NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1861.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie, Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

TOME VINGTIÈME

AUGMENTÉ D'UN

BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1861

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

QUESTIONS D'EXAMEN;

PAR UN PROFESSEUR.

Soit proposé de trouver le lieu des points pour lesquels deux normales à une conique font un angle donné.

Comme par un point donné on peut mener plus de deux normales à une conique, il suffira de remarquer que l'angle des tangentes étant égal à celui des normales, ou bien supplémentaire, il sera facile de déduire le lieu demandé, du lieu formé par les points d'où l'on peut mener à une conique deux tangentes faisant un angle donné, et l'on reconnaîtra tout de suite que dans les deux cas l'équation appartient à un angle donné ou à son supplément.

Pour le problème des tangentes, si, le point du lieu étant (α, β), on élimine y entre l'équation de la conique et celle de la droite $y - \beta = t(x - \alpha)$, en exprimant que les valeurs de x sont égales, on obtiendra une équation

$$Pt^2 + Qt + R = 0,$$

où P, Q, R sont fonctions de α et β. L'équation du lieu sera, en représentant par t_1, t_2 les coefficients angulaires des deux tangentes et par m la tangente de leur angle,

$$\frac{t_1 - t_2}{1 + t_1 t_2} = m,$$

ou encore, en faisant disparaître le radical de

$$t_1 - t_2 = \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{P},$$

$$(1) \qquad Q^2 - 4PR = m^2(P + R)^2,$$

de sorte que l'équation ne changeant pas avec le signe de m, elle convient à des angles supplémentaires.

Comme on peut déterminer les coefficients angulaires des normales $-\frac{1}{t_1}$, $-\frac{1}{t_2}$ en α et β, et de même les coordonnées des points de contact des tangentes, on aura deux équations (2), (3) en α, β, X et Y en représentant par (X, Y) le point de croisement des normales.

L'élimination de α et β entre (1), (2) et (3) donnera le lieu. Pour la parabole le calcul est assez simple, l'élimination de β conduira à deux équations de forme

$$\alpha^3 + L\alpha^2 + M = 0, \quad \alpha^2 + N\alpha + O = 0,$$

où L, M, N, O sont des fonctions de X et Y, et l'on tombera sur une équation du quatrième degré.

L'élimination est probablement plus longue pour le cas des coniques à centre.

M. Serret a proposé le cas de la parabole et de l'angle dont la tangente $m = 1$.

QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 1860);

PAR M. F.-A. BEYNAC,
Professeur.

I. *Quel est le plus grand des nombres*

$$\sqrt{2},\quad \sqrt[3]{3},\quad \sqrt[4]{4},\ldots ?$$

Considérons les deux nombres $\sqrt[n]{n}$, $\sqrt[n+1]{n+1}$; pour les comparer, réduisons-les au même indice, il vient

$$\sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}},\quad \sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n}.$$

On peut comparer les quantités soumises aux radicaux, après les avoir divisées par n^n, et on a les deux nombres n et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Or,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1-\frac{1}{n}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3} + \ldots;$$

en outre, on connaît les résultats

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots < 3.$$

Cela posé, observons que pour $n=2$ la seconde racine ou $\sqrt[3]{3}$ est plus grande que la première ou $\sqrt[2]{2}$; pour $n=3$ on a $n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, donc la première racine ou $\sqrt[3]{3}$ est plus grande que la seconde ou $\sqrt[4]{4}$; pour $n>3$ la pre-

mière est toujours plus grande que la suivante, on a donc

$$\sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \ldots$$

Donc $\sqrt[3]{3}$ est le plus grand terme de la série.

II. *Toute puissance entière d'une somme de deux carrés est elle-même une somme de deux carrés.*

$$(a^2 + b^2)^m = A^2 + B^2.$$

En effet, on a

$$(a + b\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1},$$
$$(a - b\sqrt{-1})^m = A - B\sqrt{-1}.$$

Multipliant membre à membre, on a

$$(a^2 + b^2)^m = A^2 + B^2.$$

III. *Calcul de la somme des coefficients, pris de 4 en 4, dans le développement de* $(x+a)^m$.

La question renferme quatre inconnues, car on peut faire la somme à partir du premier terme, du deuxième, du troisième ou du quatrième.

Posons $x = 1$, $a = \sqrt{-1}$, on a

$$(1 + \sqrt{-1})^m = 1 + m\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cdot \sqrt{-1} + \ldots.$$

Désignons par S_1 la somme des coefficients de rang $4n + 1$, n pouvant être nul, par S_2, S_3, S_4 celles de rangs $4n + 2$, $4n + 3$, $4n$. On a

$$(1) \qquad (1 + \sqrt{-1})^m = S_1 + S_2\sqrt{-1} - S_3 - S_4\sqrt{-1},$$
$$(2) \qquad (1 - \sqrt{-1})^m = S_1 - S_2\sqrt{-1} - S_3 + S_4\sqrt{-1}.$$

On sait que la somme 2^{m-1} des coefficients des termes de rang pair égale celle des coefficients des termes de rang impair, donc

$$S_1 + S_3 = 2^{m-1}, \quad S_2 + S_4 = 2^{m-1}.$$

Ajoutant et retranchant successivement (1) et (2), on trouve

$$S_1 - S_3 = \frac{(1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m}{2},$$

$$S_2 - S_4 = \frac{(1+\sqrt{-1})^m - (1-\sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}.$$

De ces résultats on conclut facilement

$$S_1 = \frac{2^m + (1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m}{4},$$

$$S_3 = \frac{2^m - (1+\sqrt{-1})^m - (1-\sqrt{-1})^m}{4},$$

$$S_2 = \frac{2^m\sqrt{-1} + (1+\sqrt{-1})^m - (1-\sqrt{-1})^m}{4\sqrt{-1}},$$

$$S_4 = \frac{2^m\sqrt{-1} - (1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m}{4\sqrt{-1}}.$$

Ces quatre valeurs sont réelles, car $\sqrt{-1}$ disparaît dans les réductions.

IV. *Dans quelles conditions le quotient*

$$\frac{(x+1)^m - x^m - 1}{x^2 + x + 1}$$

est-il entier?

Il faut et il suffit que les racines de l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0$$

vérifient l'équation

$$(x+1)^m - x^m - 1 = 0.$$

Ces racines sont les imaginaires conjuguées

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

il suffit de trouver les conditions pour que l'une d'elles vérifie la deuxième équation. Observons que ces valeurs sont les racines imaginaires cubiques de l'unité

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \alpha^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

de plus

$$\alpha + 1 = -\alpha^2.$$

Cherchons donc les valeurs de m pour lesquelles on a

(1) $$(-\alpha^2)^m - \alpha^m - 1 = 0.$$

m désignant un entier quelconque peut être mis sous l'une des formes

$$6p, \quad 6p \pm 1, \quad 6p \pm 2, \quad 6p + 3.$$

1° $$m = 6p;$$

$$(-\alpha^2)^{6p} = 1, \quad -\alpha^{6p} = -1;$$

le premier membre de (1) se réduit à -1.

2° $$m = 6p + 1;$$

$$(-\alpha^2)^{6p+1} = 1 \times (-\alpha^2)^1 = -\alpha^2, \quad -\alpha^{6p+1} = -\alpha;$$

le premier membre de (1) se réduit à $-\alpha^2 - \alpha - 1$, quantité nulle, puisque α est racine de l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

3° $$m = 6p - 1;$$

$$(-\alpha^2)^{6p-1} = (-\alpha^2)^{-1} = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad (-\alpha)^{6p-1} = -\frac{1}{\alpha};$$

le premier membre de (1) se réduit à $-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}-1$;
comme on a

$$\alpha\alpha^2=1, \quad \frac{1}{\alpha^2}=\alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha}=\alpha^2,$$

le premier membre est $-\alpha-\alpha^2-1$, quantité nulle.

4° $$m=6p+2;$$

$$(-\alpha^2)^{6p+2}=(-\alpha^2)^2=\alpha, \quad (-\alpha)^{6p+2}=-\alpha^2,$$

le premier membre de (1) se réduit à $\alpha-\alpha^2-1$, quantité qui n'est pas nulle.

5° $$m=6p-2;$$

le premier membre se réduit à $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}-1$, ou $\alpha^2-\alpha-1$, quantité qui n'est pas nulle.

6° $$m=6p+3;$$

le premier membre de (1) se réduit à $(-\alpha^2)^3-\alpha^3-1$ ou -3.

Pour $m=3$, on a

$$3x^2+3x=0,$$

équation dont les racines sont réelles. Donc, la condition nécessaire et suffisante pour que le quotient proposé soit entier est

$$m=6p\pm 1.$$

V. *Appliquer la formule du binôme au développement de* $(a+b)^{-1}$.

Dans le développement

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\ldots$$

remplaçons m par -1, on trouve

$$(a+b)^{-1}=a^{-1}-a^{-2}b+a^{-3}b^2-a^{-4}b^3+\ldots$$
$$+(-1)^p a^{-1-p}b^p+\ldots,$$

ou bien

$$(a+b)^{-1}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\ldots+(-1)^p\frac{b^p}{a^{p+1}}+,\ldots$$

Le second membre est composé d'un nombre illimité de termes, puisque les exposants de a vont en croissant au delà de toute limite en valeur absolue.

Le premier membre a une valeur finie $\frac{1}{a+b}$, il en résulte qu'il ne peut être égal au second que tout autant que celui-ci forme une série convergente, ce qui ne peut avoir lieu que si l'on suppose a plus grand que b. Pour $a>b$, le second membre est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante indéfiniment dont la raison est $-\frac{1}{a}$, par conséquent elle a pour valeur limite $\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{b}{a}}=\frac{1}{a+b}$.

