

Sommation de séries infinies ; d'après M. Schlomilch

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 108-110

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__108_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOMMATION DE SÉRIES INFINIES;

D'APRÈS M. SCHLOMILCH.

(Zeitschrift, 5^e année, page 133, mars 1860.)

1. Soit

$$f(x) = \frac{x}{1^{1+x}} + \frac{x}{2^{1+x}} + \frac{x}{3^{1+x}} + \dots$$

$f(x)$ est une fonction inconnue, mais qui a une valeur connue pour $x = 0$, valeur qui n'est pas nulle, comme semble l'indiquer le développement que la décomposition suivante met en évidence

$$f(x) = x \left(\frac{1}{1^{1+x}} + \frac{1}{2^{1+x}} + \frac{1}{3^{1+x}} + \dots \right).$$

Posant

$$x = 0,$$

on obtient

$$f(0) = 0 \cdot \infty,$$

expression indéterminée; on la détermine ainsi.

On a

$$\frac{x}{(2p)^{1+x}} - \frac{1x}{2^x \cdot p^{1+x}} = \frac{-x}{(2p)^{1+x}},$$

donc

$$f\left(1 - \frac{2}{2^{1+x}}\right) \\ = f(x) \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) = \frac{x}{1^{1+x}} - \frac{x}{2^{1+x}} + \frac{x}{3^{1+x}} - \frac{x}{4^{1+x}} + \dots,$$

d'où

$$f(x) = \frac{2^x}{2^x - 1} \left(\frac{1}{1^{1+x}} - \frac{1}{2^{1+x}} + \frac{1}{3^{1+x}} - \frac{1}{4^{1+x}} + \dots \right).$$

Faisons

$$x = 0,$$

on trouve

$$f(0) = \frac{1}{\log 2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = 1.$$

Ainsi, dans le cas actuel,

$$0 \cdot \infty = 1.$$

2.

$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{1^x} + \frac{\sin \frac{1}{2}x}{2^x} + \frac{\sin \frac{1}{3}x}{3^x};$$

il s'agit de trouver la valeur de $\varphi(0)$.

Si x désigne un arc du premier quadrant, on a l'inégalité

$$x > \sin x > x - \frac{1}{6}x^3.$$

Remplaçant les sinus par les arcs, on a

$$\varphi(x) < \frac{x}{1^{1+x}} + \frac{x}{2^{1+x}} + \frac{x}{3^{1+x}} + \dots,$$

$$\varphi x > \frac{x}{1+x} + \frac{x}{2^{1+x}} + \frac{x}{3^{1+x}} + \dots - \frac{1}{6}x^3 \left(\frac{1}{1^{x+3}} + \frac{1}{2^{x+3}} + \dots \right).$$

Posant

$$x = 0,$$

ces deux séries s'approchent de l'unité.

Donc

$$\varphi(0) = 1.$$

3.

$$\varphi(x) = \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+2x)^2} + \frac{x}{(1+3x)^2} + \dots,$$

série convergente pour toute valeur positive de x ;

$$\varphi x = x \left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+2x)^2} + \dots \right].$$

Faisant

$$x = 0,$$

on a

$$\varphi(0) = 0 \cdot \infty \text{ valeur indéterminée,}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(2x) &= \frac{x}{(1-x^2)} - \frac{x}{(1+2x)^2} + \frac{x}{(1+3x)^2} \\ &\quad - \frac{x}{(1+4x)^2} + \dots \\ &= \frac{2x^2 + 3x^3}{(1+x)^2(1+2x)^2} + \frac{2x^2 + 5x^3}{(1+3x)^2(1+4x)^2} + \dots; \end{aligned}$$

donc

$$\varphi x > \varphi(2x),$$

$$\varphi(1) < \varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi\left(\frac{1}{4}\right) < \varphi\left(\frac{1}{8}\right) < \dots < \varphi(0),$$

$$\varphi(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = 0,644934,$$

donc

$$\varphi(0) > 0,644934.$$

Ainsi x décroissant, $\varphi(x)$ augmente.