NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Solution géométrique des questions 494 et 499

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 26-30

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__26_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DES QUESTIONS 494 ET 499

(voir t. XVIII, p. 444, et t. XIX, p. 43);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Lemme. Soient C une conique; O l'un de ses points; S, S' les sommets de deux faisceaux de droites homographiques situées dans le plan de cette courbe. Si deux droites pivotantes Om, Sm sont assujetties à se couper continuellement en m sur la circonférence de la conique, la droite $S'p$, homologue de Sm, coupera Om en un point variable p, dont le lieu V est une courbe du troisième ordre douée d'un point double en O. (Newton a énoncé un théorème à peu près identique dans son énumération des courbes du troisième ordre.)

Pour démontrer ce lemme, cherchons combien la courbe V possède de points sur une droite quelconque L.

A chaque rayon Sm il correspond, dans le faisceau homographique, un rayon $S'p$, et un seul, et il lui correspond en même temps les deux rayons Om, Om' qui joignent le point O aux deux points d'intersection m, m' de la droite Sm avec la conique. Réciproquement à chacun des deux rayons Om, Om', il ne correspond qu'un seul rayon Sm, et par conséquent aussi qu'un seul rayon $S'p$.

Donc, en vertu du *principe de correspondance anharmonique* de M. Chasles, les angles mOm' interceptent sur L des segments en involution qui correspondent anharmoniquement aux points d'intersection de cette droite par les rayons Sp, et par conséquent il existe sur L trois points de coïncidence de l'un de ces points avec l'une des extrémités du segment correspondant. Ces trois points (dont deux peuvent d'ailleurs être imaginaires) sont évidemment les seuls points de L qui appartiennent à la courbe V. Donc cette courbe est du troisième ordre.

En supposant que la transversale L soit menée par le point O, on voit immédiatement que ce point est un point double.

Je passe maintenant à la démonstration du théorème qui fait le sujet de la question 499.

Ce théorème, rectifié dans son énoncé par M. Cremona, t. XIX, p. 356, est ainsi conçu :

Si les côtés ab, bc, cd, da *et la diagonale* bd *d'un quadrilatère plan variable* abcd *tournent autour de cinq points fixes* o, p, q, r, s, *les sommets* a *et* c, *qui sont au dehors de la diagonale glissant sur deux droites fixes* M *et* N, *chacun des autres sommets* b, d *décrira une cubique.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme précédent, sans qu'il soit nécessaire de recourir à la théorie ingénieuse, mais peu connue, de M. Grassman.

En effet, démontrons que le point b, par exemple, décrit une courbe qui ne rencontre qu'en trois points une droite quelconque L.

Soit mené arbitrairement un premier côté ab' qui coupe L au point b' et M en a; la direction ra du quatrième côté du quatrilatère est déterminée. Joignons sb' qui coupe ra en d; puis qd qui coupe N en c, et enfin pc qui coupe oa en b'' et $sb'd$ en b.

Si le point b', pris arbitrairement sur L, appartenait à la courbe cherchée V, les trois points b, b', b'' coïncideraient, ce qui n'a pas lieu en général. Supposons qu'on fasse varier la direction de oa; on aura une série de points a sur M et une série homographique de points b' sur L. Donc les deux faisceaux de droites $sb'd$ et rda qui pivotent respectivement autour des points s et r, sont homographiques, et le point d'intersection de leurs rayons homologues, c'est-à-dire le point d, subordonné comme il l'est au mouvement de b' sur L, décrit une conique qui passe par les poins fixes s et r.

Les droites pivotantes sd, qd sont donc assujetties, comme dans le lemme, à se couper continuellement sur une conique qui passe par l'un s de leurs pivots. D'ailleurs la série des droites pc, menées du point fixe p aux points d'intersection c de N par les droites qd, est homographique à celle de ces droites qd.

Donc, en vertu du lemme, il existe sur L trois points tels, que le point b y coïncide avec le point b'. Donc enfin la courbe V, qui décrit le point b dans la déformation systématique du quadrilatère, est du troisième ordre.

On démontrerait pareillement que le sommet opposé d décrit en même temps une autre courbe du troisième ordre.

Chacune de ces cubiques est de forme générale, c'est-à-dire n'a pas de point double. Car si le point β, par exemple, était un point double de la courbe V, ce point résulterait de deux manières distinctes de la construction ci-dessus indiquée, ce qui est impossible; car, dès que le sommet β du quadrilatère est donné, la figure est déterminée et unique.

Il suffit d'un peu d'attention pour voir que la courbe V passe par les neuf points

o, p, s, MN, $(pq)(or)$, qsN, rsM, pqM, orN (*).

Dans les six derniers cas, le quadrilatère se réduit à un triangle ou à un simple segment terminé.

Le théorème qui fait le sujet de la question 494 est ainsi conçu :

Soient ABC, abc *deux triangles dans le même plan;* q *un point variable tel, que les droites* qa, qb, qc *coupent respectivement les cotés* BC, AC, AB *en trois points qui sont en ligne droite; le lieu du point* q *est une ligne du troisième ordre.*

Ce théorème se démontre d'une manière analogue au précédent.

Cherchons combien le lieu cherché a de points sur

(*) Notation Grassman. Tm.

une droite quelconque L. Soit q un point de cette droite; menons qa, qb qui coupent respectivement BC et CA en α et β; la droite $\alpha\beta$ coupe AB en γ, et la droite $c\gamma$ coupe L en un point q' qui coïnciderait avec q, si ce point q appartenait à la courbe V.

Faisons mouvoir le point q sur L, afin de découvrir combien de fois cette coïncidence a lieu. Les points α, β marquent alors sur BC et CA respectivement deux divisions homographiques, et la droite $\alpha\beta$ enveloppe une conique. Or de chaque point γ de AB on peut mener deux tangentes à cette conique, et chacune de ces tangentes donne lieu sur BC et AC respectivement à deux nouveaux points α', β', tels, que les droites $a\alpha'$, $b\beta'$ se coupent sur L en un point q''. Ainsi à chaque point γ, et par conséquent à chaque point q' de L, il correspond sur cette droite deux points q, q'', et réciproquement à chacun de ces groupes de deux points q, q'', il ne correspond qu'un seul point q'.

Donc, en vertu du principe de correspondance anharmonique, les segments qq'' sont en involution et correspondent anharmoniquement aux points q'. Donc enfin il existe trois positions où le point q' coïncide avec l'une des extrémités du segment correspondant qq''; ce qui prouve que la courbure V a trois points sur L, c'est-à-dire est du troisième ordre.

Etc.

La question 395 (t. XVI, p. 312) est traitée assez longuement dans mes *Mélanges de Géométrie*, p. 68 et suiv. On transforme ainsi les propriétés relatives à deux cercles en des propriétés d'un énoncé très-différent concernant des coniques biconfocales.

Le théorème Faure (question 458, t. XVI, p. 58) n'est que le théorème du n° 733 de la *Géométrie supérieure*, transformé par cette méthode.