Il résulte de cette analyse que la formule du binôme est applicable au développement de $(a+b)^{-1}$, pourvu que la série soit ordonnée par rapport aux exposants négatifs croissants en valeur absolue du plus grand des deux termes a et b.

VI. *Prouver que le logarithme népérien de*

$$\cos x+\sqrt{-1}\sin x$$

est $x\sqrt{-1}$.

Prenant la dérivée de L $(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)$, on a

$$\text{dériv.}\,\mathrm{L}(\cos x+\sqrt{-1}\sin x)=\frac{-\sin x+\sqrt{-1}\cos x}{\cos x+\sqrt{-1}\sin x}.$$

Multipliant les deux termes du second membre par la conjuguée du dénominateur et réduisant, on trouve

$$\text{dériv.}\,\mathrm{L}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) = \sqrt{-1}.$$

On trouve de même

$$\text{dériv.}\,\mathrm{L}(\cos x - \sqrt{-1}\sin x) = -\sqrt{-1}.$$

La fonction primitive de $\sqrt{-1}$ est $x\sqrt{-1} + \mathrm{C}$; pour $x = 0$, le logarithme est nul, donc $\mathrm{C} = 0$, et l'on a

$$\mathrm{L}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) = x\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{L}(\cos x - \sqrt{-1}\sin x) = -x\sqrt{-1}.$$

Observation. Remontant des logarithmes aux nombres, on déduit de ces deux résultats

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}},$$

$$\cos x - \sqrt{-1}\sin x = e^{-x\sqrt{-1}};$$

par suite

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{\left(e^{x\sqrt{+1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1}}.$$

Pour $x = 2\pi$,

$$\cos 2\pi = 1, \quad \sin 2\pi = 0,$$

et l'on a

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1.$$

Conséquences. 1° On a trouvé

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2.3} + \ldots;$$

remplaçant x par $x\sqrt{-1}$, on a, pour

$$e^{x\sqrt{-1}} \text{ ou } \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

le développement

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots;$$

égalant séparément les parties réelles et les coefficients des imaginaires

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

2° *Le logarithme d'une quantité négative est une quantité imaginaire.*

Toute quantité imaginaire peut se mettre sous la forme

$$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos x + \sqrt{-1}\sin x),$$

sous la condition

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On a donc

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = \frac{a + b\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = e^{x\sqrt{-1}}.$$

Observant que l'on a identiquement

$$\sqrt{a^2 + b^2} = e^{\mathrm{L}\sqrt{a^2 + b^2}},$$

on peut écrire

$$a + b\sqrt{-1} = \sqrt{a^2 + b^2}.\ e^{x\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1} + \mathrm{L}\sqrt{a^2 + b^2}};$$

remplaçant x par $2k\pi + x$, il vient

$$a + b\sqrt{-1} = e^{(2k\pi + x)\sqrt{-1} + \mathrm{L}\sqrt{a^2+b^2}},$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{L}(a + b\sqrt{-1}) = (2k\pi + x)\sqrt{-1} + \mathrm{L}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Si on suppose successivement

$$b = 0, \quad a > 0,$$
$$b = 0, \quad a < 0,$$

on trouve

$$\mathrm{L}a = \mathrm{L}a + 2k\pi\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{L}(-a) = \mathrm{L}a + (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Ces résultats apprennent qu'une quantité a une infinité de logarithmes, et que le logarithme d'une quantité négative est nécessairement imaginaire.

THÉORÈMES SUR LES RACINES ÉGALES;

PAR M. L. PAINVIN.

1° Pour qu'une fonction homogène à deux variables et de degré n soit la puissance $n^{ième}$ d'un binôme, il faut et il suffit que son *hessien* soit identiquement nul.

2° Pour qu'une fonction homogène à deux variables et de degré n admette une racine du degré $(n-1)$ de multiplicité, lorsqu'on l'égale à zéro, il faut et il suffit que son *hessien* soit la puissance exacte d'un binôme, ou, en d'autres termes, que le *hessien* du *hessien* soit identiquement nul.

3° Pour qu'une fonction homogène à deux variables soit le produit des puissances de deux binômes, par exemple

$$u = (m_1 x_1 + m_2 x_2)^p (n_1 x_1 + n_2 x_2)^q,$$

il faut et il suffit que le carré de la fonction soit exactement divisible par le *hessien* de cette fonction, et, en outre, que le rapport du hessien du quotient à ce même quotient soit identiquement constant.

SUR LA DÉNOMINATION DU LITRE.

En grec λιτρα est un poids, livre de douze onces; 1 décimètre cube d'eau distillée à 4° pèse 1 kilogramme, et l'on a transporté à ce volume le nom *litre* d'un poids grec. C'était aussi une petite monnaie de la valeur de deux oboles, à peu près 30 centimes.

SUR LA QUESTION DU GRAND CONCOURS DE 1859

(voir t. XVIII, p. 295).

Cette question a été résolue en 1855, pour la parabole, par le révérend G. Salmon (*Conic Sections*, p. 194, 3^e^ édit., 1855), et le même auteur donne les formules pour résoudre le cas général, p. 161.

(Communiqué par M. DESBOVES.)

Le savant géomètre anglais n'a mentionné cette question qu'en passant, pour servir d'exemple, se contentant d'indiquer des formules qui mènent immédiatement à la solution générale, et qu'on n'ignorait pas ici en 1855.

Mon fils le premier a donné une solution analytique générale développée (t. XVIII, p. 77) de la question **445** que j'ai proposée, question et solution dont les auteurs de la question du grand concours paraissent n'avoir pas eu connaissance. M. de Jonquières a donné une solution géométrique (t. XVIII, p. 263).

M. Desboves a généralisé (t. XVIII, p. 445; t. XIX, p. 47), et a eu l'heureuse idée d'introduire les angles d'anomalie excentrique des astronomes, dont Legendre a tiré un si bon parti dans la théorie des fonctions elliptiques, et dont M. Grunert a fait diverses applications aux coniques à l'aide de ces angles (t. XIX, p. 255). M. Desboves parvient à de belles propriétés, qu'il serait pénible de démontrer par une autre voie.

THÉORÈME SUR LES SURFACES RÉGLÉES (CAYLEY);

COMMUNIQUÉ PAR M. MOUTARD.

Lemme. Tout plan passant par un élément rectiligne d'une surface réglée *non développable* est tangent à la surface et n'a qu'un point de contact situé sur la droite.

Dans une surface développable, on ne peut mener par un élément rectiligne qu'un seul plan tangent, et le contact a lieu tout le long de la droite.

Définition. La *classe* d'une surface est déterminée par le *nombre* de plans tangents qu'on peut, généralement parlant, mener par une droite à cette surface.

THÉORÈME. *La classe d'une surface réglée non développable est égale au degré de cette surface* (CAYLEY).

Démonstration. Soit une surface de degré m; une droite donnée coupe la surface en m points. Par chaque point d'intersection passe un élément rectiligne; par chacun de ces éléments et par la droite, on peut mener un plan tangent (lemme, première partie); il y a donc autant de plans tangents que de points d'intersection; donc, etc. Ce raisonnement n'a plus lieu lorsque la surface est développable (lemme, seconde partie).

SOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1860);

Par M. TARATTE,
Professeur au lycée de Bar-le-Duc.

Énoncé. Étant donnée la parabole CAB, la sécante MAB se meut sous la condition que les normales menées à la parabole par les points A et B se coupent en un point C de cette courbe. Par ce point C, on mène la tangente CM qui coupe la sécante MAB en un point M.

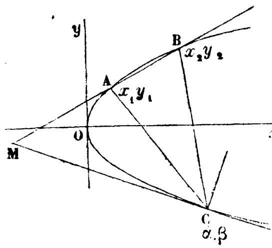
Cela posé, on demande de trouver l'équation de la courbe décrite par le point M, quand la sécante MAB prend toutes les positions compatibles avec la condition à laquelle elle est assujettie; on construira cette équation, qui est du troisième degré.

Solution. Par le point C passent trois normales à la parabole; or quand on veut mener par un point α, β une normale à la parabole, l'analyse donne une équation du troisième degré

$$(1) \qquad y'^3 - 2p(\alpha - p)y' - 2p^2\beta = 0,$$

y' étant l'ordonnée du point de rencontre de la normale avec la courbe.

Si nous exprimons que le point α, β est sur la para-



bole, l'équation (1) sera vérifiée par $y' = \beta$, et son premier membre pourra se diviser par $y - \beta$: ce qui donnera la relation

(2) $$y'^2 + \beta y' + 2p^2 = 0,$$

à laquelle doivent constamment satisfaire les coordonnées des points A, B.

L'équation de la sécante MAB est

(3) $$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1),$$

et l'équation de la tangente en C est

(4) $$\beta y = p\left(x + \frac{\beta^2}{2p}\right).$$

Nous avons en outre deux relations

(5) $$y_1^2 = 2px_1,$$

(6) $$y_2^2 = 2px_2.$$

Or il s'agit d'éliminer entre les équations (2), (3), (4), (5), (6) les quantités variables x_1, y_1, x_2, y_2, pour avoir l'équation du lieu.

