

CUENOUD

Solution de la question 574

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 314-319

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__314_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

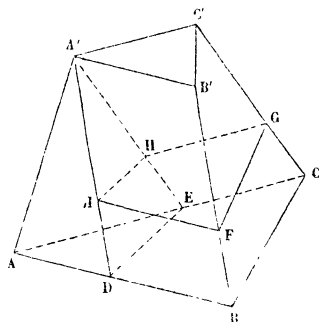
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 574

(voir page 113) ;

PAR M. CUENOUD, DE LAUSANNE.

(L'énoncé renferme une faute d'impression dans la



phrase : « paraboloïde décrit par la droite B'C se mouvant, etc. ; » il faut lire B'C'.)

Je pose

$$\begin{aligned} AB &= c, & A'B' &= c', & AC &= b, & A'C' &= b', \\ \text{Angle } BAC &= A. \end{aligned}$$

Il faut démontrer que l'on a

$$\text{vol. du pentaèdre} \left\{ = \frac{1}{6} h \sin A \left[c \left(b + \frac{1}{2} b' \right) + c' \left(b' + \frac{1}{2} b \right) \right] \right\}.$$

Les arêtes AB et A'B' sont évidemment parallèles, ainsi que AC et A'C', en sorte que l'angle B'A'C' — BAC = A.

Je mène le plan A'DE parallèle aux deux directrices BB' et CC' du paraboloïde. Il coupe les faces ABB'A' et ACC'A' suivant les droites A'D et A'E respectivement parallèles à BB' et CC'. Ce plan décompose le pentaèdre en deux parties, la pyramide triangulaire A'DE et l'hexaèdre A'DEBCB'C'. J'évalue séparément les volumes de ces deux parties.

$$\text{vol. pyramide A'DE} = \frac{1}{3} h. \text{ surf ADE},$$

$$\text{Surf ADE} = \frac{1}{2} \text{AD. AE. sin A} = \frac{1}{2} (c - c') (b - b') \sin A,$$

d'où

$$(1) \quad \text{vol. pyramide AA'DE} = \frac{1}{6} h. \sin A (b - b') (c - c').$$

Pour calculer le volume de l'hexaèdre, je partage la hauteur h en un grand nombre de parties égales et je mène par chaque point de division un plan parallèle aux bases ABC, A'B'C', plan qui coupe le paraboloïde suivant l'une de ses génératrices rectilignes, telle que FG, et l'hexaèdre suivant un quadrilatère tel que IFGH. En construisant sur chacune de ces sections un prisme limité à la section suivante, on aura

$$\text{vol. de l'hexaèdre} = \lim. \text{ somme des prismes},$$

le nombre des parties en lesquelles on divise la hauteur devenant infiniment grand.

Je désigne par θh l'une des parties de la hauteur, par n le nombre de ces parties et par a_p l'aire de la section IFGH qui passe par le $p^{\text{ième}}$ point de division de la hauteur à partir de la base supérieure.

J'ai

$$2 a_p = IF \cdot GH \sin (IF \cdot GH) + IF \cdot IH \sin (IF \cdot IH) \\ + IH \cdot HG \sin (IH \cdot HG).$$

Or

$$IF = c', \quad GH = b', \\ \sin (IF \cdot GH) = \sin A, \\ \sin (IF \cdot IH) = \sin BDE, \\ \sin (IH \cdot HG) = \sin DEC,$$

