

A. VACHETTE

**Note sur certains développements et solution  
des questions 461, 468 et 479**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 20  
(1861), p. 155-174

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1861\\_1\\_20\\_\\_155\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__155_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR CERTAINS DÉVELOPPEMENTS  
ET SOLUTION DES QUESTIONS 461, 468 ET 479 ;**

PAR M. A. VACHETTE,  
Professeur de Mathématiques.

I. Valeur de  $a_m = x^m + \frac{1}{x^m}$  en fonction de  $a = x + \frac{1}{x}$  et de  $m$ .

L'abaissement des équations réciproques de degré pair donne lieu à une équation de degré sous-double en posant  $x + \frac{1}{x} = a$ , et remplaçant  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ,  $x^3 + \frac{1}{x^3}$ , ...,  $x^m + \frac{1}{x^m}$  par les valeurs qui en résultent. On a la relation générale

$$(1) x^m + \frac{1}{x^m} = \left( x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}} \right) \left( x + \frac{1}{x} \right) - \left( x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}} \right)$$

ou

$$a_m = a_{m-1} a - a_{m-2}.$$

Je calcule directement plusieurs termes, en commençant par  $a_0 = x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$ .

$$a_0 = 2.$$

$$a_1 = a.$$

$$a_2 = a^2 - 2.$$

$$a_3 = a^3 - 3a.$$

$$a_4 = a^4 - 4a^2 + 2.$$

$$a_5 = a^5 - 5a^3 + 5a.$$

$$a_6 = a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 2.$$

$$a_7 = a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a.$$

$$a_8 = a^8 - 8a^6 + 20a^4 - 16a^2 + 2.$$

$$a_9 = a^9 - 9a^7 + 27a^5 - 30a^3 + 9a.$$

$$a_{10} = a^{10} - 10a^8 + 35a^6 - 50a^4 + 25a^2 - 2.$$

$$a_{11} = a^{11} - 11a^9 + 44a^7 - 77a^5 + 55a^3 - 11a.$$

.....

Pour un indice pair, si  $m = 4p$ , le dernier terme est  $+ 2$ ; et si  $m = 4p + 2$ , le dernier terme est  $- 2$ . Pour

un indice impair, si  $m = 4p + 1$ , le dernier terme est  $+ ma$ ; et si  $m = 4p + 3$ , le dernier terme est  $- ma$ . Le nombre des termes augmente d'une unité, d'un indice pair à l'indice pair suivant, et surpasse d'une unité la moitié de l'indice. Pour un indice pair, le développement ne contient que les puissances paires de  $a$ ; et pour un indice impair, il ne contient que les puissances impaires. La valeur absolue d'un terme de  $a_m$  est la somme des valeurs absolues du terme de  $a_{m-1}$  situé dans la même colonne verticale, et du terme de  $a_{m-2}$  situé dans la colonne à gauche. Les termes ont alternativement le signe  $+$  et le signe  $-$ .

Soit  $T_{\frac{m}{k}}$  la valeur absolue du coefficient d'un terme de  $a_m$  qui en a  $k$  avant lui, on aura

$$a_m = a^m - T_{\frac{m}{1}} a^{m-2} + T_{\frac{m}{2}} a^{m-4} - T_{\frac{m}{3}} a^{m-6} + \dots \\ \pm T_{\frac{m}{k-1}} a^{m-2k+2} \mp T_{\frac{m}{k}} a^{m-2k} + \dots$$

Le premier terme d'une série verticale est toujours 2, et s'il en a  $k$  avant lui, l'indice de la ligne horizontale est  $2k$ ; on aura donc toujours  $T_{\frac{2k}{k}} = 2$ .

Supposons un indice  $m > 2k$ , la loi de formation d'un terme donne

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{\frac{m}{k}} = T_{\frac{m-1}{k}} + T_{\frac{m-2}{k-1}} \\ T_{\frac{m-1}{k}} = T_{\frac{m-2}{k}} + T_{\frac{m-3}{k-1}} \\ \dots\dots\dots \\ T_{\frac{2k+1}{k}} = T_{\frac{2k}{k}} + T_{\frac{2k-1}{k-1}} \\ T_{\frac{2k}{k}} = 2 \quad \text{ou} \quad T_{\frac{2k-2}{k-1}} \end{array} \right.$$

et en ajoutant

$$\begin{aligned}
 (3) \quad T_m &= \frac{T_{m-2}}{k} + \frac{T_{m-3}}{k-1} + \dots + \frac{T_{k-1}}{k-1} + \frac{T_{2k-2}}{k-1} \\
 &= \sum_{2k-2}^{m-2} T_p \frac{1}{k-1}
 \end{aligned}$$

la somme  $\sum$  s'étendant depuis  $p = m - 2$  jusqu'à  $p = 2k - 2$ .

