Mention

Solution de la question 584

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 302-303

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__302_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 584

(voir p. 140);

Par M. MENTION,

Professeur

En admettant la notion du *cercle focal*, le théorème 584 de M. Faure se démontre instantanément.

Je rappellerai d'abord que la distance du point de concours de deux tangentes à une conique aux quatre rayons vecteurs de contact est le *rayon focal* (*). La surface d'un triangle circonscrit s'exprime par $\frac{kk'k''}{p}$ (p para-

(*) *Voir* t XVII, p 322.

mètre, k, k', k'' les rayons focaux correspondants aux trois sommets).

Il s'agit de prouver que

$$8s = \left(-\frac{a}{\alpha\frac{1}{3}} + \frac{b}{\beta\frac{1}{3}} + \frac{c}{\gamma\frac{1}{3}}\right)\cdots$$

Or

$$\frac{1}{\alpha\frac{1}{3}} = \frac{\cos i}{p\frac{1}{3}}, \quad \frac{1}{\beta\frac{1}{3}} = \frac{\cos i'}{p\frac{1}{3}}, \quad \frac{1}{\gamma\frac{1}{3}} = \frac{\cos i''}{p\frac{1}{3}},$$

i, i', i'' étant les angles des normales relatives aux points de contact avec les rayons vecteurs.

Maintenant il est clair que

$$a = \frac{k' + k''}{\cos i}, \quad b = \frac{k + k''}{\cos i'}, \quad c = \frac{k + k'}{\cos i''}.$$

Donc

$$\frac{b}{\beta\frac{1}{3}} + \frac{c}{\gamma\frac{1}{3}} - \frac{a}{\alpha\frac{1}{3}} = 2k, \ldots,$$

ainsi l'on retombe sur

$$S = \frac{kk'k''}{p}.$$

Je ne vois pas comment, en dehors du procédé de relations métriques qui a manifestement conduit l'auteur à ce théorème, on éviterait d'inextricables calculs, sans le cercle focal.