} \left[\beta \frac{d\gamma}{dn_r} + (\Delta - \gamma + \delta) \frac{d\gamma}{dm_r} \right]; \\ N_r = \frac{1}{\delta \sqrt{2} \beta} \left[\beta \frac{d\gamma}{dn_r} + (\Delta - \gamma - \delta) \frac{d\gamma}{dm_r} \right]. \end{cases}$$

L'équation générale des surfaces du second degré, T'' , passant par l'intersection des deux surfaces T et T' , sera

$$(5) \quad T'' = T - 2\mu \mathfrak{N} \mathfrak{K} = 0.$$

111. Cherchons maintenant les polaires réciproques des surfaces T , T' , T'' .

Si l'on désigne par Δ' le discriminant de la fonction T , de sorte que

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}, \\ \alpha_{rs} = \frac{d\Delta}{da_{rs}}, \end{array} \right.$$

on aura, d'après les relations connues sur les *déterminants réciproques*,

$$(7) \quad \Delta' = \Delta^3, \quad \Delta^2 a_{rs} = \frac{d\Delta'}{d\alpha_{rs}}.$$

Il nous sera facile d'avoir les réciproques des surfaces T , T' , T'' ; nous désignerons ces réciproques respectivement par S_1 , S'_1 , S''_1 .

112. Nous constatons d'abord que la réciproque de la

surface T, est

$$(8) \quad S_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & x_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & x_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = -\Delta^2 S,$$

en posant

$$(9) \quad S = \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2a_{12} x_1 x_2 \\ + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{14} x_1 x_4 + 2a_{23} x_2 x_3 \\ + 2a_{24} x_2 x_4 + 2a_{34} x_3 x_4 \end{array} \right\}.$$

113. Pour obtenir la réciproque S_1'' de T'' , il suffira de remplacer dans les formules (7), (8), (9), (10), (11) du paragraphe précédent les quantités

$$a_{rs}, m_r, n_r, \lambda, \text{ et } \Delta$$

respectivement par

$$\alpha_{rs}, M_r, N_r, -\mu, \text{ et } \Delta'.$$

J'indiquerai par les *mêmes* lettres *accentuées* $\alpha', \beta', \gamma', D', P', Q', A', E', G', H'$, les résultats de cette substitution.

Nous aurons ainsi

$$(10) \quad S_1'' = S_1 + 2G'\mu - H'\mu^2$$

pour la réciproque de T'' ; et, en faisant $\mu = 1$,

$$(11) \quad S_1' = S_1 + 2G' - H'$$

pour la réciproque de T' .

114. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de déterminer les valeurs des quantités $\alpha', \beta', \gamma', P', Q'$.

Je vais indiquer la marche du calcul pour une de ces

quantités, α' par exemple. On a

$$\alpha' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & M_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & M_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & M_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & M_4 \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta \sqrt{2} \beta} \left\{ \beta \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \frac{d\gamma}{dn_1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \frac{d\gamma}{dn_2} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \frac{d\gamma}{dn_3} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \frac{d\gamma}{dn_4} \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & 0 \end{vmatrix} + (\Delta - \gamma + \delta) \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \frac{d\gamma}{dm_1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \frac{d\gamma}{dm_2} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \frac{d\gamma}{dm_3} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \frac{d\gamma}{md_4} \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & 0 \end{vmatrix} \right\} \quad (331)$$

en ayant égard à la définition (4) des M_r , N_r .

Remarquons maintenant que

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dn_r} = -(m_1 \alpha_{r1} + m_2 \alpha_{r2} + m_3 \alpha_{r3} + m_4 \alpha_{r4}), \\ \frac{d\gamma}{dm_r} = -(n_1 \alpha_{r1} + n_2 \alpha_{r2} + n_3 \alpha_{r3} + n_4 \alpha_{r4}). \end{cases}$$