On a

$$T_m = 1$$

excepté pour  $T_0 = 2$ .

Pour  $T_m$ , la formule (2) donne

$$T_m = T_{m-1} + T_{m-2} = T_{m-1} + 1;$$

il faut toujours augmenter d'une unité le terme précédent de la même colonne. A partir de  $m = 3$ ,  $T_3 = 3$ ; on aura

donc

$$T_m = m.$$

Pour  $T_m$ , la formule (3) donne

$$T_m = \sum_2^{m-2} T_p = 2 + 3 + \dots + (m-2) = \frac{m(m-3)}{1.2}$$

Pour  $T_{\frac{m}{3}}$ , on aura

$$\begin{aligned} T_{\frac{m}{3}} &= \sum_4^{m-2} T_{\frac{p}{2}} = \sum_4^{m-2} \frac{p(p-3)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ (m-2)(m-5) + (m-3)(m-6) + \dots + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \right], \\ 2 T_{\frac{m}{3}} &= 1(1+3) + 2(2+3) + \dots + (m-5)(m-5+3) \\ &= 1^2 + 2^2 + \dots + (m-5)^2 + 3[1+2+3+\dots+(m-5)]; \end{aligned}$$

or

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et pour  $n = m - 5$

$$S_2 = \frac{(m-5)(m-4)(2m-9)}{6},$$

par suite

$$\begin{aligned} 2 T_{\frac{m}{3}} &= \frac{(m-5)(m-4)(2m-9)}{6} + \frac{3(m-5)(m-4)}{2} \\ &= \frac{2m(m-4)(m-5)}{6}, \\ T_{\frac{m}{3}} &= \frac{m(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}. \end{aligned}$$

On peut dès lors soupçonner que

$$T_{\frac{m}{k}} = \frac{m(m-k-1)(m-k-2) \dots (m-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

qui se réduit à 2 pour  $m = 2k$ , et à  $m$  pour  $m = 2k + 1$ .

Pour justifier cette forme du terme général de  $a_m$ , on la suppose applicable aux développements  $a_1 a_2 \dots a_{m-1}$ ;

si on peut l'appliquer à  $a_m$ , étant vérifiée jusqu'à  $a_6$  elle sera générale. Or d'après (2)

$$\begin{aligned} \frac{T_m}{k} &= \frac{(m-1)(m-k-2)(m-k-3) \dots (m-2k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \\ &+ \frac{(m-2)(m-k-2)(m-k-3) \dots (m-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} \\ &= \frac{(m-k-2)(m-k-3) \dots (m-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)} \\ &\times \left[ \frac{(m-1)(m-2k)}{k} + m-2 \right] \\ &= \frac{m(m-k-1)(m-k-2) \dots (m-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \end{aligned}$$

et la formule (1) devient

$$(4) \quad a_m = a^m - \frac{m}{1} a^{m-1} + \frac{m(m-3)}{1 \cdot 2} a^{m-2} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} + \dots \\ \pm \frac{m(m-k-1)(m-k-2) \dots (m-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} a^{m-k} \mp \dots$$

le terme général ayant le signe + ou le signe —, selon que  $k$  est pair ou impair.