Des équations (5) et (6) je tire

$$(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2p(x_1 - x_2)$$

ou, en vertu de la condition (2),

$$-\beta(y_1 - y_2) = 2p(x_1 - x_2),$$

d'où

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-2p}{\beta}.$$

L'équation (3) de la sécante devient

$$y - y_1 = \frac{-2p}{\beta}(x - x_1)$$

et donne

$$\beta y_1 + 2px_1 = 2px + \beta y;$$

mais l'équation (2) donne aussi, à cause de l'équation (5),

$$\beta y_1 + 2px_1 = -2p^2,$$

donc

$$2px + \beta y = -2p^2,$$

d'où

$$\beta = -\frac{2p(x+p)}{y}.$$

Remplaçant enfin β par sa valeur dans l'équation (4), on aura l'équation du lieu

$$(a) \qquad y^2(2p + 3x) + 2p(p + x)^2 = 0.$$

Construction. L'équation (4) montre que la courbe est symétrique par rapport à Ox, ce qui était facile à prévoir : on en tire

$$y = \pm \frac{2p(p+x)}{\sqrt{-2p(2p+3x)}}.$$

La courbe n'a aucun point du côté des x positifs; elle a pour asymptote la droite $x = -\frac{2p}{3}$, et rencontre l'axe des x au point $x = -p$; puis elle s'étend indéfiniment au-dessus et au-dessous de Ox, car si on divise les deux termes de la valeur de y par x, on a

$$y = \pm \frac{2p\left(\frac{p}{x}+1\right)}{\sqrt{-2p\left(\frac{2p}{x^2}+\frac{3}{x}\right)}}, \ldots,$$

et pour $x = -\alpha$, on voit que y est infini.

D'ailleurs l'équation (a) donne pour le coefficient angulaire de la tangente

$$\alpha = -\frac{3y^2 + 4p(p+x)}{2p+3x},$$

et pour $x = -p$, on voit que $\alpha = 0$; ce point est une inflexion de la courbe.

Note du Rédacteur. Il y a encore une asymptote parabolique.

Lorsque $B^2 > p^2$, y est imaginaire; cependant il y a des points réels dans la cubique (M. Housel).

En faisant

$$\beta = 0$$

dans l'équation de la sécante, on a

$$x = -p;$$

ainsi la sécante passe par un point fixe situé sur l'axe focal (M. Gerono). Toutes les sécantes passant par le même point, ce problème se rattache à celui du grand concours de l'an dernier.

Le coefficient angulaire de la sécante est

$$\frac{-2p}{\beta} = \frac{-\beta}{\alpha},$$

celui de la tangente est

$$\frac{p}{\beta} = +\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Une de ces lignes se construit au moyen de l'autre.

M. Émile Barbier, élève de l'École Normale, résolvant la même question, fait remarquer : 1° que le centre de gravité du triangle CAB est situé sur l'axe de la parabole; 2° que le point fixe I, par lequel passe AB, est un point multiple; 3° que les tangentes en ce point ont pour coefficients angulaires $\pm\sqrt{2}$; 4° que ces tangentes sont perpendiculaires aux tangentes communes à la parabole donnée et à la parabole asymptote; 5° que ces deux paraboles ont le point fixe I pour centre d'homothèse, et le rapport d'homothèse est $-\frac{1}{3}$.

M. H. Delorme (élève du lycée Louis-le-Grand) démontre que la seconde branche du lieu n'a pas d'asymptote.

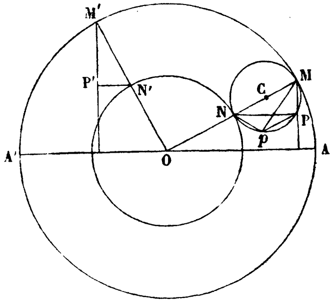
PROBLÈME DU CONCOURS GÉNÉRAL EN LOGIQUE SCIENTIFIQUE (1860);

Par M. MOURGUES,
Professeur au lycée Napoléon.

Étant donnés deux circonférences concentriques, un diamètre fixe, et deux rayons formant un angle droit mobile autour du centre, on mène de M et M′ des perpendiculaires, et de N et N′ des parallèles au diamètre fixe. Quel est le maximum de l'angle POP′?

Après avoir remarqué qu'il suffit d'étudier les varia-

FIG. 1.

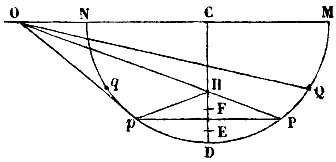


tions de la somme angulaire MOP + M'OP', je décris une circonférence de diamètre MN, je mène Pp parallèle à ce diamètre, et je substitue à la somme précédente la somme plus commode MOP + MOp, qui lui est équivalente. En effet, les triangles rectangles de même hypoténuse M'N'P', MNp sont égaux, comme équiangles au triangle MNP. Par suite, les triangles OM'P', OMp ont un angle égal compris entre côtés égaux, d'où résulte l'égalité des angles MOP', MOp.

Par là, la question posée devient un corollaire de la suivante :

Étant pris un point O sur le prolongement d'un dia-

FIG. 2.



mètre d'un cercle, et une corde parallèle à ce diamètre, comment varie la somme $MOP + MOp$, avec la position de cette corde?

Soient Pp, Qq deux positions de la corde mobile, et CD perpendiculaire à MN. Des deux circonférences passant l'une par O, P et p, l'autre par O, q et Q, et ayant une corde commune au-dessus de MN, la seconde sera intérieure à la première en dessous de MN, et coupera CD en un point F, tandis que l'autre la coupera en un point E. Les points E et F étant les milieux des arcs pEP, qFQ, OE, OF seront les bissectrices des angles pOP, qOQ, d'où il suit que

$$MOP + MOp > MOQ + MOq.$$

Ainsi la somme angulaire considérée croît avec la distance de la corde au centre, et devient maximum quand la corde devient tangente.

La somme $OP + Op$ varie dans le même sens, car elle n'est autre chose que le périmètre du triangle OHp. Or, E étant le centre du cercle exinscrit à ce triangle, le demi-périmètre est la projection de OE sur OP, comme la projection de OF sur OQ serait la moitié de $OQ + Oq$. Mais la projection de OE sur OP étant supérieure à celle de OE sur OQ, est à fortiori supérieure à celle de OF sur OQ.

Cela se déduirait encore de ce fait que $Op^2 + OP^2$ a une valeur constante, comme l'indiquent les deux triangles OCp, OCP.

Revenant maintenant à la question proposée en premier lieu, on voit que l'angle AOM variant de o à 45°, MP variera depuis o jusqu'à la corde d'un quadrant, et la corde pP s'éloignera du diamètre MN jusqu'à devenir tangente, et MOA doit égaler un demi-droit.

SOLUTION DE LA QUESTION 524 (FAURE)

(voir t. XIX, p. 234);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Il s'agit de prouver que *la tangente menée du centre d'une ellipse au cercle circonscrit à un triangle quelconque conjugué à cette ellipse, est égale à la corde du quadrant de l'ellipse.*

Soient P un point extérieur à l'ellipse et pris arbitrairement dans son plan; L sa polaire, qui rencontre la courbe aux points a, a'; α le milieu de la corde aa'; O le centre de la courbe; AA' son diamètre parallèle à aa', et BB' le diamètre conjugué qui passe par le point P. Tous les triangles conjugués à l'ellipse qui ont un de leurs sommets en P, ont leurs deux autres sommets situés sur L, et ces deux sommets divisent harmoniquement le segment aa'. Ainsi tous les cercles circonscrits à ces triangles ont en commun le point P, et interceptent sur L des segments en involution. Il en résulte que ces cercles ont pour *axe radical* commun le diamètre OP qui passe par le point α, *point central* de l'involution dont il s'agit. Soit Q le second point commun à tous ces cercles. La position de ce point Q sur la droite αP est déterminée par la relation

$$(1) \qquad \alpha P . \alpha Q = \overline{\alpha a}^2 ;$$

car l'un de ces cercles est évidemment tangent à la corde aa' en son point α.

Le point O appartenant à l'axe radical commun à tous ces cercles, il en résulte que toutes les tangentes qu'on peut leur mener par le point O sont de même longueur Ot, et l'on a

$$(2)\quad \overline{Ot}^2 = \mathrm{OP}.\mathrm{OQ} = \mathrm{OP}.(\mathrm{O}\alpha + \alpha\mathrm{Q}) = \mathrm{OP}.\mathrm{O}\alpha + \frac{\mathrm{OP}}{\alpha\mathrm{P}}.\overline{\alpha a}^2,$$

à cause de la relation (1).

Mais les segments $P\alpha$, BB' étant conjugués harmoniques, on a (*Géométrie supérieure*, p. 47, formules 10 et 13)

$$\mathrm{OB}^2 = \mathrm{OP}.\mathrm{O}\alpha \quad \text{et} \quad \alpha\mathrm{B}.\alpha\mathrm{B}' = \mathrm{O}\alpha.\alpha\mathrm{P}.$$

D'ailleurs, par une propriété générale des coniques connue sous le nom de *théorème de Newton*, on a aussi

$$\frac{\overline{\alpha a}^2}{\alpha\mathrm{B}.\alpha\mathrm{B}'} = \frac{\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OB}}^2};$$

donc l'équation (2) devient

$$\overline{Ot}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 = a^2 + b^2,$$

a et b étant les axes de l'ellipse.

Ainsi la longueur de la tangente est indépendante de la position du point P, et par conséquent elle convient au cercle circonscrit à un triangle conjugué *quelconque*. Enfin on voit, par son expression, qu'elle est égale à celle de la corde du quadrant de l'ellipse. C. Q. F. D.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DES QUESTIONS 494 ET 499

(voir t. XVIII, p. 444, et t. XIX, p. 43);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Lemme. Soient C une conique; O l'un de ses points; S, S' les sommets de deux faisceaux de droites homographiques situées dans le plan de cette courbe. Si deux droites pivotantes Om, Sm sont assujetties à se couper continuellement en m sur la circonférence de la conique, la droite $S'p$, homologue de Sm, coupera Om en un point variable p, dont le lieu V est une courbe du troisième ordre douée d'un point double en O. (Newton a énoncé un théorème à peu près identique dans son énumération des courbes du troisième ordre.)