Multiplions alors les quatre premières colonnes du déterminant, multiplicateur de β dans la

valeur de α' , respectivement par m_1, m_2, m_3, m_4 , et ajoutons à la cinquième; opérons de la même manière sur le multiplicateur de $(\Delta - \gamma + \delta)$, en multipliant par n_1, n_2, n_3, n_4 ; il viendra, eu égard aux relations qui précèdent,

$$\delta \sqrt{2\beta} \cdot \alpha' = \Delta' \left[\begin{array}{l} \beta(m_1 M_1 + m_2 M_2 + m_3 M_3 + m_4 M_4) \\ + (\Delta - \gamma + \delta)(n_1 M_1 + n_2 M_2 + n_3 M_3 + n_4 M_4) \end{array} \right].$$

En faisant intervenir les valeurs (4) des M_r, N , et, en se rappelant la signification des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, définies par les égalités (8), (9), (11) et (15) du paragraphe précédent, on trouve la première des relations suivantes (les autres s'obtiennent par des calculs tout à fait semblables) :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha' = \frac{\Delta^4}{\delta^2} (\Delta - \gamma + \delta), \\ \beta' = \frac{\Delta^4}{\delta^2} (\Delta - \gamma - \delta), \\ \gamma' = \frac{\Delta^4}{\delta^2} [\gamma (\Delta - \gamma) + \alpha \beta]; \end{array} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} P' = \frac{\Delta^3}{\delta \sqrt{2\beta}} [\beta M + (\Delta - \gamma + \delta) N], \\ Q' = \frac{\Delta^3}{\delta \sqrt{2\beta}} [\beta M + (\Delta - \gamma - \delta) N]. \end{array} \right.$$

Les quantités M et N ont, dans ces dernières relations, la signification établie par les équations (3) du § I.

115. Nous pouvons maintenant procéder à la détermination des réciproques S'_1, S''_1 , de T' et T'' .

Nous avons, en effet (11),

$$S_1 = S_1 + ? G' - H'.$$

D'un autre côté, nous avons entre G' , H' , . . . , les relations suivantes *similaires* avec les relations (11) et (12) du précédent paragraphe :

$$(14) \quad \begin{cases} \Delta' \cdot D' = \alpha' \beta' - \gamma'^2, \\ \Delta' \cdot G' = \gamma' S_1 - P' Q', \\ \Delta'^2 \cdot H' = \Delta' D' \cdot S_1 - (\beta' P'^2 - 2 \gamma' P' Q' + \alpha' Q'^2). \end{cases}$$

En substituant à G' , H' ces valeurs, nous concluons

$$(15) \quad \Delta'^2 \cdot S'_1 = [(\Delta' + \gamma')^2 - \alpha' \beta'] S_1 + [\beta' P'^2 - 2(\Delta' + \gamma') P' Q' + \alpha' Q'^2].$$

Enfin, si l'on a égard aux relations (7), (12) et (13), il vient définitivement

$$(16) \quad \frac{\partial^2}{\Delta^4} S'_1 = -(S + 2 MN).$$

116. Ainsi, en résumé, la réciproque S_1 de T (1) sera

$$(17) \quad S_1 = -\Delta^2 S;$$

et la réciproque S'_1 de T' (2) sera

$$(18) \quad S'_1 = -\frac{\Delta^4}{\delta^2} \cdot S'.$$

Dans ces relations, S représente le premier membre de l'équation générale (9) d'une surface du second degré; et S' est définie par l'égalité

$$(19) \quad S' = S + 2 MN.$$

117. Considérons actuellement le système des surfaces S''_1 (10), réciproques des surfaces T'' , savoir :

$$(20) \quad S''_1 = S_1 + 2 G' \mu - H' \mu^2.$$

On obtiendra l'enveloppe de ces surfaces, en éliminant

μ entre $S''_1 = 0$ et $\frac{dS''_1}{d\mu} = 0$; on trouve ainsi

$$G'^2 + H'S_1 = 0.$$

En remplaçant H' par sa valeur déduite de l'identité (11), et G' par sa valeur déduite de la seconde des équations (14); puis ayant égard aux relations (15) du § I, (7), (12), (13), (17) et (18) du § II, on trouve enfin, après quelques réductions, pour l'équation de l'enveloppe des surfaces S''_1 ,

$$(21) [2(\Delta - \gamma)S + \beta M^2 + 2(\Delta - \gamma)MN + \alpha N^2]^2 = 4\delta^2 SS'.$$

118. La forme de l'équation (21) nous montre que l'enveloppe des surfaces S''_1 touche les deux surfaces S et S' ; ce qui devait être.

