KESSLER

Solutions des questions 572 et 575

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 266-271

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__266_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS 572 ET 575

(voir p. 112 et 113);

PAR M. KESSLER,
Élève du lycée Saint-Louis.

Question 572.

Sommer

$$4\left(\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{9.10.11}+\frac{1}{13.14.15}+\ldots\right)$$

(EULER.)

La fraction

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$$

peut représenter un terme quelconque de la série entre parenthèses.

Il faut donc trouver

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}.$$

Décomposons la fraction sous le signe en d'autres fractions rationnelles, par le procédé connu; cette fraction est égale à

$$\frac{1}{8}\frac{4}{4n+1}-\frac{1}{4}\frac{4}{4n+2}+\frac{1}{8}\frac{4}{4n+3}.$$

Or la fonction primitive de cette somme sera précisément la somme cherchée, car c'est la limite vers laquelle tend la somme de rectangles s'approchant indéfiniment de l'aire de la courbe

$$y = \frac{1}{8}\frac{4}{4x+1} - \frac{1}{4}\frac{4}{4x+2} + \frac{1}{8}\frac{4}{4x+3}.$$

Cette somme est donc

$$\frac{1}{8}\,l(4n+1) - \frac{1}{4}\,l(4x+2) + \frac{1}{8}\,l(4n+3) + \text{const.}$$

et l'aire est nulle pour $n = 0$, donc

$$\text{const.} = -\frac{1}{8}\,l\,\frac{3}{4};$$

et par suite

$$\sum = \frac{1}{8}\,l\,\frac{4(4n+1)(4n+3)}{3(4n+2)^2}$$

et la limite pour $n = \infty$ est $\frac{1}{8}\,l\,\frac{4}{3}$, l représentant un logarithme népérien ; donc

$$\frac{1}{2}\,l\,\frac{4}{3} = 4\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \ldots\right).$$

On trouverait, de la même façon, la série

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{11.12.13} + \ldots,$$

dans laquelle le terme général peut être représenté par

$$\frac{1}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)}$$

et en général la série

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{m(m+1)(m+2)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
$$+ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \ldots,$$

dans laquelle

$$n - m - 2 = k - n - 2 \quad \text{ou} \quad n - m = k - n.$$

Le dénominateur pourrait renfermer autant de termes qu'on voudrait, et même les nombres qui s'y trouvent pourraient ne pas être consécutifs, pourvu que leur différence fût constante. Ainsi, par exemple, on trouverait facilement la somme de

$$\frac{1}{1.3.5.7.9} + \frac{1}{12.14.16.18.20} + \frac{1}{23.25.27.29.31} + \ldots,$$

dans laquelle le terme constant est

$$\frac{1}{(11n+1)(11n+2)(11n+3)(11n+4)(11n+5)}$$

et ainsi de suite.

Question 575.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$lx + my + nz = 0,$$

les équations d'une ellipse dans l'espace; les axes principaux de cette ellipse sont les racines de l'équation

$$\frac{l^2 a^2}{z^2 - a^2} + \frac{l^2 b^2}{z^2 - b^2} + \frac{l^2 c^2}{z^2 - c^2} = 0.$$

(Sedley Taylor.)

Dans l'ellipsoïde proposé, je mène le diamètre conjugué du plan

$$lx + my + nz = 0;$$

les deux axes de l'ellipse en question de ce diamètre formeront un système de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Or on sait que la somme des carrés de ces diamètres est constante; le volume du parallélipipède dont ils sont les arêtes est aussi constant.

Soit ρ la demi-longueur du diamètre auxiliaire conjugué au plan; les équations de ce diamètre sont, comme il est facile de le voir,

$$\frac{x}{a^2 l} = \frac{y}{b^2 m} = \frac{z}{c^2 n} = \frac{\rho}{\sqrt{a^4 l^2 + b^4 m^2 + c^4 n^2}};$$

d'où, combinant avec l'équation de l'ellipsoïde,

$$\rho^2 = \frac{a^4 l^2 + b^4 m^2 + c^4 n^2}{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}.$$

Si α et β désignent les longueurs cherchées, le volume du parallélipipède sera

$$\mathrm{V} = \alpha\beta\rho \sin\theta$$

(θ étant l'angle du diamètre auxiliaire). Or

$$\sin\theta = \frac{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(a^4 l^2 + b^4 m^2 + c^4 n^2)}};$$

donc

$$\mathrm{V} = \alpha\beta \sqrt{\frac{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}{l^2 + m^2 + n^2}} = abc;$$

α et β seront donc les racines de l'équation

$$z^4 - \left(a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^4 l^2 + b^4 m^2 + c^4 n^2}{a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2}\right) z^2$$

$$+ \frac{(l^2 + m^2 + n^2)\, a^2 b^2 c^2}{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2} = 0$$

ou

$$z^4 - \left[\frac{a^2 l^2 (b^2 + c^2) + m^2 b^2 (a^2 + c^2) + n^2 c^2 (a^2 + b^2)}{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}\right] z^2$$
$$- \frac{(l^2 + m^2 + n^2) a^2 b^2 c^2}{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2} = 0,$$

$$a^2 l^2 [z^4 - (b^2 + c^2) z^2 + b^2 c^2] + b^2 m^2 [z^4 - (a^2 + c^2) z^2 + a^2 c^2]$$
$$+ c^2 n^2 [z^4 - (a^2 + b^2) z^2 + a^2 b^2] = 0,$$

$$a^2 l^2 (z^2 - b^2)(z^2 - c^2) + b^2 m^2 (z^2 - a^2)(z^2 - c^2)$$
$$+ c^2 n^2 (z^2 - a^2)(z^2 - b^2) = 0,$$

$$\frac{a^2 l^2}{z^2 - a^2} + \frac{b^2 m^2}{z^2 - b^2} + \frac{c^2 n^2}{z^2 - c^2} = 0.$$

C. Q. F. D.

Quant aux directions des axes, elles pourront être déterminées par les six équations

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$
$$l\alpha' + n\beta' + m\gamma' = 0, \quad \frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} + \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = 0, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$$

où (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont les angles de ces directions avec les axes de l'ellipsoïde. Les quatre premiers donneront les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\alpha'}{\gamma'}$, $\frac{\beta'}{\gamma'}$, et, au moyen des deux dernières, on déterminera enfin les inconnues.

Mais on peut trouver plus vite la direction du grand axe; si en effet on suppose que l'axe maximum de l'ellipsoïde soit sur l'axe des z, et qu'on pose

$$x = pz, \quad y = qz,$$

pour équations du grand axe, on aura à chercher le maximum de $\frac{1}{p^2 + q^2 + 1}$, p et q étant liés par la relation

$$lp + mq + 1 = 0,$$

ou le minimum de $(p^2 + q^2 + 1)$. La relation précédente donne

$$p = -\frac{n + mq}{l}.$$

Substituant, il vient

$$q^2(m^2 + l^2) + 2mnq + n^2 + l^2,$$

qui sera minimum pour

$$q = -\frac{mn}{m^2 + l^2},$$

et par suite

$$p = -\frac{ln}{m^2 + l^2};$$

$$\gamma^2 = \frac{m^2 + l^2}{n^2 + m^2 + l^2}, \quad \beta^2 = \frac{l^2 + n^2}{n^2 + m^2 + l^2}, \quad \alpha^2 = \frac{m^2 + n^2}{n^2 + m^2 + l^2}.$$

On obtiendra facilement encore les longueurs de deux diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné. Dans l'équation écrite plus haut, il faudrait diviser le terme constant par le sinus de cet angle.