d'où

$$2 a_p = b' c' \sin A + IH (c' \sin BDE + b' \sin DEC).$$

Les triangles semblables A'IH, A'DE donnent

$$\frac{IH}{DE} = \frac{A'I}{A'D} = \frac{p}{n},$$

d'où

$$IH = p \cdot \frac{DE}{n},$$

et conséquemment

$$2 a_p = b' c' \sin A + p \cdot \frac{DE}{n} (c' \sin BDE + b' \sin DEC).$$

Le triangle ADE donne

$$\frac{AE}{DE} = \frac{\sin BDE}{\sin A}$$

et

$$\frac{AD}{DE} = \frac{\sin DEC}{\sin A},$$

d'où

$$DE \sin DEC = AD \sin A$$

et

$$DE \sin BDE = AE \sin A,$$

ou

$$DE \sin DEC = (c - c') \sin A$$

et

$$DE \cdot \sin BDE = (b - b') \sin A.$$

Ces valeurs étant introduites dans la valeur de a_p donnent

$$2a_p = b'c' \sin A + \frac{P}{n} [c'(b - b') \sin A + b'(c - c') \sin A]$$

ou

$$2a_p = \sin A \left\{ b'c' + \frac{P}{n} [c'(b - b') + b'(c - c')] \right\}.$$

Le volume du prisme très-mince qui a pour base a_p et pour hauteur θh est

$$\frac{1}{2} \theta h \cdot \sin A \left\{ b'c' + \frac{P}{n} [c'(b - b') + b'(c - c')] \right\}.$$

En faisant varier p dans cette expression de 1 à n et faisant la somme des résultats obtenus, j'obtiens

$$\begin{aligned} \text{somme des prismes} &= \frac{1}{2} \theta h \cdot \sin A \left\{ n \cdot b'c' + \frac{n(n+1)}{2 \cdot n} \right. \\ &\quad \times [c'(b - b') + b'(c - c')] \left. \right\} \\ &= \frac{1}{2} n \cdot \theta h \cdot \sin A \left\{ b'c' + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right. \\ &\quad \times [c'(b - b') + b'(c - c')] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Remplaçant $n \cdot \theta h$ par h et passant à la limite, je trouve :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{vol. de} \\ \text{l'hexaèdre} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} h \sin A \left[b' + \frac{1}{2} (bc' - b'c' + b'c - b'c') \right] \\ = \frac{1}{4} h \cdot \sin A (bc' + b'c).$$

Je fais la somme des volumes (1) et (2) et je trouve

$$\begin{aligned}
 \text{vol. du pentaèdre} \left\{ \right. &= h \sin A \left[\frac{1}{6}(b - b')(c - c') + \frac{1}{4}(bc' + b'c) \right] \\
 &= \frac{1}{6} h \sin A \left(bc + b'c' + \frac{1}{2}bc' + \frac{1}{2}b'c \right) \\
 &= \frac{1}{6} h \sin A \left[c \left(b + \frac{1}{2}b' \right) + c' \left(b' + \frac{1}{2}b \right) \right].
 \end{aligned}$$

Le résultat précédent pourrait aussi se mettre sous la forme

$$\frac{1}{6} h \sin A \left[b \left(c + \frac{1}{2}c' \right) + b' \left(c' + \frac{1}{2}c \right) \right].$$

La question 5 du *Mathematical Monthly* me paraît inexacte. En effet, si je calcule le coefficient angulaire de la tangente pour chacune des courbes, ellipse et trajectoire, j'obtiens

$$\text{pour l'ellipse. } \frac{dy}{dx} = - \frac{ax}{by},$$

$$\text{pour la trajectoire. . . } \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{cxy}.$$

Désignant par V l'angle des deux tangentes en l'un des points communs aux deux courbes, j'ai

$$\tan V = \frac{-\frac{ax}{by} + \frac{1}{cxy}}{1 + \frac{ax}{bcxy^2}} = \frac{by - acx^2y}{ax + bcxy^2} = \frac{y}{x} \times \frac{b - acx^2}{a + bcy^2}.$$

(319)

Je remplace $b\gamma^2$ par $1 - ax^2$, et je trouve

$$\text{tang V} = \frac{\gamma (b - acx^2)}{x.(a + c - acx^2)} = \frac{\gamma}{x} \times \frac{b - acx^2}{b + 2c - acx^2},$$

résultat qui n'est pas égal à $\frac{x}{\gamma}$.

On pourrait obtenir un énoncé analogue à celui reproduit dans les *Annales* en changeant l'équation

$$x = Ce^{-\frac{cy^2}{2}}$$

contre

$$x = Ce^{\frac{cy^4}{2}}$$

et en remplaçant les mots « dont la tangente est $\frac{\gamma}{x}$ » par

« dont la tangente est $-\frac{\gamma}{x}$ » .