II. *Trouver deux nombres dont on a la somme  $a$  et la somme des  $m^{\text{ièmes}}$  puissances  $a_m$ .* •

On a,  $x$  et  $y$  étant ces deux nombres l'identité

$$x^m + y^m = (x^{m-1} + y^{m-1})(x+y) - xy(x^{m-2} + y^{m-2}),$$

que nous pouvons écrire au moyen des indices et de  $p=xy$ ,

$$(5) \quad a_m = a_{m-1}a - pa_{m-2}$$

avec  $a_1 = a$  et  $a_0 = 2$ . Cette formule ne diffère de la for-

mule (1) du paragraphe précédent qu'en ce que le terme négatif est multiplié par  $p$

Le calcul direct donne une analogie parfaite

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, \\ a_1 &= a, \\ a_2 &= a^2 - 2p, \\ a_3 &= a^3 - 3pa, \\ a_4 &= a^4 - 4pa^2 + 2p^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

les coefficients numériques suivent évidemment la même loi de formation, et

$$\frac{T_m}{k} = \frac{T_{m-1}}{k} + \frac{T_{m-2}}{k-1},$$

coefficients de  $p^k$  et  $p^{k-1}$  dans  $a_{m-1}$  et  $a_{m-2}$ , sera coefficient de  $p^k$  dans  $a_m$  d'après la loi (5). On aura donc, les exposants de  $p$  allant en augmentant d'une unité à chaque terme depuis  $p^0$  jusqu'au dernier terme où  $p$  a un exposant égal à la moitié de  $m$ ,

$$\left( \begin{array}{l} \text{6} \\ \text{(2)} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} a_m = a^m - \frac{m}{1} p a^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1 \cdot 2} p^2 a^{m-4} \\ - \frac{m(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^3 a^{m-6} + \dots \\ \pm \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\dots(m-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} p^k a^{m-2k} \mp \dots \end{array} \right.$$

Comme  $a$  et  $a_m$  sont connus, on aura le produit  $p$  par une équation de degré sous-double. Avec la somme  $a$  et le produit  $p$  des nombres  $x$  et  $y$ ,  $x$  et  $y$  seront les deux racines de  $\zeta^2 - a\zeta + p = 0$ .

### III. Conséquences de la formule (6).

1° Quand  $m$  est un nombre premier autre que 2, le

nombre  $\frac{(x+y)^m - (x^m + y^m)}{mxy(x+y)}$  est un nombre entier,  $x$  et  $y$  étant entiers. Comme  $m$  est un nombre premier autre que 2, il est impair et le dernier terme du développement

(6) est  $\pm m p^{\frac{m-1}{2}} a$ .

On déduit de la formule (6)

$$\begin{aligned} & \frac{a^m - a_m}{ap} \\ = & ma^{m-3} - \frac{m(m-3)}{1 \cdot 2} pa^{m-5} + \frac{m(m-4)(m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^2 a^{m-7} - \dots \\ \pm & \frac{m(m-k-1)(m-k-2) \dots (m-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} p^{k-1} a^{m-2k-1} \mp \dots \\ \pm & mp^{\frac{m-3}{2}}. \end{aligned}$$

Chaque coefficient contient  $m$  au numérateur, et le dénominateur  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k$  ne le contient pas, puisque  $m$  est premier, et que chacun des nombres  $1, 2, 3, \dots, k$  est plus petit que  $m$ . Donc  $\frac{a^m - a_m}{map}$  est entier, et ce quotient a pour expression

$$\begin{aligned} & a^{m-3} - \frac{m-3}{2} pa^{m-5} + \frac{(m-4)(m-5)}{2 \cdot 3} p^2 a^{m-7} - \dots \\ \pm & \frac{(m-k-1)(m-k-2) \dots (m-2k+1)}{2 \cdot 3 \dots k} p^{k-1} a^{m-2k-1} \mp \dots \\ \pm & p^{\frac{m-3}{2}}. \end{aligned}$$

Si  $m$  est premier, tous les coefficients sont entiers; celui de  $p^{\frac{m-3}{2}}$ , qui se réduit à 1, est

$$\frac{\left(\frac{m+1}{2} - 1\right) \left(\frac{m+1}{2} - 2\right) \left(\frac{m+1}{2} - 3\right) \dots \left(\frac{m+1}{2} - \frac{m-1}{2} + 1\right)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \frac{m-1}{2}}$$

La plus grande valeur du dernier facteur  $k$  d'un dénominateur est  $\frac{m-1}{2}$ .