Pour démontrer ce lemme, cherchons combien la courbe V possède de points sur une droite quelconque L.

A chaque rayon Sm il correspond, dans le faisceau homographique, un rayon $S'p$, et un seul, et il lui correspond en même temps les deux rayons Om, Om' qui joignent le point O aux deux points d'intersection m, m' de la droite Sm avec la conique. Réciproquement à chacun des deux rayons Om, Om', il ne correspond qu'un seul rayon Sm, et par conséquent aussi qu'un seul rayon $S'p$.

Donc, en vertu du *principe de correspondance anharmonique* de M. Chasles, les angles mOm' interceptent sur L des segments en involution qui correspondent anharmoniquement aux points d'intersection de cette droite par les rayons Sp, et par conséquent il existe sur L trois points de coïncidence de l'un de ces points avec l'une des extrémités du segment correspondant. Ces trois points (dont deux peuvent d'ailleurs être imaginaires) sont évidemment les seuls points de L qui appartiennent à la courbe V. Donc cette courbe est du troisième ordre.

En supposant que la transversale L soit menée par le point O, on voit immédiatement que ce point est un point double.

Je passe maintenant à la démonstration du théorème qui fait le sujet de la question 499.

Ce théorème, rectifié dans son énoncé par M. Cremona, t. XIX, p. 356, est ainsi conçu :

Si les côtés ab, bc, cd, da *et la diagonale* bd *d'un quadrilatère plan variable* abcd *tournent autour de cinq points fixes* o, p, q, r, s, *les sommets* a *et* c, *qui sont au dehors de la diagonale glissant sur deux droites fixes* M *et* N, *chacun des autres sommets* b, d *décrira une cubique.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme précédent, sans qu'il soit nécessaire de recourir à la théorie ingénieuse, mais peu connue, de M. Grassman.

En effet, démontrons que le point b, par exemple, décrit une courbe qui ne rencontre qu'en trois points une droite quelconque L.

Soit mené arbitrairement un premier côté ab' qui coupe L au point b' et M en a; la direction ra du quatrième côté du quatrilatère est déterminée. Joignons sb' qui coupe ra en d; puis qd qui coupe N en c, et enfin pc qui coupe oa en b'' et $sb'd$ en b.

Si le point b', pris arbitrairement sur L, appartenait à la courbe cherchée V, les trois points b, b', b'' coïncideraient, ce qui n'a pas lieu en général. Supposons qu'on fasse varier la direction de oa; on aura une série de points a sur M et une série homographique de points b' sur L. Donc les deux faisceaux de droites $sb'd$ et rda qui pivotent respectivement autour des points s et r, sont homographiques, et le point d'intersection de leurs rayons homologues, c'est-à-dire le point d, subordonné comme il l'est au mouvement de b' sur L, décrit une conique qui passe par les poins fixes s et r.

Les droites pivotantes sd, qd sont donc assujetties, comme dans le lemme, à se couper continuellement sur une conique qui passe par l'un s de leurs pivots. D'ailleurs la série des droites pc, menées du point fixe p aux points d'intersection c de N par les droites qd, est homographique à celle de ces droites qd.

Donc, en vertu du lemme, il existe sur L trois points tels, que le point b y coïncide avec le point b'. Donc enfin la courbe V, qui décrit le point b dans la déformation systématique du quadrilatère, est du troisième ordre.

On démontrerait pareillement que le sommet opposé d décrit en même temps une autre courbe du troisième ordre.

Chacune de ces cubiques est de forme générale, c'est-à-dire n'a pas de point double. Car si le point β, par exemple, était un point double de la courbe V, ce point résulterait de deux manières distinctes de la construction ci-dessus indiquée, ce qui est impossible; car, dès que le sommet β du quadrilatère est donné, la figure est déterminée et unique.

Il suffit d'un peu d'attention pour voir que la courbe V passe par les neuf points

$$o,\ p,\ s,\quad \mathrm{MN},\quad (pq)(or),\quad qs\mathrm{N},\quad rs\mathrm{M},\quad pq\mathrm{M},\quad or\mathrm{N}\ (*).$$

Dans les six derniers cas, le quadrilatère se réduit à un triangle ou à un simple segment terminé.

Le théorème qui fait le sujet de la question 494 est ainsi conçu :

Soient ABC, abc *deux triangles dans le même plan;* q *un point variable tel, que les droites* qa, qb, qc *coupent respectivement les cotés* BC, AC, AB *en trois points qui sont en ligne droite; le lieu du point* q *est une ligne du troisième ordre.*

Ce théorème se démontre d'une manière analogue au précédent.

Cherchons combien le lieu cherché a de points sur

(*) Notation Grassman. Tm.

une droite quelconque L. Soit q un point de cette droite; menons qa, qb qui coupent respectivement BC et CA en α et β; la droite $\alpha\beta$ coupe AB en γ, et la droite $c\gamma$ coupe L en un point q' qui coïnciderait avec q, si ce point q appartenait à la courbe V.

Faisons mouvoir le point q sur L, afin de découvrir combien de fois cette coïncidence a lieu. Les points α, β marquent alors sur BC et CA respectivement deux divisions homographiques, et la droite $\alpha\beta$ enveloppe une conique. Or de chaque point γ de AB on peut mener deux tangentes à cette conique, et chacune de ces tangentes donne lieu sur BC et AC respectivement à deux nouveaux points α', β', tels, que les droites $a\alpha'$, $b\beta'$ se coupent sur L en un point q''. Ainsi à chaque point γ, et par conséquent à chaque point q' de L, il correspond sur cette droite deux points q, q'', et réciproquement à chacun de ces groupes de deux points q, q'', il ne correspond qu'un seul point q'.

Donc, en vertu du principe de correspondance anharmonique, les segments qq'' sont en involution et correspondent anharmoniquement aux points q'. Donc enfin il existe trois positions où le point q' coïncide avec l'une des extrémités du segment correspondant qq''; ce qui prouve que la courbure V a trois points sur L, c'est-à-dire est du troisième ordre.

Etc.

La question 395 (t. XVI, p. 312) est traitée assez longuement dans mes *Mélanges de Géométrie*, p. 68 et suiv. On transforme ainsi les propriétés relatives à deux cercles en des propriétés d'un énoncé très-différent concernant des coniques biconfocales.

Le théorème Faure (question 458, t. XVI, p. 58) n'est que le théorème du n° 733 de la *Géométrie supérieure*, transformé par cette méthode.

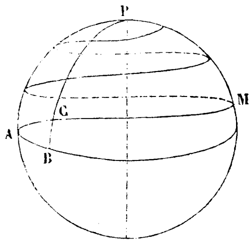
ÉQUATION ET PROPRIÉTÉS DE LA LOXODROMIE ;

PAR M. VANNSON,
Professeur au lycée de Versailles.

On appelle ainsi une courbe qui coupe tous les méridiens sous un angle constant. C'est la courbe que décrit un vaisseau quand il suit le même rumb de vent, autrement dit, tant que la direction de l'aiguille de la boussole ne varie pas (*).

Pour trouver son équation, soit C un point du lieu;

FIG. 1.



x sa longitude AB; y sa distance polaire PC; m la cotangente de l'angle constant PCM, nous avons trouvé la formule

$$\operatorname{tang} PCM = -\frac{\sin y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \quad (\text{t. XVII, p. 66}),$$

d'où l'on tire

$$m\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\sin y},$$

(*) La force motrice de la vapeur ayant remplacé celle du vent, on fait suivre aujourd'hui aux bâtiments la ligne géodésique et non la ligne loxodromique.

ou

$$-\frac{1}{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}} = -\frac{\left(\frac{1}{\cos^2\frac{y}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\tang\frac{y}{2}};$$

or le premier membre est la dérivée de x, fonction de y, et le deuxième membre ayant au numérateur la dérivée du dénominateur, représente la dérivée de $\log\tang\frac{y}{2}$; les fonctions dont les deux membres sont les dérivées ne peuvent donc différer que par une constante, et l'on a

$$mx = -\log\tang\frac{y}{2} + C.$$

Si

$$x = 0, \quad y = 6$$

sont les coordonnées du point où la courbe coupe le méridien pris pour axe, on aura

$$C = \log\tang\frac{6}{2};$$

et la courbe aura pour équation

$$mx = -\log\frac{\tang\frac{y}{2}}{\tang\frac{6}{2}}.$$

Si elle passe à l'origine, $\frac{6}{2} = \frac{\pi}{4}$, et l'on a

$$mx = -\log\tang\frac{y}{2};$$

d'où

$$\tang\frac{y}{2} = e^{-mx}.$$

Si, comme vérification, on se demande ce que devient cette équation quand le rayon de la sphère est infini, il faut d'abord remplacer y par, $\frac{\pi}{2} - y'$, y' désignant la latitude; il vient alors

$$\begin{aligned} - mx &= - \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right) \\ &= \log\left(1 - \frac{\operatorname{tang} y}{2}\right) - \log\left(1 + \frac{\operatorname{tang} y}{2}\right). \end{aligned}$$

Si l'on développe ces deux logarithmes en séries jusqu'à $\operatorname{tang}\frac{y}{2}$, première puissance, les autres termes devant disparaître à la limite, on trouve

$$y = + mx,$$

résultat évident à priori.