Remarquons qu'en passant du système T, T', T'' , au système réciproque, les plans *correspondants* des points *communs* aux surfaces T et T' seront tangents *communs* aux surfaces réciproques S, S', S''_1 ; donc les réciproques S, S', S''_1 seront tangentes à l'enveloppe de ces plans. Or les surfaces T et T' se coupent suivant des courbes planes; par suite, les plans polaires, correspondant aux points de chaque courbe plane, passeront par un même point et formeront un cône. D'un autre côté, le système réciproque S''_1 est toujours tangent à la surface (21), et comme il est tangent aux cônes enveloppés par les plans polaires, il en résulte que l'équation (21) est l'équation *des cônes circonscrits aux deux surfaces S et S'* ; car l'intersection de deux surfaces S''_1 , infiniment voisines, lesquelles sont toujours tangentes à ces cônes, doit se trouver en même temps et sur les cônes et sur l'enveloppe.

119. Dégageant tous ces résultats de calcul, nous pourrions nous résumer ainsi :

Si l'on a deux surfaces du second degré se coupant suivant des courbes planes,

$$(I) \quad \begin{cases} S = \sum a_{rs} x_r x_s = 0, \\ S' = S + 2MN = 0, \end{cases}$$

où

$$(II) \quad \begin{cases} M = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4, \\ N = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4, \end{cases}$$

L'équation du couple des cônes circonscrits à ces deux surfaces sera

$$(III) \quad [2(\Delta - \gamma)S + \beta M^2 + 2(\Delta - \gamma)MN + \alpha N^2]^2 = 4\delta^2 SS'.$$

Dans cette dernière équation, Δ désigne le discriminant de la fonction S , et on a posé, en outre,

$$(IV) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} \\ \beta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} \\ \gamma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \delta^2 = (\Delta - \gamma)^2 - \alpha\beta.$$

120. La forme de l'équation (III) nous montre que les deux cônes sont effectivement tangents aux surfaces S et S' ; et nous voyons de plus que les quatre courbes de contact sont sur la surface du second degré

$$(V) \quad \Phi = 2(\Delta - \gamma)S + \beta M^2 + 2(\Delta - \gamma)MN + \alpha N^2.$$

Cette surface Φ coupe aussi les deux surfaces S et S'

suivant deux courbes planes,

$$\left. \begin{array}{l} \text{la surface } S, \text{ suivant les plans} \\ \left\{ \begin{array}{l} \beta M + (\Delta - \gamma + \delta) N = 0 \quad (1) \\ \beta M + (\Delta - \gamma - \delta) N = 0 \quad (3) \end{array} \right\} \\ \text{la surface } S', \text{ suivant les plans} \\ \left\{ \begin{array}{l} \beta M - (\Delta - \gamma - \delta) N = 0 \quad (2) \\ \beta M - (\Delta - \gamma + \delta) N = 0 \quad (4) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \text{plans I.}$$

Les quatre plans (1), (2), (3), (4), qui se coupent suivant la droite (M, N), forment un *faisceau harmonique*.

121. En remplaçant dans l'équation (III) S' par sa valeur identique $S + 2MN$, on parvient aisément à la mettre sous la forme :

$$[2\alpha\beta S + \beta(\Delta - \gamma)M^2 + 2\alpha\beta MN + \alpha(\Delta - \gamma)N^2]^2 = \delta^2(\beta M^2 - \alpha N^2)^2,$$

et nous arrivons ainsi à séparer les équations des deux cônes.

