J. DE VIRIEU

Solution de la question 543

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 122-125

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__122_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 543

(voir t. XIX, p. 361);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Répétiteur à Lyon (institution Poncin).

1. x, y désignant des inconnues; a, b, c, d des quantités connues liées entre elles par les relations

$$(\mathrm{I}) \qquad a + b = c^2, \quad a - b = d^3,$$

le système

$$(\mathrm{A}) \qquad ax - by = x^2 - y^2, \quad bx + ay = 4xy$$

a les quatre solutions suivantes

$$x = \frac{1}{8}\left[(c+d)(2c^2 - 3dc + 2d^2) - cd(c-d)\sqrt{3}.i\right],$$

$$x = \frac{1}{8}\left[(c+d)(2c^2 - 3dc + 2d^2) + cd(c-d)\sqrt{3}.i\right],$$

$$x = \frac{1}{4}(c+d)(c^2 + d^2),$$

$$x = 0;$$

$$\text{ou} \quad i = \sqrt{-1}.$$

$$y = \frac{1}{8}\left[(c-d)(2c^2 + 3dc + 2d^2) + cd(c+d)\sqrt{3}.i\right],$$

$$y = \frac{1}{8}\left[(c-d)(2c^2 + 3dc + 2d^2) - cd(c+d)\sqrt{3}.i\right],$$

$$y = \frac{1}{4}(c-d)(c^2 + d^2),$$

$$y = 0.$$

2. En supposant d'abord qu'aucune des quantités a, b ne soit nulle, la valeur qui annule $4y - b$ ne peut faire partie d'une solution du système A ; ce dernier est donc équivalent au suivant :

$$x = \frac{ay}{4y - b},$$

$$\frac{y}{4y - b}[a^2 - b(4y - b)]$$
$$= \frac{y^2}{(4y - b)^2}[a + (4y - b)][a - (4y - b)]$$

ou bien

$$x = \frac{ay}{4y - b},$$

$$y(4y - b)[a^2 - b(4y - b)]$$
$$= y^2[a + (4y - b)][a - (4y - b)],$$

ce qui donne la solution $y = 0$, $x = 0$. Il reste à résoudre le système

$$(4y - b)[a^2 - b(4y - b)] = y[a + (4y - b)][a - (4y - b)],$$

$$x = \frac{ay}{4y - b},$$

qu'on remplace par le suivant

$$y = \frac{z + b}{4}, \quad x = \frac{a}{4}\frac{z + b}{z}, \quad z^3 - 3bz^2 + 3a^2 z - a^2 b = 0,$$

et enfin, en posant $z = u + b$, par

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} & u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(a^2 - b^2) = 0, \\ & y = \frac{1}{4}(u + 2b), \\ & x = \frac{a}{4}\frac{u + 2b}{u + b} \end{aligned} \right.$$

3. On a identiquement

$$u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(a^2 - b^2)$$
$$= (u + b)(u^2 - bu + 3a^2 - 2b^2) - a^2 b;$$

donc, pour les valeurs de u racines de l'équation du troisième degré du système (B),

$$\frac{1}{u+b} = \frac{u^2 - bu + 3a^2 - 2b^2}{a^2 b},$$

$$\frac{u+2b}{u+b} = \frac{(u+2b)(u^2 - bu + 3a^2 - 2b^2)}{a^2 b}$$

$$= \frac{[u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(a^2 - b^2)] + [bu^2 - b^2 u + 4ba^2 - 2b^3]}{a^2 b}$$

$$= \frac{u^2 - bu + 4a^2 - 2b^2}{a^2}.$$

Le système (B) est donc remplacé par le suivant

$$(\mathrm{C}) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(a^2 - b^2) = 0, \\ & y = \frac{1}{4}(u + 2b), \\ & x = \frac{1}{4}\left(\frac{u^2 - bu + 4a^2 - 2b^2}{a}\right). \end{aligned} \right.$$

4. On sait que les racines de

$$v^3 + 3pv + 2q = 0$$

se déduisent de la formule

$$\alpha \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \alpha^2 \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}},$$

en remplaçant successivement α par chacune des racines cubiques de l'unité positive. L'application de cette formule à la dernière équation en u donne

$$u = \alpha \sqrt[3]{-b\,(a^2-b^2)+\sqrt{+b^2\,(a^2-b^2)^3+(a^2-b^2)^3}}$$

$$+\alpha^2 \sqrt[3]{-b\,(a^2-b^2)-\sqrt{+b^2\,(a^2-b^2)^2+(a^2-b^2)^3}}$$

$$= \alpha\,\sqrt[3]{(a-b)\,(a^2-b^2)}+\alpha^2\,\sqrt[3]{(-a-b)\,(a^2-b^2)}$$

$$= \sqrt[3]{(a^2-b^2)}\left[\alpha\sqrt[3]{(a-b)}-\alpha^2\sqrt[3]{(a+b)}\right];$$

ou enfin, en tenant compte des relations (I),

$$u = \alpha d^2 c - \alpha^2 dc^2.$$

5. Substituant dans l'équation (C) cette valeur de u, on a

$$y = \frac{1}{4}\,(c^3 - \alpha^2 dc^2) + \alpha d^2 c - d^3),$$

$$x = \frac{1}{4}\,\frac{c^6+\alpha^2 dc^5+\alpha d^2 c^4+2d^3c^3+\alpha^2 d^4 c^2+\alpha d^5 c+a^6}{c^3+d^3},$$

ou

$$y = \frac{1}{4}\,(c^3 - \alpha^2 dc^2 + \alpha d^2 c - d^3),$$

$$x = \frac{1}{4}\,(c^3 + \alpha^2 dc^2 + \alpha d^2 c + d^3).$$

Posant tour à tour

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}.i}{2},\quad \frac{-1-\sqrt{3}.i}{2},\quad \alpha = 1,$$

on a les trois premières solutions du n° 1.

Les formules de ce numéro subsistent encore quand une des quantités a, b est nulle ou que toutes deux le sont : ces formules sont donc générales.