NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sommation de séries infinies ; d'après M. Schlomilch

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 108-110

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__108_1>

SOMMATION DE SÉRIES INFINIES;

D'APRÈS M. SCHLOMILCH.

(Zeitschrift, 5e année, page 133, mars 1860.)

1. Soit

$$f(x) = \frac{x}{1^{1+x}} + \frac{x}{2^{1-x}} + \frac{x}{3^{1+x}} + \dots$$

$f(x)$ est une fonction inconnue, mais qui a une valeur connue pour $x = 0$, valeur qui n'est pas nulle, comme semble l'indiquer le développement que la décomposition suivante met en évidence

$$f(x) = x\left(\frac{1}{1^{1+x}} + \frac{1}{2^{1+x}} + \frac{1}{3^{1+x}} + \dots\right).$$

Posant

$$x = 0,$$

on obtient

$$f(0) = 0.\infty,$$

expression indéterminée; on la détermine ainsi.

On a

$$\frac{x}{(2p)^{1+x}} - \frac{1.x}{2^x.p^{1+x}} = \frac{-x}{(2p)^{1+x}},$$

donc

$$f\left(1-\frac{2}{2^{1+x}}\right)$$

$$=f(x)\left(1-\frac{1}{2^x}\right)=\frac{x}{1^{1+x}}-\frac{x}{2^{1+x}}+\frac{x}{3^{1-x}}-\frac{x}{4^{1-x}}+\ldots,$$

d'où

$$f(x)=\frac{2^x}{\frac{2^x-1}{x}}\left(\frac{1}{1^{1+x}}-\frac{1}{2^{1+x}}+\frac{1}{3^{1+x}}-\frac{1}{4^{1+x}}+\ldots\right).$$

Faisons

$$x=0,$$

on trouve

$$f(0)=\frac{1}{\log 2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)=1.$$

Ainsi, dans le cas actuel,

$$0.\infty=1.$$

2.

$$\varphi(x)=\frac{\sin x}{1^x}+\frac{\sin\frac{1}{2}x}{2^x}+\frac{\sin\frac{1}{3}x}{3^x};$$

il s'agit de trouver la valeur de $\varphi(0)$.

Si x désigne un arc du premier quadrant, on a l'inégalité

$$x>\sin x>x-\frac{1}{6}x^3.$$

Remplaçant les sinus par les arcs, on a

$$\varphi(x)<\frac{x}{1^{1+x}}+\frac{x}{2^{1+x}}+\frac{x}{3^{1+x}}+\ldots,$$

$$\varphi x>\frac{x}{1+x}+\frac{x}{2^{1+x}}+\frac{x}{3^{1+x}}+\ldots-\frac{1}{6}x^3\left(\frac{1}{1^{x+3}}+\frac{1}{2^{x+3}}+\ldots\right).$$

Posant

$$x = 0,$$

ces deux séries s'approchent de l'unité.

Donc

$$\varphi(0) = 1.$$

3.

$$\varphi(x) = \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+2x)^2} + \frac{x}{(1+3x)^2} + \ldots,$$

série convergente pour toute valeur positive de x;

$$\varphi x = x\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+2x)^2} + \ldots\right].$$

Faisant

$$x = 0,$$

on a

$$\varphi(0) = 0.\infty \text{ valeur indéterminée,}$$

$$\varphi(x) - \varphi(2x) = \frac{x}{(1-x^2)} - \frac{x}{(1+2x]^2} + \frac{x}{(1+3x)^2}$$

$$- \frac{x}{(1+4x)^2} + \ldots$$

$$= \frac{2x^2+3x^3}{(1+x)^2(1+2x)^2} + \frac{2x^2+5x^3}{(1+3x)^2(1+4x)^2} + \ldots;$$

donc

$$\varphi x > \varphi(2x),$$

$$\varphi(1) < \varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi\left(\frac{1}{4}\right) < \varphi\left(\frac{1}{8}\right) < \ldots < \varphi(0),$$

$$\varphi(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = 0{,}644934,$$

donc

$$\varphi(0) > 0{,}644934.$$

Ainsi x décroissant, $\varphi(x)$ augmente.