Les équations des deux cônes C et C' circonscrits aux deux surfaces S et S' seront donc

$$(VI) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = 2\alpha\beta S + \beta(\Delta - \gamma + \delta)M^2 + 2\alpha\beta MN \\ \quad + \alpha(\Delta - \gamma - \delta)N^2 = 0, \\ C' = 2\alpha\beta S + \beta(\Delta - \gamma - \delta)M^2 + 2\alpha\beta MN \\ \quad + \alpha(\Delta - \gamma + \delta)N^2 = 0. \end{array} \right.$$

On constate tout de suite que ces deux cônes se coupent eux-mêmes suivant deux courbes planes, dont les plans ont pour équations

$$(VII) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\beta} M + \sqrt{\alpha} N = 0, \\ \sqrt{\beta} M - \sqrt{\alpha} N = 0. \end{array} \right.$$

Ces deux plans, conjointement avec les deux plans M et N, forment encore un *faisceau harmonique*.

122. Les équations (VI) des deux cônes peuvent s'écrire :

$$(VIII) \quad \begin{cases} C = 2\alpha\beta S + \frac{\beta}{\Delta - \gamma + \delta} [(\Delta - \gamma + \delta)M + \alpha N]^2, \\ C' = 2\alpha\beta S + \frac{\beta}{\Delta - \gamma - \delta} [(\Delta - \gamma - \delta)M + \alpha N]^2, \end{cases}$$

ou bien encore, en remplaçant S par $(S' - 2MN)$,

$$(IX) \quad \begin{cases} C = 2\alpha\beta S' + \frac{\beta}{\Delta - \gamma + \delta} [(\Delta - \gamma + \delta)M - \alpha N]^2, \\ C' = 2\alpha\beta S' + \frac{\beta}{\Delta - \gamma - \delta} [(\Delta - \gamma - \delta)M - \alpha N]^2. \end{cases}$$

On vérifie alors que les cônes C et C' sont tangents aux deux surfaces S et S', et l'on voit en outre que

les plans de contact du cône C sont : $\begin{cases} \text{avec S,} & (\Delta - \gamma + \delta)M + \alpha N = 0, \\ \text{avec S',} & (\Delta - \gamma + \delta)M - \alpha N = 0; \end{cases}$

les plans de contact du cône C' sont : $\begin{cases} \text{avec S,} & (\Delta - \gamma - \delta)M + \alpha N = 0, \\ \text{avec S',} & (\Delta - \gamma - \delta)M - \alpha N = 0. \end{cases}$

Remarquons que ces derniers plans, eu égard à la relation (IV), coïncident avec les plans I.

Nous avons ainsi ce théorème remarquable :

La surface Φ (V) contient les quatre courbes de contact des cônes C et C' avec les surfaces S et S'; et, de plus, ce sont les courbes suivant lesquelles elle coupe les deux surfaces S et S'.

123. Enfin par la droite (M, N) passent les deux *fais-*

ceaux harmoniques,

$$\text{I}^{\circ} \left. \begin{array}{l} \text{des plans suivant lesquels se} \\ \text{coupent les deux surfaces S} \\ \text{et S', et les deux cônes C et C':} \end{array} \right\} \begin{array}{l} M = 0, \\ M\sqrt{\beta} - N\sqrt{\alpha} = 0, \\ N = 0, \\ M\sqrt{\beta} + N\sqrt{\alpha} = 0; \end{array}$$

$$\text{II}^{\circ} \left. \begin{array}{l} \text{des plans des courbes de con-} \\ \text{tact des deux cônes, lesquelles} \\ \text{sont aussi les intersections de} \\ \text{surface } \Phi \text{ avec les surfaces S} \\ \text{et S' :} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \beta M + (\Delta - \gamma + \delta) N = 0, \\ \beta M - (\Delta - \gamma - \delta) N = 0, \\ \beta M + (\Delta - \gamma - \delta) N = 0, \\ \beta M - (\Delta - \gamma + \delta) N = 0. \end{array}$$

124. La discussion et l'interprétation des cas particuliers où l'on aurait $\alpha = 0$, ou $\beta = 0$, etc., ne saurait présenter de difficultés; je ne m'y arrêterai pas.

§ III. — Équation générale des surfaces réglées circonscrites à deux surfaces du second degré.