Si  $m$  n'est pas premier, il contiendra certains facteurs premiers,  $k$  par exemple; ce facteur  $k$  ne peut être égal à  $\frac{m-1}{2}$ , car

$$m : \frac{m-1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{2m}{m-1} = 2 + \frac{2}{m-1}$$

devrait être un nombre entier, ce qui nécessite  $m-1=2$  ou  $m=3$ , nombre premier. Alors le nombre

$$\frac{(m-k-1)(m-k-2)\dots(m-2k+1)}{2.3\dots k}$$

ne peut pas être entier; posons

$$m = (q+1)k,$$

d'où

$$m-k = qk,$$

et le nombre devient

$$\frac{(qk-1)(qk-2)(qk-3)\dots(qk-k+1)}{2.3.4\dots k},$$

où  $k$  ne divise aucun des nombres  $qk-1$ ,  $qk-2$ ,  $qk-3$ , ...,  $qk-(k-1)$ , égaux chacun à une différence entre un multiple de  $k$  et un non-multiple de  $k$ .

2° Si  $m$  est premier, égal à  $2n+1$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} & \frac{(x+y)^{2n+1} - (x^{2n+1} + y^{2n+1})}{x+y} \\ &= (x+y)^{2n} - (x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \dots - xy^{2n-1} + y^{2n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2n \left| x^{2n-1}y + \frac{2n(2n-1)}{1 \cdot 2} x^{2n-2}y^2 + \dots \right. \\
&\quad \left. + 1 \right| \\
&\quad + \frac{2n(2n-1)\dots(2n-2p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p+1)} \left| x^{2n-2p-1}y^{2p+1} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + 1 \right| \\
&\quad + \frac{2n(2n-1)\dots(2n-2p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p+2)} \left| x^{2n-p-2}y^{2p+2} + \dots \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + 1 \right| \\
&\quad \quad \quad + 2n \left| xy^{2n-1} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + 1 \right|
\end{aligned}$$

Le deuxième membre, comme on l'a vu plus haut, est divisible par  $xy$  et par  $2n+1$ ; comme  $2n+1$  est indépendant de  $x$  et de  $y$ , chaque coefficient est divisible par  $2n+1$ , et les deux nombres

$$\frac{2n(2n-1)\dots(2n-2p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p+1)} + 1, \quad \frac{2n(2n-1)\dots(2n-2p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p+2)} - 1$$

sont divisibles par le nombre premier  $2n+1$ ,  $p$  étant plus petit que  $n$ .

Ce dernier théorème peut résulter de la généralisation du principe de la preuve par 9 : si les nombres  $a, a', a'', \dots$ , divisés par  $d$ , donnent les restes  $r, r', r'', \dots$ , la différence  $aa'a'' \dots - r'r'r'' \dots$  est divisible par  $d$ . En effet

$$2n, \quad 2n-1, \quad 2n-2, \quad \dots, \quad 2n-2p, \quad 2n-2p-1$$

divisés par  $2n+1$ , donnent les restes

$$-1, \quad -2, \quad -3, \quad \dots, \quad -(2p+1), \quad -(2p+2).$$

Prenons tous les facteurs, excepté le dernier, le produit

des restes correspondants, en nombre impair, a le signe —, et en vertu du lemme

$$2n(2n-1)(2n-2) \dots (2n-2p) + 1.2.3 \dots (2p+1)$$

est divisible par  $2n+1$ ; divisant cette somme par  $1.2.3 \dots (2p+1)$ , on n'enlève pas le facteur  $2n+1$ , qui est premier avec ce produit et il en résulte

$$\frac{2n(2n-1) \dots (2n-2p)}{1.2.3 \dots (2p+1)} + 1$$

divisible par  $2n+1$ .

Si on prend tous les facteurs, le produit a le signe +; alors on aura

$$2n(2n-1)(2n-2) \dots (2n-2p-1) - 1.2.3 \dots (2p+1)(2p+2)$$

divisible par  $2n+1$ , et il en est de même de

$$\frac{2n(2n-1) \dots (2n-2p-1)}{1.2.3 \dots (2p+2)} - 1.$$

Si une seule des divisions précédentes n'a pas lieu, quand  $p$  est plus petit que  $n$ ,  $2n+1$  n'est pas un nombre premier; car, premier ou non, il divise toujours

$$2n(2n-1) \dots (2n-2p) + 1.2.3 \dots (2p+1)$$

et

$$2n(2n-1) \dots (2n-2p-1) - 1.2.3 \dots (2p+2);$$

il faut alors que le facteur  $2n+1$  ou au moins un de ses diviseurs ait été enlevé dans la division respective de chaque somme par  $1.2.3 \dots (2p+1)$  pour la première, et par  $1.2.3 \dots (2p+2)$  pour la seconde; donc  $2n+1$  admettant un diviseur plus petit que lui, n'est pas un nombre premier.