Revenons à l'équation

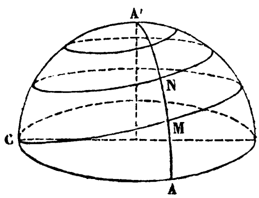
$$\operatorname{tang}\frac{y}{2} = e^{-mx};$$

m étant supposé positif, on voit que si x varie depuis o jusqu'à ∞, y ira constamment en diminuant et tendra vers la limite o. La courbe décrira donc une infinité de spires, en se rapprochant sans cesse du pôle, qui sera pour elle un point asymptote, propriété connue de la spirale logarithmique.

Si l'on donne à la longitude une série de valeurs en progression arithmétique, les tangentes des demi-distances polaires correspondantes formeront une progression géométrique.

Si l'on prend successivement pour longitudes o, π, 2π, 3π, 4π, ..., $h\pi$, on pourra aisément, par la formule tang $(a - b)$ calculer les tangentes successives des arcs compris sur le premier méridien entre deux spires consécutives, et reconnaître que ces arcs vont en décroissant à mesure que la longitude augmente. Plus généralement on dira : Si, pour une longitude donnée x, on calcule le segment de méridien correspondant compris entre

Fig. 2.



deux spires consécutives, on trouvera que ce segment diminue à mesure que la longitude augmente. En effet, la distance polaire d'un point m de la courbe est donnée par la formule

$$\text{tang}\,\frac{A'M}{2} = a^x$$

en posant

$$a = e^{-m}.$$

Soit N l'intersection du demi-méridien AA' avec la spire suivante, il faudra à x ajouter 2π, et l'on aura ainsi

$$\text{tang}\,\frac{A'N}{2} = a^{x+2\pi};$$

par suite,

$$\text{tang}\,\frac{mn}{2} = \frac{a^x(1 - a^{2\pi})}{1 + a^{2x+2\pi}},$$

a étant < 1. Si l'on prend la dérivée de cette fonction de x, on la trouve négative ; donc le segment mn va constamment en décroissant. C. Q. F. D.

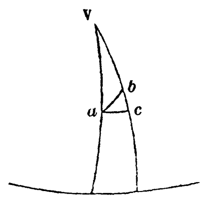
Rectification de la loxodromie.

On peut employer pour cette question la formule trouvée plus haut,

$$dS = \sqrt{dy^2\, dx^2 + \sin^2 y},$$

y étant la distance polaire d'un point a ; mais on a trouvé,

Fig. 3.



au commencement du présent article,

$$dx = -\frac{dy}{m \sin y},$$

ce qui donne

$$\frac{dS}{dy} = -\frac{1}{\cos\varphi} + C,$$

(φ étant l'angle vab). Si on calcule la constante de manière que $S = 0$ quand $y = 6$, on trouvera

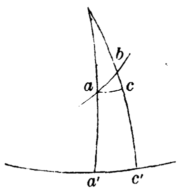
$$S = \frac{6 - y}{\cos\varphi}.$$

Ainsi l'arc compris entre deux points de la courbe est égal à la différence de leurs latitudes, divisée par le cosinus de l'angle constant que fait la direction du chemin parcouru avec les méridiens. Mais on arrive plus simplement encore à ce résultat en considérant le triangle infiniment petit *abc* comme rectiligne et rectangle, ce qui donne

$$ab = \frac{bc}{\cos\varphi};$$

cette relation ayant lieu pour chaque élément infiniment

Fig. 4.



petit de la courbe, a lieu pour un arc quelconque. Si donc, en restant sous le même rumb de vent, un vaisseau a parcouru un arc *ab* et qu'on connaisse les latitudes ou les distances polaires aux points de départ et d'arrivée, on aura facilement le chemin parcouru; pour achever de connaître le point d'arrivée, il faut aussi calculer la différence des longitudes des deux points; elle se déduit facilement de l'équation de la courbe et on trouve

$$\Delta = m\left(\log\operatorname{tang}\frac{y'}{2} - \log\operatorname{tang}\frac{y}{2}\right);$$

il suffit donc de prendre les logarithmes des tangentes des demi-distances polaires, d'en faire la différence, et de la multiplier par la cotangente de l'angle constant.

Problème. *Trouver l'équation d'un loxodromie passant par un point ou par deux points donnés.*

Nous avons trouvé

$$(1) \qquad mx = -\left(\log\operatorname{tang}\frac{y}{2} - \log\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\right);$$

soient x', y' les coordonnées du point donné, on aura

$$mx' = -\left(\log \operatorname{tang}\frac{y'}{2} - \log \operatorname{tang}\frac{6}{2}\right);$$

divisant membre à membre, il vient

$$(2) \qquad \frac{x}{x'} = \frac{\log \operatorname{tang}\frac{y}{2} - \log \operatorname{tang}\frac{6}{2}}{\log \operatorname{tang}\frac{y'}{2} - \log \operatorname{tang}\frac{6}{2}}.$$

Telle est l'équation d'une loxodromie passant par un point donné $(x'\ y')$. C'est la distance polaire du point où la courbe coupe le premier méridien, elle peut être calculée de manière que la courbe passe par un second point $(x''\ y'')$; on trouve aisément cette équation

$$\frac{x}{x'} = \frac{\left(\log \operatorname{tang}\frac{y}{2}\right)(x''-x') - \left(x'' \log \operatorname{tang}\frac{y'}{2} - x' \log \operatorname{tang}\frac{y''}{2}\right)}{\left(\log \operatorname{tang}\frac{y'}{2}\right)(x''-x') - \left(x'' \log \operatorname{tang}\frac{y'}{2} - x' \log \operatorname{tang}\frac{y'}{2}\right)}.$$

Telle est l'équation d'une loxodromie passant par deux points donnés. Si on veut connaître l'angle sous lequel la courbe coupe tous les méridiens, on tirera $\log \operatorname{tang}\frac{6}{2}$ de l'équation (2) après y avoir remplacé y et x par y'', x'', ensuite on remplacera $\log \operatorname{tang}\frac{6}{2}$ par la valeur trouvée dans l'équation (1), après y avoir mis x', y' en place de x et y. On trouve ainsi

$$m = \log \operatorname{tang} \frac{\frac{y'}{2} - \log \operatorname{tang}\frac{y''}{2}}{x'' - x}.$$

Remarque. Ayant trouvé

$$\operatorname{tang}\frac{y}{2} = e^{-mx},$$

si on cherche tang y, on obtient la formule

$$\text{tang}\, y = \frac{2\, e^{-mx}}{1 - e^{-2mx}}.$$

Si donc on nomme Y la latitude du point, on aura

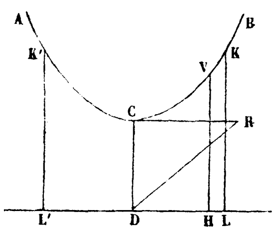
$$\text{tang}\, Y = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2};$$

on trouve de même

$$\text{coséc}\, y = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2},$$

formules identiques à celles qui donnent la longueur du fil et l'ordonnée dans l'équation de la chaînette (voir *Mécanique* de Poisson, t. Ier, p. 561). Soit C le point le plus

Fig. 5.



bas d'un fil flexible ACB.... Si sur la verticale CD on porte une longueur h convenable, on a KL ou

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

et la longueur CK ou

$$S = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

Supposons $h = \text{tang}\, \varphi$, φ étant l'angle constant de la loxodromie, et supposons aussi $x = h$, on peut donner à x toute autre valeur; dans les deux formules on aura

$$y = \frac{h}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right) \quad \text{et} \quad S = \frac{h}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

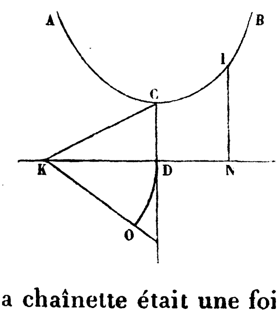
Pour $x = -h$ on a les mêmes résultats, abstraction faite du signe de S. Si donc on prend

$$DL = DL' = DC = \tang \varphi,$$

si on élève en L, L′ deux verticales LK, L′K′ égales à la valeur $\frac{h}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$, si à ces points K, K′ on fixe les extrémités d'un fil flexible dont la longueur soit égale à $h\left(e - \frac{1}{e}\right)$, cette courbe pourra donner la latitude d'un point de la loxodromie correspondante à une longitude donnée x; on prendra DH égal à l'arc x développé, on mènera l'ordonnée HV. On construira le triangle rectangle DCR ayant DR = HV, l'angle ODR représentera la latitude cherchée (*).

Il ne faut voir dans cette remarque qu'un simple rapprochement entre les deux courbes, et non un procédé pratique de construction.

Fig. 6.



Toutefois si la chaînette était une fois construite, elle

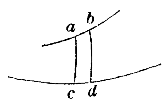
(*) Le côté CR sera égal à la longueur du fil de C en V.

pourrait être employée à la solution, quel que fût l'angle φ; car on peut toujours représenter sa tangente par CD, en choisissant l'unité convenablement. Si on fait en C l'angle DCK égal à $90^\circ - \varphi$, CD sera la tangente de φ, le rayon étant KD; si donc on fait en K l'angle DKO égal à la longitude donnée, qu'on décrive l'arc DO en prenant K pour centre, l'arc DO sera celui dont il faudra porter la longueur de D en N pour que l'ordonnée NI, divisée par CO, représente la latitude demandée.

Quadrature de la loxodromie.

