NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAINVIN

Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 243-255

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__243_0>

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir t. XX, p 177),

PAR M. PAINVIN (*),
Docteur ès Sciences.

---

§ II. — *Polaires réciproques.*

92. Les théorèmes établis dans le chapitre second nous conduisent d'une manière très-simple aux équations des surfaces polaires pour les surfaces du second degré.

Soit

$$(1) \qquad \varphi = \sum a_{rs} x_r x_s = 0, \quad (a_{rs} = a_{sr}),$$

l'équation d'une surface du second degré; cette équation peut s'écrire

$$(2) \qquad \varphi = \frac{1}{\Delta^2} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & x_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & x_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\alpha_{sr} = \alpha_{rs}),$$

après avoir posé

$$(3) \qquad \alpha_{rs} = \frac{d\Delta}{da_{rs}};$$

Δ désignant, comme toujours, le discriminant ou le hessien de la fonction φ.

93. *On appelle* SURFACE POLAIRE *d'une surface le lieu des pôles des plans tangents à cette surface; les pôles*

(*) Painvin (L.), né à Malesherbes (Loiret) le 18 mai 1826.

de ces plans étant pris par rapport à une seconde surface quelconque, dite SURFACE DIRECTRICE.

Appliquons cette définition à la surface $\varphi = 0$.

Soit

$$(4) \qquad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation de la surface directrice.

Le plan polaire d'un point $\left(\frac{z_1}{z_4}, \frac{z_2}{z_4}, \frac{z_3}{z_4}\right)$ aura pour équation

$$X_1 \frac{dF}{dz_1} + X_2 \frac{dF}{dz_2} + X_3 \frac{dF}{dz_3} + X_4 \frac{dF}{dz_4} = 0,$$

$\frac{X_1}{X_4}, \frac{X_2}{X_4}, \frac{X_3}{X_4}$, étant les coordonnées variables.

Or ce plan, d'après la définition du lieu cherché, doit être tangent à la surface $\varphi = 0$, ce qui conduit à la relation

$$(5) \qquad \psi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{dF}{dz_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{dF}{dz_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \frac{dF}{dz_3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \frac{dF}{dz_4} \\ \frac{dF}{dz_1} & \frac{dF}{dz_2} & \frac{dF}{dz_3} & \frac{dF}{dz_4} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(chapitre II, § III, n° 35); c'est précisément l'équation du lieu que nous nous proposions de trouver.

94. Le plan

$$X_1 \frac{dF}{dz_1} + X_2 \frac{dF}{dz_2} + X_3 \frac{dF}{dz_3} + X_4 \frac{dF}{dz_4} = 0$$

est tangent à la surface $\varphi = 0$, par suite de la relation (5). Si (x_1, x_2, x_3, x_4) sont les coordonnées du point de contact de ce plan, le point (x_1, x_2, x_3, x_4) est dit *point correspondant* du point (z_1, z_2, z_3, z_4).

D'un autre côté, le plan tangent à la surface $\varphi = 0$ a aussi pour équation

$$X_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + X_3 \frac{d\varphi}{dx_3} + X_4 \frac{d\varphi}{dx_4} = 0.$$

L'identification de ces deux dernières équations conduit aux relations suivantes entre les coordonnées de deux points correspondants :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dF}{dz_1} &= \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_1} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4; \\ \frac{dF}{dz_2} &= \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_2} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4; \\ \frac{dF}{dz_3} &= \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_3} = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4; \\ \frac{dF}{dz_4} &= \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_4} = a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4; \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(7) \qquad \left(x_1 \frac{dF}{dz_1} + x_2 \frac{dF}{dz_2} + x_3 \frac{dF}{dz_3} + x_4 \frac{dF}{dz_4} \right) = \varphi.$$

Ces dernières relations permettent d'établir une loi de réciprocité très-remarquable entre les fonctions φ et ψ.

De la dernière colonne du déterminant ψ retranchons les quatre premières multipliées respectivement par x_1, x_2, x_3, x_4, et ayons égard aux relations (6) et (7), il vient

$$\psi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ \frac{dF}{dz_1} & \frac{dF}{dz_2} & \frac{dF}{dz_3} & \frac{dF}{dz_4} & -\varphi \end{vmatrix};$$

on en conclut l'identité

(8) $$\psi = -\Delta\varphi.$$

95. Lorsqu'on prend pour *surface directrice* la surface représentée par l'équation

(9) $$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

la polaire de

(10) $$\varphi = \frac{1}{\Delta^2}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & x_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & x_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{où } \alpha_{rs} = \frac{d\Delta}{da_{rs}},$$

a pour équation

(11) $$\psi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & z_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & z_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & z_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & z_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit, d'après la forme même des équations (10) et (11), que le lieu des pôles des plans tangents à la surface $\psi = 0$, est la première surface $\varphi = 0$.