IV. *Valeur des différences*  $A_5 = a^5 - a_5$ ,  $A_7 = a^7 - a_7$   
*et conséquences qui en résultent pour*  $A_{5+6n}$  *et*  $A_{7+6n}$ ,  
*le nombre*  $n$  *pouvant être nul.*

On trouve aisément

$$A_5 = a^5 - a_5 = 5a(a^2 - 1),$$

$$A_7 = a^7 - a_7 = 7a(a^2 - 1)^2.$$

Généralement

$$A_{5+6n} \text{ est divisible par } a^2 - 1,$$

$$A_{7+6n} \text{ est divisible par } (a^2 - 1)^2.$$

Nous commençons par établir une relation entre  $\dot{A}_{m+6}$  et  $A_m$ , en nous servant des six relations suivantes, déduites de la formule (1) qu'on ajoute, en les multipliant par les facteurs respectifs placés vis-à-vis, afin d'éliminer plus rapidement :

$$a_{m+6} = aa_{m+5} - a_{m+4}, \quad 1;$$

$$a_{m+5} = aa_{m+4} - a_{m+3}, \quad a;$$

$$a_{m+4} = aa_{m+3} - a_{m+2}, \quad a^2 - 1;$$

$$a_{m+3} = aa_{m+2} - a_{m+1}, \quad a(a^2 - 1) - a = a^3 - 2a;$$

$$a_{m+2} = aa_{m+1} - a_m, \quad a(a^3 - 2a) - (a^2 - 1) = a^4 - 3a^2 + 1;$$

$$a_{m+1} = aa_m - a_{m-1}, \quad a(a^4 - 3a^2 + 1) - (a^3 - 2a) = a^5 - 4a^3 + 3a.$$

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{m+6} = (a^6 - 4a^4 + 3a^2 - a^4 + 3a^2 - 1)a_m \\ \quad - a(a^4 - 4a^2 + 3)a_{m-1} \\ \quad = a^6 a_m - (5a^4 - 6a^2 + 1)a_m - a(a^4 - 4a^2 + 3)a_{m-1} \\ a_{m+6} = a^6 a_m - (a^2 - 1) \{ (5a^2 - 1)a_m + a(a^2 - 3)a_{m-1} \}. \end{array} \right.$$

Retranchant les deux membres de  $a^{m+6}$ ,

$$A_{m+6} = a^6 A_m + (a^2 - 1) [(5a^2 - 1)a_m + a(a^2 - 3)a_{m-1}].$$

Si  $m$  est de la forme  $6n + 5$ , la divisibilité par  $a^2 - 1$  de  $A_{m+6}$  est ramenée à celle de  $A_m$  ou de  $A_{m-6}$  ..., ou enfin de  $A_5$ ; ainsi  $A_{5+6n}$  est divisible par  $a^2 - 1$ .

Quand  $m$  est de la forme  $6n + 7$ , la parenthèse

$$\begin{aligned} P_m &= (5a^2 - 1)a_m + a(a^2 - 3)a_{m-1} \\ &= (a^2 - 1)(a_m + aa_{m-1}) + 2a(2aa_m - a_{m-1}) \end{aligned}$$

est divisible par  $a^2 - 1$ . Il suffit de prouver que la deuxième partie de  $P_m$ , que  $2aa_m - a_{m-1}$  est divisible par  $a^2 - 1$ . Appliquons la formule (7)

$$\begin{aligned} a_m &= a^6 a_{m-6} - (a^2 - 1)P_{m-6}, \\ a_{m-1} &= a^6 a_{m-7} - (a^2 - 1)P_{m-7}, \end{aligned}$$

et par suite

$$2aa_m - a_{m-1} = a^6(2aa_{m-6} - a_{m-7}) - (a^2 - 1)(2aP_{m-6} - P_{m-7}).$$

La divisibilité par  $a^2 - 1$  de  $P_m$  ou de  $2aa_m - a_{m-1}$  est ramenée à celle de  $2aa_{m-6} - a_{m-7}$ , ou de  $2aa_{m-12} - a_{m-13}$ , ..., ou enfin de  $2aa_7 - a_6$ , ou même de

$$2aa_1 - a_0 = 2a^2 - 2 = 2(a^2 - 1).$$

On peut écrire dans ce cas

$$A_{m+6} = a^6 A_m + (a^2 - 1)^2 Q$$

et la divisibilité de  $A_{m+6}$  par  $(a^2 - 1)^2$  est ramenée à celle de  $A_m$  ou de  $A_{m-6}$ , ..., ou enfin de  $A_7$ ; ainsi  $A_{6n+7}$  sera divisible par  $(a^2 - 1)^2$ .