En appelant du un élément de la surface $abcd$, nous

Fig. 7.



avons trouvé $du = dx \cos y$, y étant la distance polaire du point a; mais on a

$$dx = -\frac{dy}{m \sin y},$$

d'où

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\cos y}{m \sin y};$$

ces deux dérivées étant égales, on en tire

$$u = -\frac{1}{m} \log \sin y,$$

en supposant $u = 0$ quand $y = \frac{\pi}{2}$. Pour avoir u en fonction de x, on se reportera à l'équation de la courbe qui est

$$\tang \frac{y}{2} = a^x,$$

d'où

$$\sin y = \frac{2a^x}{1 + a^{2x}},$$

ainsi

$$u = -\frac{1}{m} \log \frac{2a^x}{1 + a^{2x}}.$$

Pour avoir la surface comprise entre l'équateur et la première spire, on fera $x = 2a$, d'où

$$u' = -\frac{1}{m} \log \left(\frac{2a^{2\pi}}{1 + a^{4\pi}} \right).$$

Pour la surface comprise entre la première et la seconde spire, il faut faire $x = 4\pi$ et soustraire le premier résultat du second, ce qui donne

$$u_2 - u_1 = -\frac{1}{m} \log \frac{a^{2\pi}(1 + a^{4\pi})}{1 + a^{8\pi}}.$$

Il est facile de démontrer que cette surface est moindre que la première, et en général que la surface comprise entre deux spires consécutives diminue à mesure que la courbe se rapproche du pôle.

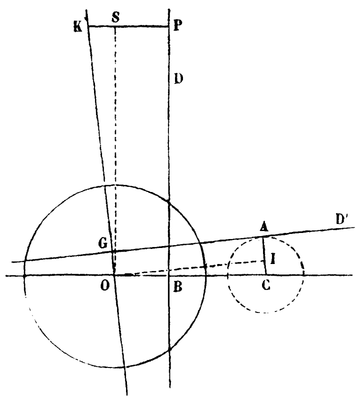
La suite prochainement.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 395

(voir t. XVI, p. 312);

PAR M. LAQUIÈRE,
Elève du lycée Saint-Louis.

THÉORÈME. *La polaire réciproque d'un cercle* C *relativement à un cercle de centre* O *est une conique de foyer* O, *ayant pour sa directrice la polaire du centre* C *par rapport au cercle directeur* O.



Démonstration. Soit D la polaire du point C, on aura la relation segmentaire

$$OB.OC = R^2,$$

où R est le rayon du cercle O.

Soient D' une tangente au cercle C; K son pôle par rapport à O, on aura de même

$$OG.OK = R^2.$$

Soit KP perpendiculaire sur D, je dis que

$$\frac{\mathrm{KP}}{\mathrm{KO}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{OC}} = \frac{r}{d};$$

$r =$ rayon du cercle C, $d =$ distance des centres.

En effet, les triangles semblables KOS, IOC donnent

$$\frac{\mathrm{KS}}{\mathrm{KO}} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CO}};$$

d'ailleurs

$$\frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{KO}} = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{CO}},$$

donc par addition

$$\frac{\mathrm{KP}}{\mathrm{KO}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{OC}}.$$

Le théorème est donc démontré.

Analytiquement :

$$\text{Cercle O} \ldots\ldots \quad x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2,$$
$$\text{Cercle C} \ldots\ldots \quad (x - d)^2 + y^2 = r^2.$$

La distance au point C de la polaire du point (x, y) est r; d'où

$$\frac{dx - \mathrm{R}^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = r, \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{r^2}(dx - \mathrm{R}^2)^2.$$

Note de M. de Jonquières. Cette question est traitée assez longuement dans mes *Mélanges de Géométrie,* p. 68 et suiv. On transforme ainsi les propriétés relatives à deux cercles en des propriétés d'un énoncé très-différent concernant des coniques biconfocales. Il y a longtemps que cette remarque a été faite par M. Poncelet, l'illustre créateur de la théorie des *polaires réciproques.* Par exemple, le théorème (Faure), question 358 (t. XVI, p. 58), n'est autre chose que le théorème qui fait l'objet du n° 733 de la *Géométrie supérieure,* transformé par cette méthode.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE. — PROBLÈME D'OPTIQUE.

1. Problème. *Étant donné un quadrilatère plan, trouver le lieu du point dans son plan, d'où deux des côtés opposés du quadrilatère sont vus sous le même angle.*

Solution. ABCD est le quadrilatère donné; AB et CD les côtés opposés. Si sur AB et CD on construit deux segments de cercles capables de l'angle donné, les points d'intersection des arcs appartiennent au lieu cherché. Soit O l'intersection de AB et CD; prenons OAB pour axe des x et OCD pour axe des y, et soit ν l'angle des axes.

L'équation du cercle dont AB est une corde est

$$(1) \qquad P + Dy + Ex + F = 0.$$

L'équation du cercle dont CD est une corde est

$$(1) \qquad P + D'y + E'x + F' = 0;$$

$P = y^2 + 2xy\cos\nu + x^2$; E, F, D', F' sont des quantités connues; D et E' des quantités variables. On a

$$4\overline{AB}^2 = E^2 - 4F, \quad 4\overline{CD}^2 = D'^2 - 4F'.$$

R et R' étant les rayons des cercles AB, CD, on a

$$4\sin^2\nu . R^2 = E^2 - 2DE\cos\nu + D^2 - 4F\sin^2\nu,$$

$$4\sin^2\nu . R'^2 = E'^2 - 2D'E'\cos\nu + D'^2 - 4F'\sin^2\nu.$$

Pour que les segments soient semblables, on doit avoir

$$\frac{AB}{R} = \frac{CD}{R'};$$

donc

$$(E^2 - 4F)(E'^2 - 2D'E'\cos\nu + D'^2 - 4F'\sin^2\nu)$$
$$= (D'^2 - 4F')(E^2 - 2DE\cos\nu + D^2 - 4F\sin^2\nu).$$

Substituant dans cette équation les valeurs de D et E', tirées des équations (1), on obtient

$$(E^2 - 4F)[(P + D'y + F')^2 + 2D'x\cos\nu(P + D'y + F') + x^2(D'^2 - 4F'\sin^2\nu)]$$
$$= (D'^2 - 4F')[(P + Ex + F)^2 + 2Ey\cos\nu(P + Ex + F) + y^2(E^2 - 4F\sin^2\nu)],$$

équation du quatrième degré, ligne du genre parabolique.

2. Les distances des centres des cercles aux cordes respectives sont proportionnelles à ces cordes; donc la droite des centres a pour enveloppe une parabole, et le milieu de la distance des centres décrit une droite (t. VI, p. 403).

3. Il est évident que la courbe passe par les points d'intersection des côtés AB, CD; AC, BD; AD, BC. Les points de la courbe sont ceux où les côtés AB, CD sont vus sous des angles dont les sinus sont égaux.

4. Lorsque les côtés AB, CD sont égaux, on a

$$E^2 - 4F = D'^2 - 4F',$$

et l'équation se réduit au troisième degré.

5. Si les côtés AB, CD sont parallèles, on est amené encore à une équation du quatrième degré.

6. Problème. Même énoncé. *Les segments* AB, CD *sont sur la même droite.*

Solution. Prenant des axes rectangulaires, on a pour l'équation du lieu

$$(E^2 - 4F)[(P + E'x + E')^2 + x^2(D'^2 - 4F')]$$
$$= (D'^2 - 4F')[(P + Ex + F)^2 + x^2(E^2 - 4F)],$$

où

$$P = y^2 + x^2;$$

d'où l'on tire

$$(E^2 - 4F)^{\frac{1}{2}}(P + E'x + F') \pm (D'^2 - 4F')^{\frac{1}{2}}(P + Ex + F) = 0.$$

C'est le système de deux cercles faciles à construire.

Corollaire. Il existe donc huit points dont on peut voir trois segments d'une droite, sous des angles dont les sinus sont égaux.

NOTE HISTORIQUE SUR L'EXTRACTION ABRÉGÉE DE LA RACINE CARRÉE;

PAR M. CANTOR,
Professeur à Heidelberg.

La méthode de Gergonne (*Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 233) est de 1829; elle a été déjà donnée en 1818 par Kiesewetter, dans son ouvrage : *Fortsetzung der aufaungsgründe der Reinen Mathematik*, § 76 (Berlin et Leipsig). *Continuation des Éléments des Mathématiques pures*, grand in-8° (*).

La méthode de la p. 7, t. XVII (*Nouvelles Annales*), revendiquée, p. 139, est complétement identique à celle de M. Fr. Hoffmann (*Journal* de Grunert, t. XXII, p. 260; 1840); et j'ai inséré ces deux méthodes, avec

---

(*) Johann-Gottfried-Carl-Christian Kiesewetter, né à Berlin en 1766, mort à Berlin en 1819, professeur de logique.

ces indications, dans mon Arithmétique, p. 101 et 108 (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 114).

Note du Rédacteur. Naturellement, en mathématiques, séjour des propositions irréfragables, identiques en toute langue, en tout pays, ces rencontres ne peuvent manquer d'être assez fréquentes; nulle part les plagiats *effectifs* sont si rares, et les plagiats *apparents* si communs que dans la science exacte par excellence; mais les signaler est un devoir, un service rendu à l'histoire scientifique.

Cataldi (Pietro), mort en 1626, a publié en 1615, *Trattato del modo brevissimo di trovar la radice quadra delli numeri, etc.;* ouvrage remarquable, dont nous avons amplement parlé (*Bulletin*, t. IV, p. 68). Voici l'extrait d'une lettre de M. Prouhet :

« La méthode abrégée pour l'extraction de la racine carrée me semble remonter beaucoup plus haut qu'on ne le dit.