Les deux surfaces $\varphi = 0$, $\psi = 0$, sont appelées polaires réciproques.

§ III. — *Équation aux axes. Sections circulaires.*

1°. *Équation aux axes.*

96. Nous avons vu (82) que si l'on rapporte à son centre la surface

$$\varphi = \sum a_{rs} x_r x_s = 0, \tag{1}$$

son équation prend la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned} & a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 \\ & + 2a_{23} x_2 x_3 + \frac{\Delta}{\dfrac{d\Delta}{da_{44}}} x_4^2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Or toute transformation de coordonnées qui ne déplacera pas l'origine, n'affectera pas le terme en x_4^2 dans l'équation (2) ; nous pourrons, par suite, ne considérer que la fonction suivante :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{U}_1 = & \, a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 \\ & + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

homogène par rapport aux variables x_1, x_2, x_3.

97. Effectuons maintenant la transformation

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= k_{11} y_1 + k_{12} y_2 + k_{13} y_3, \\ x_2 &= k_{21} y_1 + k_{22} y_2 + k_{23} y_3, \\ x_3 &= k_{31} y_1 + h_{32} y_2 + k_{33} y_3, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

et supposons que les nouveaux axes y_1, y_2, y_3, soient rectangulaires; ce qu'on exprimera en écrivant l'identité

$$
(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2c_{12}\, x_1 x_2 + 2c_{13}\, x_1 x_3 \\ & + 2c_{23}\, x_2 x_3 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \end{aligned} \right.
$$

dont le second membre représente la distance d'un point à l'origine dans le nouveau système d'axes, et le premier membre la distance du même point à la même origine dans le système primitif.

Les c_{rs} sont définis par les relations suivantes :

$$
(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} c_{12} &= c_{21} = \cos\left(\widehat{x_1, x_2}\right), \\ c_{13} &= c_{31} = \cos\left(\widehat{x_1, x_3}\right), \\ c_{23} &= c_{32} = \cos\left(\widehat{x_2, x_3}\right). \end{aligned} \right.
$$

La substitution (4) donnera à la fonction U_1 la forme

$$
(7) \qquad V_1 = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 y_3^2,
$$

si l'on pose

$$
(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} A_r &= k_{1r} h_{1r} + k_{2r} h_{2r} + k_{3r} h_{3r} \\ o &= k_{1r} h_{1s} + k_{2r} h_{2s} + k_{3r} h_{3s}, \quad r \gtrless s, \end{aligned} \right.
$$

$$
(9) \qquad h_{rs} = a_{1r} k_{1s} + a_{2r} k_{2s} + a_{3r} k_{3s}.
$$

La même substitution opérée dans l'identité (5) conduira aux relations :

$$
(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} 1 &= k_{1r} h'_{1r} + k_{2r} h'_{2r} + k_{3r} h'_{3r}, \\ o &= k_{1r} h'_{1s} + k_{2r} h'_{2s} + k_{3r} h'_{3s}, \quad r \gtrless s, \end{aligned} \right.
$$

après avoir posé

$$
(11) \qquad h'_{rs} = c_{1r} k_{1s} + c_{2r} k_{2s} + c_{3r} k_{3s}.
$$

Nous désignerons par δ, V, P, les déterminants qui suivent :

$$
(12)\left\{
\begin{array}{l}
\delta = \dfrac{d\Delta}{da_{44}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad V = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \\
\qquad \text{où} \quad a_{rs} = a_{sr}, \qquad\qquad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} c_{rs} = c_{sr}, \\ c_{rr} = 1, \end{array} \right. \\
\qquad P = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} \qquad k_{rs} \gtrless k_{sr}.
\end{array}
\right.
$$

On sait que le déterminant V représente le carré du volume du parallélipipède construit sur les trois axes x_1, x_2, x_3, avec des longueurs égales à l'unité.

98. Si parmi les équations (8) on considère les trois suivantes :

$$
\begin{aligned}
A_1 &= k_{11} h_{11} + k_{21} h_{21} + k_{31} h_{31}, \\
o &= k_{12} h_{11} + k_{22} h_{21} + k_{32} h_{31}, \\
o &= k_{13} h_{11} + k_{23} h_{21} + k_{33} h_{31},
\end{aligned}
$$

qu'on les multiplie respectivement par $\dfrac{dP}{dk_{i1}}, \dfrac{dP}{dk_{i2}}, \dfrac{dP}{dk_{13}}$, et qu'on ajoute, on arrivera à des relations ayant pour type général

$$
(13) \qquad A_r \frac{dP}{dk_{sr}} = P h_{sr}.
$$

Par un calcul semblable, on déduira des équations (10)

$$
(14) \qquad \frac{dP}{dk_{sr}} = P h'_{sr}.
$$

Éliminant $\dfrac{dP}{dk_{sr}}$ entre les équations (13) et (14), puis remplaçant les h_{sr}, h'_{sr} par leurs valeurs (9) et (11), il vient

$$
(a_{1r} - A_s c_{1r}) k_{1s} + (a_{2r} - A_s c_{2r}) k_{2s} + (a_{3r} - A_s c_{3r}) k_{3s} = o.
$$