Cette divisibilité a été établie par Cauchy (*voir le Journal de Liouville*), sur les remarques qu'avait faites M. Lamé pour  $A_5$  et  $A_7$ , mais en s'appuyant sur des considérations toutes différentes.

Si  $m$  est de la forme  $6n + 5$ , la divisibilité de  $A_m$  par  $a^2 - 1$  donne  $A_m = 0$  pour  $a^2 = 1$ ; il en résulte l'iden-

tité suivante, en divisant tous les termes par  $m$ , dans la relation (4)

$$(8) \left\{ \begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{m-3}{2} + \frac{(m-4)(m-5)}{2.3} \\ &\quad - \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4} \\ &\quad + \frac{(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)}{2.3.4.5} - \dots + \\ &\quad \pm \frac{(m-k-1)(m-k-2)\dots(m-2k+1)}{1.2.3\dots k} \mp \dots \end{aligned} \right.$$

le dernier terme étant  $\pm 1$ . Quand  $m$  est premier, chaque terme du second membre est entier. Cette identité (8) existe aussi pour les nombres entiers  $m$  de la forme  $6n + 7$ .

Si  $m$  est de la forme  $6n + 7$ , on sait que  $2aa_m - a_{m-1}$  est divisible par  $a^2 - 1$ ; cette expression ne contient que des puissances paires de  $a$ , et doit devenir nulle pour  $a^2 = 1$ . Or on peut écrire

$$\begin{aligned} 2aa_m - a_{m-1} &= 2a^{m+1} - 2a^{m+1} + 2aa_m - a_{m-1} \\ &= 2a^{m+1} - a_{m-1} - 2aA_m. \end{aligned}$$

Comme  $A_m = 0$  pour  $a^2 = 1$ , il faut que pour cette hypothèse

$$2a^{m+1} - a_{m-1} = 0,$$

ce qui donne, pour cette forme de  $m$ , l'identité

$$\begin{aligned} 0 &= 2 - 1 + \frac{m-1}{1} - (m-1) \frac{m-4}{2} + (m-1) \frac{(m-5)(m-6)}{2.3} \\ &\quad - (m-1) \frac{(m-6)(m-7)(m-8)}{2.3.4} + \dots \\ &\quad \pm (m-1) \frac{(m-k-2)(m-k-3)\dots(m-2k)}{2.3\dots k} \mp \dots, \end{aligned}$$

le dernier terme étant égal à  $\pm 2$ . On aura donc

$$(9) \left\{ \begin{aligned} 0 = m - \frac{(m-1)(m-4)}{2} + \frac{(m-1)(m-5)(m-6)}{2 \cdot 3} \\ - (m-1) \frac{(m-6)(m-7)(m-8)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \\ \pm \frac{(m-1)(m-k-2)(m-k-3)\dots(m-2k)}{2 \cdot 3 \dots k} \mp \dots \end{aligned} \right.$$

Ces identités (8) et (9) sont exclusives; l'identité (8) ne convient qu'aux nombres entiers des deux formes  $6n + 5$  et  $6n + 7$  ou  $6n \pm 1$ ,  $n$  prenant toutes les valeurs entières à partir de 1; l'identité (9) ne convient qu'aux nombres entiers de la forme  $6n + 1$ .

$$V. \text{ Conséquences de la formule (3) } T_m = \sum_{\substack{p=2 \\ k-2}}^{m-2} T_{\frac{p}{k-1}}.$$