« De Lagny (*) a publié en 1692 une *Méthode nouvelle* pour l'extraction et l'approximation des racines (Paris; in-4°, 2e édition). Le premier problème qu'il résout est celui-ci :

» *Étant donnée la première moitié d'une racine carrée, le premier tiers d'une racine cubique, etc., trouver la dernière moitié, les deux derniers tiers, etc., des mêmes racines, tout d'un coup, par une seule division.*

» Cette méthode a été reproduite dans le tome II des anciens *Mémoires de l'Académie* (voir p. 407 à 412).

» Tout cela est fort abrégé; mais qui nous délivrera des méthodes abrégées, qui n'en finissent pas? »

(*) Thomas Fantot de Lagny, né à Lyon en 1660, mort à Paris en 1734, professeur d'hydrographie à Rochefort de 1697 à 1714, puis membre de l'Académie des Sciences.

SUR LES EXTRACTIONS APPROCHÉES DES RACINES;

Par M. GENOCCHI.

Dans l'*Arithmétique* de M. Peacock, qui fait partie de l'*Encyclopedia Metropolitana* de Londres (1825-26), et qui m'a été signalée par le savant prince Boncompagni, je trouve rapportées plusieurs règles anciennes pour l'approximation des racines carrées et cubiques (t. I, p. 436-437). La formule

$$\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a}$$

est attribuée aux Arabes (*). Ensuite on mentionne une méthode d'Aronce Fineus comme le pas le plus remarquable fait avant l'âge de Stevin, savoir l'invention des décimales, ce qui aurait attiré l'attention des mathématiciens et provoqué des perfectionnements postérieurs. Or l'ouvrage de Fibonacci renferme aussi cette méthode avec ces perfectionnements, sous une forme plus générale : il prescrit, en effet, de multiplier le nombre donné par un carré m^2, d'extraire la racine carrée du produit, et diviser cette racine par m. Dans l'exemple, il prend $m = 100$, et remarque qu'on multiplie par m^2, en ajoutant quatre zéros au nombre donné. Il se sert en même temps de la formule

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a},$$

(*) Peut-être M. Peacock a pris cela dans Tartaglia qui toutefois n'est pas très-affirmatif. (V. *General Trattato*, parte II, lib. II, cap. 1.)

Peacock (George), né à Thornton-Hall en 1791, mort en 1858, professeur à l'université de Cambridge.

de manière qu'en supposant

$$N m^2 = a^2 + b,$$

il a

$$\sqrt{N} = \frac{1}{m}\left(a + \frac{b}{2a}\right).$$

Quant aux racines cubiques, M. Peacock cite les formules erronées de Parieli et d'Aronce Fineus, dont le premier prenait $a + \frac{x}{(3a)^3}$, et le second $a + \frac{x}{3a}$, pour valeur de $\sqrt[3]{a^3 + x}$, et rapporte l'opinion de Tartaglia, qui fait remonter la première aux Arabes, par l'intermédiaire de Fibonacci; mais Tartaglia s'est trompé, car les formules de Fibonacci sont bien plus exactes. La formule

$$\sqrt[3]{a^3 + x} = a + \frac{x}{3a^2 + 3a^2},$$

qu'on déduirait de la méthode de Newton, est indiquée comme due à Cardan, et critiquée par Tartaglia, qui expliquait la formule donnée aussi par Juan de Ortega,

$$\sqrt[3]{a^3 + x} = a + \frac{x}{3a^2 + 3a}.$$

Cette formule même fournit une approximation moins rapide que la méthode de Fibonacci (*). J'ajoute que ce

(*) Les opérations étant répétées, la formule de Cardan finit par être la plus convergente de toutes. De même la formule

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a}$$

finit par être plus convergente que l'autre

$$\sqrt{a^2 + x} = a + \frac{x}{2a + 1}$$

donnée par Juan de Ortega.

dernier énonce et démontre l'équation

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2,$$

et que dans l'extraction de la racine il ne forme pas le cube de la partie trouvée pour déterminer le chiffre suivant, mais les produits $3a^2b$, $3ab^2$, etc., comme quelques auteurs le voudraient encore aujourd'hui. (*Nouvelles Annales*, 1844, p. 234; 1851, p. 87 et 255.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

(voir p. 5);

PAR M. BEYNAC.

VII. *Des développements des puissances* $(1+x)^m$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^m$, m *étant entier, déduire une formule de la somme des carrés des coefficients du binôme.*

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^m = 1 + \frac{m}{x} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{x^2} + \ldots$$

Si l'on fait le produit, il est évident que la somme des produits partiels qui ne contiennent pas x est précisément la somme des carrés des coefficients du binôme. Or

$$(1+x)^m \times \left(1+\frac{1}{x}\right)^m = \frac{(1+x)^{2m}}{x^m}.$$

Le terme général de ce dernier développement,

$$\frac{2m(2m-1)\ldots(2m-n+1)}{1.2\ldots n}\cdot\frac{x^{2m-n}}{x^m},$$

fournit le terme indépendant de x pour $2m - n = m$ ou $n = m$; donc la somme des carrés des coefficients est exprimée par la formule

$$\frac{2m(2m-1)\ldots(m+1)}{1.2\ldots m}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 510

(voir t. XIX, p. 46);

PAR MM. P. FARJON ET G. LAURENT,
Élèves du lycée de Lille (classe de M. David).

Par les trois extrémités des axes principaux d'un ellipsoïde on mène trois cordes parallèles; on projette chacune de ces cordes sur l'axe d'où elle part; on divise cette projection par l'axe sur lequel elle se trouve, la somme des trois quotients est constante.

Soit l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et les trois cordes données :

$$(1) \qquad \begin{cases} x - a = \delta z, \\ y = \delta' z; \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \delta z, \\ y - b = \delta' z; \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \delta (z - c), \\ y = \delta' (z - c). \end{cases}$$

Le plan diamétral conjugué de ces cordes a pour équation

$$\frac{x}{a^2} + \frac{\delta y}{b^2} + \frac{\delta' z}{c^2} = 0.$$

L'abscisse de son intersection avec la corde (1) est

$$x' = \frac{a\,(a^2c^2\delta\delta' + a^2b^2\delta')}{b^2c^2\delta + a^2c^2\delta\delta' + a^2b^2\delta'}.$$

L'ordonnée de l'intersection du même plan avec la corde (2) est

$$y'' = \frac{b\,(b^2c^2\delta' + a^2b^2\delta')}{b^2c^2\delta + a^2c^2\delta\delta' + a^2b^2\delta'}.$$

Enfin le z de son intersection avec la corde (3) est

$$z''' = \frac{c\,(b^2c^2\delta + a^2c^2\delta\delta')}{b^2c^2\delta + a^2c^2\delta\delta' + a^2b^2\delta'}.$$

On tire de là

$$\frac{x'}{a} + \frac{y''}{b} + \frac{z'''}{c} = 2,$$

relation qui n'est autre que celle qu'il faut démontrer, car elle peut s'écrire :

$$\frac{a - x'}{a} + \frac{b - y''}{b} + \frac{c - z'''}{c} = 1,$$

et $a - x'$, $b - y''$, $c - z'''$ sont précisément les moitiés des projections des cordes (1), (2), (3).

Remarque (*). Par la nature même de la démonstration, on voit qu'en prenant des projections obliques, le théorème peut s'étendre à trois cordes parallèles menées par les extrémités de trois diamètres conjugués quelconques.

(*) Cette remarque n'appartient qu'à ces deux élèves. Tm.

Note. MM. Cuenoud de Lausanne, Vannier de Bourg-la-Reine, L. Blanche-Arnault, élève du lycée Louis-le-Grand, Ch. Kessler, élève du Prytanée militaire, Oscar Derome, élève du lycée de Lille, donnent à peu près la même solution.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 241

(voir t. XI, p. 424);

PAR M. A. GENOCCHI.

Posons

$$P_n = \frac{T_{n+1}^2 - aT_n T_{n+1} + bT_n^2}{b^n};$$

il en résultera

$$P_{n+1} = \frac{T_{n+2}^2 - aT_{n+1}T_{n+2} + bT_{n+1}^2}{b^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{b^n}\left[T_{n+1}^2 - T_{n+2}\left(\frac{aT_{n+1} - T_{n+2}}{b}\right)\right],$$

ou

$$P_{n+1} = \frac{1}{b^n}(T_{n+1}^2 - aT_n T_{n+1} + bT_n^2),$$

en vertu de l'équation

$$T_{n+2} = aT_{n+1} - bT_n,$$

et par suite

$$P_{n+1} = P_n.$$

Donc P_n est constant.

SOLUTION DE LA QUESTION 242

(voir t. X, p. 357).

Par M. A. GENOCCHI.

En prenant

$$a = 2, \quad b = -1,$$

la question précédente donnera

$$\frac{(T_{n+1} - T_n)^2 - 2T_n^2}{(-1)^n} = -[(T_2 - T_1)^2 - 2T_1^2] = -2,$$

à cause que

$$T_1 = t, \quad T_2 = 3.$$

Donc

$$(T_{n+1} - T_n)^2 = 2T_n^2 \pm 2.$$

Or si T_n était un carré u^2, on ferait

$$T_{n+1} - T_n = 2v,$$

puisque $(T_{n+1} - T_n)^2$ est pair, et on aurait

$$u^4 \pm 1 = 2v^2;$$

mais cette équation rentre dans l'autre

$$x^4 \pm y^4 = 2z^2,$$

à laquelle on ne peut satisfaire qu'en supposant

$$x = y:$$

donc, etc.

QUESTIONS.

558. Étant données deux figures homographiques dans un même plan, soient m, m', m'', les points du plan qui coïncident avec leurs homologues respectifs (*).