En posant

$$\lambda = -A_s,$$

et en donnant à r les valeurs 1, 2, 3, on obtient alors

$$\begin{cases} (a_{11}+\lambda c_{11})\,k_{1s}+(a_{21}+\lambda c_{21})\,k_{2s}+(a_{31}+\lambda c_{31})\,k_{3s}=0, \\ (a_{12}+\lambda c_{12})\,k_{1s}+(a_{22}+\lambda c_{22})\,k_{2s}+(a_{32}+\lambda c_{32})\,k_{3s}=0, \\ (a_{13}+\lambda c_{13})\,k_{1s}+(a_{23}+\lambda c_{23})\,k_{2s}+(a_{33}+\lambda c_{33})\,k_{3s}=0. \end{cases}$$

L'élimination de k_{1s}, k_{2s}, k_{3s} entre ces trois dernières relations, conduit à l'équation définitive

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda c_{11} & a_{12}+\lambda c_{12} & a_{13}+\lambda c_{13} \\ a_{21}+\lambda c_{21} & a_{22}+\lambda c_{22} & a_{23}+\lambda c_{23} \\ a_{31}+\lambda c_{31} & a_{32}+\lambda c_{32} & a_{33}+\lambda c_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

dont les trois racines seront

$$\lambda = -A_1, \quad \lambda = -A_2, \quad \lambda = -A_3.$$

Or, par suite de la transformation que nous avons effectuée, l'équation (2) de la surface est devenue

$$A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 y_3^2 + \frac{\Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}} y_4^2 = 0,$$

et les carrés de ses demi-axes ont pour valeurs

$$\frac{-\Delta}{A_1 \frac{d\Delta}{da_{44}}}, \quad \frac{-\Delta}{A_2 \frac{d\Delta}{da_{44}}}, \quad \frac{-\Delta}{A_3 \frac{d\Delta}{da_{44}}}.$$

Par conséquent, si l'on désigne par R^2 le carré d'un quelconque des demi-axes de la surface, on aura

$$(16) \qquad R^2 = \frac{\Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

L'équation (15) donnera donc les axes de la surface, pourvu qu'on ait égard à la relation (16).

On conclut immédiatement des équations (15) et (16)

$$a^2 b^2 c^2 = -\frac{V\Delta^3}{\left(\dfrac{d\Delta}{da_{44}}\right)^4},$$

a, b, c représentant les demi-axes de la surface.

2°. *Sections circulaires.*

99. Prenons l'équation générale

$$(1) \qquad \sum a_{rs} x_r x_s = 0.$$

Considérons en outre l'équation d'une sphère

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{11} x_1^2 + c_{22} x_2^2 + c_{33} x_3^2 + c_{44} x_4^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + 2c_{13} x_1 x_3 \\ & + 2c_{14} x_1 x_4 + 2c_{23} x_2 x_3 + 2c_{24} x_2 x_4 + 2c_{34} x_3 x_4 = 0, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1, \\ & c_{rs} = c_{sr} = \cos.\left(\widehat{x_r, x_s}\right), \quad \text{pour } r \text{ ou } s = 1, 2, 3, \\ & c_{r4} = c_{4r} = m_1 c_{r1} + m_2 c_{r2} + m_3 c_{r3}, \quad \text{pour } r = 1, 2, 3, \\ & c_{44} = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2c_{12} m_1 m_2 + 2c_{13} m_1 m_3 \\ & \qquad + 2c_{23} m_2 m_3 - r^2; \end{aligned} \right.$$

$-m_1$, $-m_2$, $-m_3$ sont les coordonnées du centre de la sphère, et r est le rayon.

Soit enfin l'équation d'un plan

$$(4) \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = 0.$$

Si l'intersection de ce plan avec chacune des deux surfaces (1) et (2) donne deux courbes identiques, il est évident que ce plan coupera la surface du second degré suivant une circonférence.

Nous exprimerons que les deux sections coïncident, en écrivant que leurs projections sur un même plan coordonné sont les mêmes. Choisissons le plan des $x_2 x_3$.

Or les relations (4), (5), (6) du chap. II, § III, nos 45 et 46 nous permettent d'écrire immédiatement les conditions nécessaires pour que cette coïncidence ait lieu; ces conditions seront en même temps suffisantes si le plan (4) n'est pas parallèle à l'axe des x_1.

