Nouvelles annales de mathématiques

C. Kessler

Solution de la question 570

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 289-291

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__289_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 570

(voir p. 111);

PAR M. C. KESSLER,
Elève du lycée Saint-Louis.

Deux ellipses homofocales sont l'une inscrite à un triangle et l'autre circonscrite au même triangle; on a la relation suivante entre les demi grands axes et l'excentricité

$$\alpha^8 - 4\alpha^6 a^2 + 6\alpha^4 a^2 c^2 - 4\alpha^2 a^2 c^4 + a^4 c^4 = 0.$$

(MENTION.)

Cette relation ne me semble pas exacte.

On sait que lorsque deux coniques jouissent de la propriété qu'un triangle inscrit à l'une est en même temps circonscrit à l'autre, il existe une infinité d'autres triangles inscrits à la première conique et circonscrits à la seconde, proposition qui du reste s'applique à tout polygone (Poncelet).

Si donc je cherche la condition pour que les coniques soient telles, qu'un triangle inscrit ABC à l'une ayant un de ses sommets à l'extrémité A du grand axe $2a$ de l'ellipse extérieur, soit en même temps circonscrit à l'autre conique, j'exprimerai évidemment en même temps que les deux coniques jouissent de la même propriété pour une infinité d'autres triangles.

Si M $(x'y')$, point de l'ellipse intérieure de grand axe $2a$, est le point de contact de la tangente AB, le coefficient angulaire de cette droite est $-\frac{(\alpha^3 - c^2)x'}{\alpha^2 y'}$. Or

$$x' = \frac{\alpha^2}{a},$$

$$y' = \frac{1}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - c^2)\left(\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\sqrt{(\alpha^2 - c^2)(a^2 - \alpha^2)}.$$

Du reste

$$AQ = (a + \alpha), \quad BQ = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2};$$

Q est le point de contact du côté BC du triangle avec l'ellipse intérieure.

Le triangle rectangle ABQ qui donne

$$\overline{BQ}^2 = \overline{AQ}^2 \operatorname{tang}^2 BAQ,$$

fournira donc la relation

$$\frac{(a^2 - c^2)}{a^2}(a^2 - \alpha^2) = (a + \alpha)^2 \frac{(\alpha^2 - c^2)\frac{\alpha^4}{a^2}}{\frac{\alpha_4}{a^2}(x^2 - c^2)(a^2 - \alpha^2)},$$

$$\frac{(a^2 - c^2)(a^2 - \alpha^2)}{a^2} = \frac{(a + \alpha)^2(\alpha^2 - c^2)}{(a^2 - \alpha^2)},$$

$$(a^2 - c^2)(a - \alpha)^2 = \alpha^2(\alpha^2 - c^2),$$

relation du second degré essentiellement différente de celle qui est proposée; elle s'écrit encore

$$\alpha^2 c^2 + 2a\alpha(a^2 - c^2) - a^4 = 0.$$