125. Considérons la surface du second degré

$$(1) \quad \varphi = \sum a_{rs} x_r x_s = 0,$$

et la droite D,

$$(2) \quad \begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = 0. \end{cases}$$

Pour que cette droite soit tangente à la surface φ , il

faut et il suffit (chap. II, § I, n° 36) que

$$(3) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on multiplie les quatre premières lignes de ce déterminant par x_1, x_2, x_3, x_4 , et qu'on ajoute les trois premières à la quatrième, en ayant égard aux relations (2); puis qu'on opère de la même manière sur les quatre premières colonnes du déterminant ainsi obtenu, l'équation (3) sera transformée en la suivante :

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{d\varphi}{dx_1} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{d\varphi}{dx_2} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \frac{d\varphi}{dx_3} & m_3 & n_3 \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & \varphi & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Or, si maintenant on pose

$$\begin{cases} m_3 n_2 - m_2 n_3 = \lambda_1, \\ m_1 n_2 - m_2 n_1 = \lambda_2, \\ m_2 n_1 - m_1 n_2 = \lambda_3, \end{cases}$$

puis

$$(5) \quad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & 4\varphi \end{vmatrix}$$

et qu'on développe l'équation (4), on obtient définitivement

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 \frac{d^2 \mathbf{R}}{da_{22} da_{33}} + \lambda_2^2 \frac{d^2 \mathbf{R}}{da_{33} da_{11}} + \lambda_3^2 \frac{d^2 \mathbf{R}}{da_{11} da_{22}} \\ - 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{d^2 \mathbf{R}}{da_{12} da_{33}} - 2\lambda_1 \lambda_3 \frac{d^2 \mathbf{R}}{da_{13} da_{22}} - 2\lambda_2 \lambda_3 \frac{d^2 \mathbf{R}}{da_{23} da_{11}} \end{array} \right\} = 0.$$

C'est l'équation que doivent vérifier les coordonnées d'un point quelconque de toute droite tangente à la surface φ .

126. Si nous imaginons une seconde surface

$$(7) \quad \psi = \sum b_{rs} x_r x_s = 0,$$

et que la droite D soit aussi tangente à cette surface, les coordonnées d'un quelconque de ses points devront encore vérifier l'équation

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 \frac{d^2 \mathbf{S}}{db_{22} db_{33}} + \lambda_2^2 \frac{d^2 \mathbf{S}}{db_{33} db_{11}} + \lambda_3^2 \frac{d^2 \mathbf{S}}{db_{11} db_{22}} \\ - 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{d^2 \mathbf{S}}{db_{12} db_{33}} - 2\lambda_1 \lambda_3 \frac{d^2 \mathbf{S}}{db_{13} db_{22}} - 2\lambda_2 \lambda_3 \frac{d^2 \mathbf{S}}{db_{23} db_{11}} \end{array} \right\} = 0.$$

Dans cette dernière équation, on a représenté par S le

déterminant

$$(9) \quad S = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \frac{d\psi}{dx_1} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \frac{d\psi}{dx_2} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \frac{d\psi}{dx_3} \\ \frac{d\psi}{dx_1} & \frac{d\psi}{dx_2} & \frac{d\psi}{dx_3} & 4\psi \end{vmatrix}$$

127. Si, entre les deux équations (6) et (8), on élimine λ_1 , et qu'on désigne par la lettre λ le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$, on aura, pour l'équation générale des surfaces réglées circonscrites aux deux surfaces φ et ψ , une équation de la forme

$$T^2 = 4UV,$$

dans laquelle

$$\begin{cases} U = A\lambda + B, \\ T = A'\lambda^2 + 2B'\lambda + C', \\ V = A''\lambda^3 + B''\lambda^2 + C''\lambda + D'', \end{cases}$$

λ représentant une constante indéterminée, et les lettres $A, B, A', B', C', A'', B'', C'', D''$ des fonctions homogènes du quatrième degré des coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point quelconque de la surface réglée.

Il serait facile, en adoptant la même marche, de former l'équation de la surface réglée circonscrite à trois surfaces du second degré.