Nouvelles annales de mathématiques

Jaufroid

Blanché-Arrault

Solution de la question 582

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 294-295

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__294_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 582

(voir p. 139);

PAR M. JAUFROID,

ET M. M. BLANCHÉ-ARRAULT,
Elève du lycée Louis-le-Grand.

Soit V un des foyers d'une hyperbole équilatère quelconque tangente à une ellipse donnée et concentrique avec elle. En supposant que le point de contact de ces deux courbes varie, le rectangle FV.F′V, F, F′ étant les foyers de l'ellipse, conservera une valeur constante.

Solution.

$$2xy = x'^2,$$

équation de l'hyperbole, ses asymptotes étant prises pour axes, $x' = y'$ étant les coordonnées du foyer situé dans la première région.

$$\left.\begin{array}{r} a^2\cos^2\alpha \\ +\, b^2\sin^2\alpha \end{array}\right| y^2 + 2c^2\sin\alpha\cos\alpha\, xy \left. +\begin{array}{r} a^2\sin^2\alpha \\ +\, b^2\cos^2\alpha \end{array}\right| x^2 - a^2b^2 = 0,$$

équation de l'ellipse donnée, ses demi-axes étant a et b, l'asymptote axe des x faisant un angle α avec son grand axe : les coordonnées de ses foyers sont

$$\left.\begin{array}{l} x = \quad c\cos\alpha \\ y = -\, c\sin\alpha \end{array}\right\} \text{pour F,}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -\, c\cos\alpha \\ y = \quad c\sin\alpha \end{array}\right\} \text{pour F}'.$$

La condition de tangence des deux courbes conduit à

$$(1) \qquad 4x'^4 + 8c^2 \sin\alpha\cos\alpha\, x'^2 - 4a^2b^2 = 0,$$

ce qui détermine les foyers de l'hyperbole, et on a

$$\overline{\mathrm{FV}}^2\, \overline{\mathrm{F'V}}^2 = 4x'^4 + 8c^2\sin\alpha\cos\alpha\, x'^2 + c^4 = c^4 + 4a^2b^2,$$

en vertu de l'équation (1). C. Q. F. D.