Si on y remplace  $m$  par  $m + 2$ , et  $k$  par  $k + 1$ , on aura

$$T_{\frac{m+2}{k+1}} = \sum_{\substack{p=2 \\ k}}^m T_{\frac{p}{k}},$$

ou bien

$$\begin{aligned} & \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\dots(m-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \\ & + \frac{(m-1)(m-k-2)\dots(m-2k)}{1 \cdot 2 \dots k} \\ & + \frac{(m-2)(m-k-3)\dots(m-2k-1)}{1 \cdot 2 \dots k} + \dots \\ & + \frac{2k(k-1)(k-2)\dots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \\ & = \frac{(m+2)(m-k)(m-k-1)\dots(m-2k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k+1)}, \end{aligned}$$

et supprimant le dénominateur  $1.2.3\dots k$

$$\begin{aligned} & m(m-k-1)(m-k-2)\dots(m-2k+1) \\ & + (m-1)(m-k-2)\dots(m-2k) \\ & + (m-2)(m-k-3)\dots(m-2k-1) + \dots \\ & + 2k(k-1)(k-2)\dots 1 \\ = & \frac{1}{k+1} (m+2)(m-k)(m-k-1)\dots(m-2k+1). \end{aligned}$$

Ce résultat peut s'obtenir directement. Cherchons la somme

$$\begin{aligned} & 1.2.3\dots(k-1).2k+2.3.4\dots k(2k+1) \\ & + 3.4.5\dots(k+1).(2k+2) + \dots \\ & + (m-2k+1)(m-2k+2)\dots(m-k-1).m. \end{aligned}$$

Je décompose chaque dernier facteur en deux parties, dont la première est  $k$ , on aura la somme des deux lignes suivantes

$$\begin{aligned} & 1.2.3\dots(k-1).k+2.3.4\dots k(k+1) \\ & + 3.4.5\dots(k+1)(k+2) + \dots \\ & + (m-2k+1)(m-2k+2)\dots(m-k-1)(m-k) \\ & + k \{ 1.2.3\dots(k-1) + 2.3.4\dots k + 3.4.5\dots(k+1) + \dots \\ & + (m-2k+1)(m-2k+2)\dots(m-k-1) \}. \end{aligned}$$

La première est la somme depuis  $k$  jusqu'à  $m-k$ , des produits de  $k$  nombres entiers consécutifs; elle est égale au quotient par  $k+1$  du dernier de ces produits multiplié par le nombre entier consécutif de son dernier facteur, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{k+1} (m-2k+1)(m-2k+2)\dots(m-k-1)(m-k)(m-k+1).$$

On le vérifie pour 2, 3, 4, ..., termes, et on démontre

la généralité de proche en proche, par la méthode bien connue

$$\begin{aligned} 1.2.3\dots(k-1)k+2.3.4\dots k(k+1) &= 2.3\dots(k-1)k.(k+2) \\ &= 2.3\dots(k-1)k(k+1)(k+2) \cdot \frac{1}{k+1}; \end{aligned}$$

ajoutant le troisième terme

$$\begin{aligned} 2.3\dots k(k+1)(k+2) \frac{1}{k+1} + 3.4\dots(k+1)(k+2) \\ &= 3.4.5\dots(k+1)(k+2) \left( \frac{2}{k+1} + 1 \right) \\ &= 3.4.5\dots(k+1)(k+2)(k+3) \frac{1}{k+1}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

La seconde ligne est le produit par  $k$  de la somme depuis  $k-1$  jusqu'à  $m-k-1$ , des produits de  $k-1$  nombres entiers consécutifs; elle sera

$$\frac{k}{k} (m-2k+1)(m-2k+2) \dots (m-k-1)(m-k).$$

La somme cherchée est donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} (m-2k+1)(m-2k+2) \dots (m-k-1)(m-k)(m-k+1) \\ + (m-2k+1) \dots (m-k-1)(m-k) \\ = (m-2k+1)(m-2k+2) \dots (m-k-1)(m-k) \left( \frac{m-k+1}{k+1} + 1 \right) \\ = \frac{m+2}{k+1} (m-2k+1)(m-2k+2) \dots (m-k-1)(m-k), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait vérifier.

