Nouvelles annales de mathématiques

Taratte

Solution du problème proposé pour l'admission à l'École polytechnique (1860)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 18-22

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__18_1>

SOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1860);

PAR M. TARATTE,
Professeur au lycée de Bar-le-Duc.

Énoncé. Étant donnée la parabole CAB, la sécante MAB se meut sous la condition que les normales menées à la parabole par les points A et B se coupent en un point C de cette courbe. Par ce point C, on mène la tangente CM qui coupe la sécante MAB en un point M.

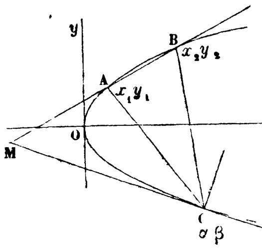
Cela posé, on demande de trouver l'équation de la courbe décrite par le point M, quand la sécante MAB prend toutes les positions compatibles avec la condition à laquelle elle est assujettie; on construira cette équation, qui est du troisième degré.

Solution. Par le point C passent trois normales à la parabole; or quand on veut mener par un point α, β une normale à la parabole, l'analyse donne une équation du troisième degré

$$(1) \qquad y'^3 - 2p(\alpha - p)y' - 2p^2\beta = 0,$$

y' étant l'ordonnée du point de rencontre de la normale avec la courbe.

Si nous exprimons que le point α, β est sur la para-



bole, l'équation (1) sera vérifiée par $y' = \beta$, et son premier membre pourra se diviser par $y - \beta$: ce qui donnera la relation

$$y'^2 + \beta y' + 2p^2 = 0, \tag{2}$$

à laquelle doivent constamment satisfaire les coordonnées des points A, B.

L'équation de la sécante MAB est

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1), \tag{3}$$

et l'équation de la tangente en C est

$$\beta y = p\left(x + \frac{\beta^2}{2p}\right). \tag{4}$$

Nous avons en outre deux relations

$$y_1^2 = 2px_1, \tag{5}$$

$$y_2^2 = 2px_2. \tag{6}$$

Or il s'agit d'éliminer entre les équations (2), (3), (4), (5), (6) les quantités variables x_1, y_1, x_2, y_2, pour avoir l'équation du lieu.

Des équations (5) et (6) je tire

$$(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2p(x_1 - x_2)$$

ou, en vertu de la condition (2),

$$-\beta(y_1 - y_2) = 2p(x_1 - x_2),$$

d'où

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-2p}{\beta}.$$

L'équation (3) de la sécante devient

$$y - y_1 = \frac{-2p}{\beta}(x - x_1)$$

et donne

$$\beta y_1 + 2px_1 = 2px + \beta y;$$

mais l'équation (2) donne aussi, à cause de l'équation (5),

$$\beta y_1 + 2px_1 = -2p^2,$$

donc

$$2px + \beta y = -2p^2,$$

d'où

$$\beta = -\frac{2p(x+p)}{y}.$$

Remplaçant enfin β par sa valeur dans l'équation (4), on aura l'équation du lieu

$$(a) \qquad y^2(2p + 3x) + 2p(p + x)^2 = 0.$$

Construction. L'équation (4) montre que la courbe est symétrique par rapport à Ox, ce qui était facile à prévoir : on en tire

$$y = \pm \frac{2p(p + x)}{\sqrt{-2p(2p + 3x)}}.$$

La courbe n'a aucun point du côté des x positifs; elle a pour asymptote la droite $x = -\frac{2p}{3}$, et rencontre l'axe des x au point $x = -p$; puis elle s'étend indéfiniment au-dessus et au-dessous de Ox, car si on divise les deux termes de la valeur de y par x, on a

$$y = \pm \frac{2p\left(\frac{p}{x}+1\right)}{\sqrt{-2p\left(\frac{2p}{x^2}+\frac{3}{x}\right)}}, \ldots,$$

et pour $x = -\alpha$, on voit que y est infini.

D'ailleurs l'équation (a) donne pour le coefficient angulaire de la tangente

$$\alpha = -\frac{3y^2 + 4p(p+x)}{2p+3x},$$

et pour $x = -p$, on voit que $\alpha = 0$; ce point est une inflexion de la courbe.

Note du Rédacteur. Il y a encore une asymptote parabolique.

Lorsque $B^2 > p^2$, y est imaginaire; cependant il y a des points réels dans la cubique (M. Housel).

En faisant

$$\beta = 0$$

dans l'équation de la sécante, on a

$$x = -p;$$

ainsi la sécante passe par un point fixe situé sur l'axe focal (M. Gerono). Toutes les sécantes passant par le même point, ce problème se rattache à celui du grand concours de l'an dernier.

Le coefficient angulaire de la sécante est

$$\frac{-2p}{\beta} = \frac{-\beta}{\alpha},$$

celui de la tangente est

$$\frac{p}{\beta} = + \frac{\beta}{2\alpha}.$$

Une de ces lignes se construit au moyen de l'autre.

M. Émile Barbier, élève de l'École Normale, résolvant la même question, fait remarquer : 1° que le centre de gravité du triangle CAB est situé sur l'axe de la parabole ; 2° que le point fixe I, par lequel passe AB, est un point multiple ; 3° que les tangentes en ce point ont pour coefficients angulaires $\pm\sqrt{2}$; 4° que ces tangentes sont perpendiculaires aux tangentes communes à la parabole donnée et à la parabole asymptote ; 5° que ces deux paraboles ont le point fixe I pour centre d'homothèse, et le rapport d'homothèse est $-\frac{1}{3}$.

M. H. Delorme (élève du lycée Louis-le-Grand) démontre que la seconde branche du lieu n'a pas d'asymptote.