Nouvelles annales de mathématiques

Propriétés segmentaires de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes ou à des axes parallèles aux asymptotes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 113-118

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__113_1>

PROPRIÉTÉS SEGMENTAIRES DE L'HYPERBOLE
rapportée à ses asymptotes ou à des axes parallèles aux asymptotes.

Rappelons quelques définitions et quelques principes déjà énoncés.

1. *Points-racines*. Ce sont des points situés sur une droite et dont les distances à un point fixe, aussi sur cette droite, représentent les racines d'une équation, ou peuvent les représenter. Les points-racines *multiples* correspondent à des racines égales.

2. *Segment,* intervalle entre deux points-racines.

3. *Points* analytiques *conjugués*, points-racines imaginaires correspondant à des racines imaginaires conjuguées; le segment compris entre deux points *analytiques* est réel.

4. *Produit segmentaire,* un produit de segments où chaque racine ne se présente qu'*une fois*.

Chaque segment renfermant deux racines, il s'ensuit que dans un produit segmentaire il y a deux fois autant de racines que de segments.

5. *Rapport segmentaire :* c'est le rapport entre deux produits segmentaires renfermant chacun les mêmes racines différemment combinées.

Le nombre des segments dans chaque produit donne le *quantième* du rapport; ainsi il y a des rapports doubles, triples, etc.

Lorsqu'un point-racine est à l'infini, il y a dans les deux termes du rapport un segment infini, qu'on peut supprimer; le quantième s'abaisse d'une unité; le rapport double devient simple, etc.

6. *Rapport fasciculaire :* si d'un point *fixe* on mène des droites à tous les points-racines qui entrent dans un rapport segmentaire, on obtient autant de triangles qu'il y a de segments; triangles de même hauteur; remplaçant donc les segments pris pour bases par les aires de ces triangles et les aires par le produit des deux autres côtés et par le sinus de l'angle qu'ils comprennent, le rapport segmentaire sera remplacé par un rapport entre des sinus

égal au rapport segmentaire. Le rapport entre les sinus est un rapport *fasciculaire*.

7. *Corollaire*. Les rapports segmentaires sont *projectifs*. Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$, un système de points-racines, qu'on les projette sur un plan en $b_1, b_2, b_3, \ldots$; un rapport segmentaire formé avec les a est égal au rapport segmentaire analogue formé avec les b.

Les rapports fasciculaires sont aussi *projectifs*.

Ces deux principes sont d'une extrême fécondité et permettent de transporter des propriétés segmentaires d'une figure dans la figure projetée, ou, comme s'exprime Newton dans son *Ombre*, par exemple, du cercle dans les trois autres coniques, etc.

8. *Système réciproque des points-racines :* lorsque les racines peuvent se partager en couples tels, que dans chaque couple le produit de deux racines soit constant, le système des points-racines est dit *réciproque*.

Desargues, qui le premier a considéré ce système, l'a surnommé en *involution*, parce qu'en effet une moitié renferme l'autre moitié.

9. Soit

$$x_2 - x_1 = d;$$

alors

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = -\frac{d}{x_1 x_2},$$

de là on conclut : si dans un produit segmentaire on remplace chaque racine par sa réciproque, ce second produit est égal au premier divisé par le produit des racines; les deux produits sont de mêmes signes si le quantième est pair, et de signes opposés si le quantième est impair.

10. *Corollaire*. Si dans un rapport segmentaire on

remplace chaque racine par sa réciproque, ce second rapport est égal au premier.

Les applications au système de points-racines en involution sont intuitives.

11. Soient une hyperbole de centre O et rapportée à ses asymptotes, OP l'abscisse et PM l'ordonnée d'un point M de l'hyperbole; portons PM sur l'axe des abscisses de O en P_1, le produit $OP_1 . OP$ est constant; conséquemment les couples de points P, P_1 forment un système en involution; au centre O correspond un point situé à l'infini soit à droite, soit à gauche; les deux nappes donnent le même système en involution; car $xy = -x - y$ et le centre appartient à la fois aux deux systèmes et les sépare; aux sommets les abscisses sont égales aux ordonnées; alors le point P coïncide avec P_1; ce sont les deux points *doubles* situés à égale distance du centre, la distance d'un point double au centre se nomme la *moyenne* (géométrique) de l'involution.

12. Soient a, x, y, b quatre points-racines; a et b sont fixes et x et y sont variables; supposons que le rapport segmentaire *double* soit égal à la constante c; on aura

$$(y - x)(b - a) = c(x - a)(b - y);$$

posons

$$\frac{a - b}{c} = p;$$

on aura

$$xy - y(a + p) + x(p - b) + ab = 0,$$

qui représente une hyperbole rapportée à des axes parallèles aux asymptotes et *vice versâ*, une telle hyperbole représente un couple de points variables formant avec deux points fixes un rapport segmentaire double, constant, l'abscisse du centre est $a + p$ et l'ordonnée $b - p$.

Si l'on rapporte cette hyperbole à ses asymptotes, on obtient

$$xy = (b - p)(a + p),$$

les points sont distribués sur le second axe des x comme sur le premier, mais on voit qu'ils sont en involution relativement au centre. Donc, lorsqu'un couple de points *variables* forme un rapport segmentaire *double* toujours le même, avec deux points fixes, ces points forment un système en *involution*, et réciproquement tout système en involution peut être produit par un tel système de quatre points.

13. Un système de points en involution est *projectif*, car il peut être engendré par des rapports segmentaires constants qui soient projectifs (§ 7).

Les points doubles restent tels en projection, mais non le centre d'involution; car le centre de la perspective d'une conique n'est pas la perspective du centre; mais ayant les deux points doubles, le milieu de leur intervalle donne le centre d'involution. D'après ce principe on transporte les propriétés involutives d'une figure dans sa perspective.

Dans un système en involution tous les cercles décrits sur l'intervalle des deux points conjugués, comme diamètre, ont même axe radical, et il passe par le centre d'involution.

14. Soit

$$Ay^2 + Bay + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

l'équation d'une conique; le coefficient B variant seul, toutes les coniques passent par les mêmes quatre points fixes situés sur les axes. Une parallèle à l'axe des x coupe ces coniques en un système de couples en involution; car y étant constant, le produit des abscisses dans chaque couple est $\frac{Ay^2 + Dy + F}{C}$; par conséquent, le produit est constant. Lorsque la transversale rencontre les deux axes, passant par les points fixes, on peut mettre la figure en perspective de telle sorte que la transversale devienne parallèle à l'un des axes; donc le théorème subsiste pour une transversale quelconque (§ 13).

Ce théorème est de Desargues; il a démontré le premier que les six points d'intersection des côtés et des diagonales d'un quadrilatère, ou bien des côtés d'un quadrilatère et d'une conique circonscrite, par une transversale, sont en involution. Sturm a généralisé le théorème.

15. Un rapport segmentaire de quantième quelconque étant *donné,* si deux racines seulement sont inconnues, elles représentent les coordonnées d'une hyperbole, rapportée à ses asymptotes.

16. Le rapport segmentaire binaire égal à 1 se rencontre dans les accords musicaux : aussi les Grecs ont-ils donné le nom d'harmonique à ce rapport. D'après des considérations algébriques de position, M. Chasles donne ce nom au rapport égal à — 1, et nomme *anharmonique* tout rapport qui n'est pas égal à — 1. Cette dernière expression est adoptée en France, en Angleterre, en Italie, mais pas en Allemagne.