100. Après avoir posé

$$A_{rs} = a_{rs} + \lambda c_{rs}, \tag{5}$$

nous trouverons en opérant l'identification indiquée :

$$(6) \quad \begin{cases} A_{11} p_2^2 - 2 A_{12} p_1 p_2 + A_{22} p_1^2 = 0, \\ A_{11} p_2 p_3 + A_{23} p_1^2 - A_{12} p_1 p_3 - A_{13} p_1 p_2 = 0; \\ A_{11} p_3^2 - 2 A_{13} p_1 p_3 + A_{33} p_1^2 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} A_{11} p_4^2 - 2 A_{14} p_1 p_4 + A_{44} p_1^2 = 0; \\ A_{11} p_2 p_4 + A_{24} p_1^2 - A_{12} p_1 p_4 - A_{14} p_1 p_2 = 0, \\ A_{11} p_3 p_4 + A_{34} p_1^2 - A_{13} p_1 p_4 - A_{14} p_1 p_3 = 0. \end{cases}$$

Ces équations renferment comme indéterminées les quantités $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_3}{p_1}$, $\frac{p_4}{p_1}$, λ; les coordonnées $-m_1$, $-m_2$, $-m_3$, du centre de la sphère et son rayon r.

Les trois premières déterminent $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_3}{p_1}$, et λ; les trois dernières seront toujours satisfaites en disposant convenablement des inconnues restantes.

101. Pour effectuer le premier calcul, posons

$$(7)\qquad D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

D ne renferme que des quantités connues et le paramètre indéterminé λ.

Des deux premières équations du groupe (6), on tire :

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} A_{11}\frac{p_2}{p_1} &= A_{12} \pm \sqrt{-\frac{dD}{dA_{33}}}, \\ A_{11}\frac{p_3}{p_1} &= A_{13} \pm \sqrt{-\frac{dD}{dA_{22}}}; \end{aligned} \right.$$

substituant les valeurs de $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_3}{p_1}$, dans la troisième équation, on trouve pour l'équation que doit vérifier λ :

$$(9)\qquad \frac{dD}{dA_{23}} = \left(\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{22}}}\right)\left(\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{33}}}\right).$$

Cette relation nous montre d'abord que les radicaux $\sqrt{-\frac{dD}{dA_{22}}}$, $\sqrt{-\frac{dD}{dA_{33}}}$ doivent être pris avec des signes tels, que leur produit ait le même signe que $\frac{dD}{dA_{23}}$.

En rendant rationnelle la relation (9), il vient

$$\left(\frac{dD}{dA_{23}}\right)^2 - \frac{dD}{dA_{22}} \cdot \frac{dD}{dA_{33}} = - A_{11} D = 0.$$

L'équation que doit vérifier λ sera donc

$$(10)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda c_{11} & a_{12} + \lambda c_{12} & a_{13} + \lambda c_{13} \\ a_{21} + \lambda c_{21} & a_{22} + \lambda c_{22} & a_{23} + \lambda c_{23} \\ a_{31} + \lambda c_{31} & a_{32} + \lambda c_{32} & a_{33} + \lambda c_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est précisément l'équation qui donne les axes dans le cas des surfaces à centre.

102. Supposant λ déterminé, et faisant usage des valeurs (8), nous trouverons que les plans des sections circulaires sont parallèles aux plans

$$(11)\quad A_{11}x_1+\left(A_{12}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{33}}}\right)x_2+\left(A_{13}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{22}}}\right)x_3=0.$$

En comparant de la même manière les projections des courbes d'intersection sur les plans des $x_1\,x_3$, et des $x_1\,x_2$, on eût trouvé

$$(12)\quad A_{22}x_2+\left(A_{21}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{33}}}\right)x_1+\left(A_{23}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{11}}}\right)x_3=0$$

(le produit des deux radicaux devant être de même signe que $\frac{dD}{dA_{13}}$).

$$(13)\quad A_{33}x_3+\left(A_{31}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{22}}}\right)x_1+\left(A_{32}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{11}}}\right)x_2=0$$

(le produit des deux radicaux devant être de même signe que $\frac{dD}{dA_{12}}$).

103. Lorsque les surfaces ont un centre, on peut prendre la sphère concentrique à la surface. Si cette dernière est rapportée à son centre, on aura $m_1=m_2=m_3=0$; et d'après les formules (3), les c_{r4} seront nuls, et c_{44} sera égal à $-r^2$.

Si l'on fait alors passer le plan par l'origine, les deux dernières relations (6) seront satisfaites, et la quatrième nous donnera

$$r^2 = \frac{\Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}} \cdot \frac{1}{\lambda}. \tag{14}$$

Ainsi le rayon de la sphère est égal à l'un des demi-axes de la surface.