Le lemme qui nous a servi à cette vérification donne un théorème sur les arrangements;  $A_{\frac{m-k}{k}}$  étant le nom-

bre des arrangements de  $m - k$  lettres prises  $k$  à  $k$ , on aura

$$\frac{A_k}{k} + \frac{A_{k+1}}{k} + \frac{A_{k+2}}{k} + \dots + \frac{A_{m-k}}{k} = \frac{1}{k+1} \frac{A_{m-k+1}}{k+1},$$

et, si l'on pose  $m - k = n$ ,

$$\frac{A_k}{k} + \frac{A_{k+1}}{k} + \frac{A_{k+2}}{k} + \dots + \frac{A_n}{k} = \frac{1}{k+1} \frac{A_{n+1}}{k+1}.$$

### VI. Question 461. Limite de la série

$$\frac{1}{1.2.3\dots n} + \frac{1}{2.3\dots(n+1)} + \frac{1}{3.4.5\dots(n+2)} + \dots$$

La différence entre le premier et le dernier facteur de chaque dénominateur est  $n - 1$ ; si l'on multiplie et divise chaque terme par  $n - 1$ , on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1.2.3\dots n} \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \frac{n}{1.2.3\dots n} - \frac{1}{1.2.3\dots n} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)} - \frac{1}{1.2.3\dots n} \right), \\ & \frac{1}{2.3.4\dots(n+1)} \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \frac{n+1}{2.3.4\dots(n+1)} - \frac{2}{2.3.4\dots(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{2.3.4\dots n} - \frac{1}{3.4.5\dots(n+1)} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n+2)} \\
= & \frac{1}{n-1} \left( \frac{n+2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n+2)} - \frac{3}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n+2)} \right) \\
= & \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n+1)} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (n+2)} \right), \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(1+m)(2+m)\dots(n+m)} \\
= & \frac{1}{n-1} \left( \frac{n+m}{(1+m)(2+m)\dots(n+m)} - \frac{1+m}{(1+m)(2+m)\dots(n+m)} \right) \\
= & \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{(1+m)(2+m)\dots(n+m-1)} - \frac{1}{(2+m)\dots(n+m)} \right);
\end{aligned}$$

si l'on ajoute

$$S_m = \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} - \frac{1}{(2+m)(3+m)\dots(n+m)} \right),$$

si l'on passe à la limite, pour  $m = \infty$ ,

$$S = \frac{1}{(n-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}.$$

Avec la notation des arrangements, on a la formule indiquée par M. Vannson :

$$\frac{1}{A_n} + \frac{1}{A_{n+1}} + \frac{1}{A_{n+2}} + \dots = \frac{1}{(n-1) A_{n-1}}.$$

VII. *Vérification directe de l'identité binomiale  
et solution de la question 468.*

Je veux parler de l'identité

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \dots;$$

la méthode est analogue à celle du § V.

$$1 - \frac{m}{1} = \frac{1-m}{1} = -\frac{m-1}{1},$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} &= \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m-1}{1} = \frac{m-1}{1} \left( \frac{m}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} &= \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} \\ &\quad - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}. \end{aligned}$$

Si  $S_n$  est la somme des termes jusques et y compris

$$\mp \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2\dots n},$$

on trouve

$$S_n = \mp \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)}{1.2\dots(n-1)n};$$

car elle est vraie encore pour

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n \pm \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{1.2.3\dots(n+1)} \\ &= \pm \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n)(m-n-1)}{1.2\dots n(n+1)}. \end{aligned}$$

Quand  $m$  est un nombre entier, le dernier terme a pour valeur

$$\mp \frac{m(m-1)\dots(m-m+1)}{1\ 2\dots m},$$

$$S_m = \mp \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-m+1)(m-m)}{1\ 2\dots m} = 0,$$

à cause du facteur  $m-m$ .

On vérifie absolument de la même manière

$$0 = 1^p - \frac{m^p}{1^p} + \frac{m^p(m^p-1^p)}{1^p \cdot 2^p} - \frac{m^p(m^p-1^p)(m^p-2^p)}{1^p \cdot 2^p \cdot 3^p} + \dots$$

quand  $p$  est un nombre entier ainsi que  $m$ .

Le principal objet de cette Note était l'établissement de la formule (4) et de la formule (6); le formule (6) est précisément le sujet de la question 479. J'ai été assez surpris de voir indiquée une formule que j'avais trouvée depuis longtemps déjà, et c'est ce qui m'a décidé à publier ce petit travail. Loin de moi néanmoins l'idée de vouloir disputer à M. Stern la priorité d'une formule, assez curieuse, sans aucun doute, que nous avons trouvée séparément.