1° Si une conique est circonscrite au triangle $m' m'' m'''$, il n'existe sur cette conique *que deux* points tels, que deux droites tournant autour de ces points et se coupant sur la conique soient toujours homologues dans les deux figures.

2° Si une conique est inscrite au triangle $m\, m'\, m''$, il n'existe que *deux* tangentes à cette conique telles, qu'une droite roulant sur la conique coupe ces tangentes en deux points toujours homologues dans les deux figures.

(P. Lafitte, ancien capitaine d'artillerie.)

559. On donne un cylindre *droit vertical;* une hélice tracée sur ce cylindre; une sphère inscrite dans ce cylindre (*). Une droite *horizontale* se meut en s'appuyant sur l'hélice et restant tangente à la sphère inscrite; étudier la surface que la droite engendre (**). (Dewulf.)

560. Étant donnés un triangle *conjugué* à une conique et un cercle circonscrit au triangle, le produit des distances du centre de la conique aux côtés du triangle multiplié par le diamètre du cercle circonscrit est égal au produit des carrés des demi-axes de la conique.

(*) Par abréviation on pourrait dire des *points homologues doubles ;* de même pour les lignes. Tm.

(**) On rencontre cette surface dans certains travaux.

Un théorème analogue existe pour les surfaces du second degré. (FAURE, capitaine d'artillerie.)

561. *Théorème.* Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale au carré de la tangente menée de son centre au cercle des neuf points, multiplié par le produit des distances de ce centre aux côtés du triangle et divisé par le produit de ses distances aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle. (FAURE.)

562. *Théorème.* Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale au carré de la tangente menée de son centre au cercle qui a les sommets du triangle donné pour points conjugués. (FAURE.)

563. *Sur les courbes du troisième ordre.* La courbe du troisième ordre qui passe par les six sommets d'un quadrilatère complet et par les pieds des hauteurs du triangle formé par ses diagonales, passe par les deux points situés à l'infini sur un cercle. (FAURE.)

564. La courbe du troisième ordre que l'on trace ainsi, est le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère; elle rappelle le cercle dans la théorie des courbes du second ordre. (FAURE.)

565. Le lieu des foyers des coniques qui passent par quatre points est une courbe du sixième ordre.

Les *Nouvelles Annales*, t. IV, p. 324, annoncent une courbe dont le degré peut monter à 64. (FAURE.)

SOLUTION DE LA QUESTION 192

(voir t. VII, p. 368);

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur agrégé, ancien élève de l'Ecole Normale.

Lieu des points tels, que la somme de leurs distances aux deux côtés d'un angle droit xOy soit égale à une quantité donnée c.

I.

Je supposerai, pour abréger le langage, que le plan xOy soit horizontal. Soient M un point de l'espace (x, y, z) du lieu; MA, MB les distances aux côtés de l'angle droit

$$\mathrm{MA} = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \mathrm{MB} = \sqrt{y^2 + z^2};$$

$$\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} = c. \tag{1}$$

Cette équation, en tenant compte des doubles signes implicitement renfermés dans les radicaux, et en remarquant que c est toujours positif, représente trois équations :

$$\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = c, \tag{2}$$

$$\mathrm{MA} - \mathrm{MB} = c, \tag{3}$$

$$\mathrm{MB} - \mathrm{MA} = c. \tag{4}$$

La première seule répond à l'énoncé; tous les points qui satisfont à l'équation (2) ne sont pas extérieurs à deux cylindres de section droite circulaire, ayant leurs rayons égaux à c, et dont les axes respectifs sont Ox, Oy. En effet, pour tous ces points il faut que $\mathrm{MA} < c$, $\mathrm{MB} < c$.

Les points qui satisfont aux équations (3) et (4) sont tels, que la *différence* de leurs distances aux axes Ox, Oy est égale à c; ils peuvent être situés à des distances des axes indéfiniment croissantes.

Ceux qui satisfont en particulier à l'équation (3) ne sont pas intérieurs à un cylindre ayant pour axe Ox et pour rayon c, parce que $MA > c$.

Ceux enfin qui satisfont à l'équation (4) ne sont pas intérieurs à un cylindre ayant pour axe Oy et pour rayon c, parce que $MB > c$.

Le lieu donné par l'équation (1) comprendra donc une partie fermée et des nappes infinies.

Nous excluons le cas où c serait nul; l'équation (1) se réduit à

$$y = \pm x,$$

qui représente les plans bissecteurs des dièdres qui ont Oz pour arête.

L'équation (1), débarrassée de ses radicaux, devient

$$(5) \quad y^4 - 2x^2y^2 + x^4 - 2c^2y^2 - 2c^2x^2 + c^4 = 4c^2z^2.$$

A la première vue on aperçoit que les plans coordonnés sont des plans principaux, que les axes coordonnés sont des axes de surface, que l'origine est un centre, et qu'enfin la surface est symétrique par rapport aux plans bissecteurs des plans coordonnés verticaux.

L'équation de la surface rapportée à ces plans bissecteurs est

$$(6) \quad 4x'^2y'^2 - 2c^2x'^2 - 2c^2y'^2 + c^4 = 4c^2z^2.$$

II.

Sections de la surface par des plans horizontaux.

Je suppose d'abord $z = 0$, ce qui donne

$$4x'^2y'^2 - 2c^2x'^2 - 2c^2y'^2 + c^4 = 0,$$

ou par la décomposition en facteurs

$$\left(y' - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)\left(y' + \frac{c}{\sqrt{2}}\right)\left(x' - \frac{c}{\sqrt{2}}\right)\left(x' + \frac{c}{\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Le lieu se compose de quatre parallèles aux axes Ox', Oy', formant un carré ABCD.

Les côtés du carré répondent à l'équation (2) et leurs prolongements à l'équation (3) et à l'équation (4).

Je suppose maintenant $z = a$ et $a < \frac{c}{2}$, la valeur de y'^2 peut s'écrire :

$$y'^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{2a^2c^2}{2x'^2 - c^2}.$$

Lorsque $2x'^2 \geqq c^2$, y' a toujours deux valeurs réelles égales sauf le signe ; d'ailleurs y' est nul pour $x' = \infty$ et infini pour $x' = \pm \frac{c}{\sqrt{2}}$. J'obtiens ainsi quatre branches hyperboliques, les côtés étant prolongés : deux, situées dans les angles A et D du carré, conviennent à l'équation (3); les deux autres, dans les angles B et C, à l'équation (4).

Enfin, dans l'intérieur du carré ABCD, se trouve une courbe fermée ayant deux axes dirigés suivant Ox', Oy'. Les quatre demi-axes ont la même valeur

$$\sqrt{\frac{c^2 - 4a^2}{2}}.$$

En considérant l'équation (5) où l'on remplace z par a, il est facile de reconnaître que Ox et Oy sont des directions d'axes pour la courbe fermée. Les quatre nouveaux demi-axes de la courbe fermée ont pour longueur $\sqrt{c^2 - 2ac}$ et ceux des quatre branches hyperboliques $\sqrt{c^2 + ac}$.

Nous avons ainsi une idée assez nette de la section horizontale. Lorsque z augmente, la courbe fermée se resserre et les branches hyperboliques s'écartent des asymptotes.

Quand $z = \frac{c}{2}$, la courbe fermée se réduit à un point, et elle disparaît quand z surpasse $\frac{c}{2}$.

La surface se présente donc à nous comme une voûte surbaissée, reposant sur un carré et flanquée de quatre nappes infinies qui n'ont chacune qu'un point de commun avec elle.

III.

Sections verticales perpendiculaires à Oy'.

Je remplace dans l'équation (6) y' par a, ce qui donne

$$4c^2z^2 + 2x'^2(c^2 - 2a^2) = c^2(c^2 - 2a^2).$$

Lorsque $c^2 > 2a^2$, le plan vertical perpendiculaire rencontre la surface fermée, les sections sont des ellipses, l'un des axes est horizontal et de longueur constante $\frac{c}{\sqrt{2}}$, l'autre diminue de $\frac{c}{2}$ à o. Quand a^2 a dépassé $\frac{c^2}{2}$, le plan rencontre deux nappes infinies, et les sections sont des hyperboles ayant l'axe transverse horizontal et s'ouvrant de plus en plus.

On peut répéter identiquement la même chose sur les sections verticales perpendiculaires à Ox'.

IV.

Sections verticales par les plans zOx et zOy.

Je fais d'abord $y = o$ dans l'équation (5), et j'obtiens

$$x^2 - c^2 = \pm 2cz,$$

qui représente deux paraboles tournées en sens contraire. On peut remarquer que $OH = \frac{c}{2}$, $OA = c$; les foyers sont à l'origine.

En posant $x = 0$ dans l'équation (5), on trouverait deux autres paraboles identiques aux précédentes, mais situées dans le plan zOy.

On reconnaît aisément que ces quatre paraboles sont des *lignes de pente*, parce que leurs plans contiennent les axes des sections horizontales.

V.

Sections verticales passant par l'axe Oz.

Je prends de nouveaux axes horizontaux OX, OY; si je pose $XOx = \alpha$,

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \quad y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$$

l'équation (5) devient

$$\begin{aligned}&(X^2\cos 2\alpha - 2XY\sin 2\alpha - Y^2\cos 2\alpha)^2\\&- 2c^2(X^2+Y^2) + c^4 = 4c^2z^2.\end{aligned}$$

La section de la surface par le plan zOX aura pour équation

$$(7) \qquad X^4\cos^2 2\alpha - 2c^2X^2 + c^4 = 4c^2z^2;$$

il nous suffira de faire varier α entre 0° et 45° exclusivement. Nous trouverons commode de décomposer en facteurs le premier membre de l'équation (7) :

$$(8) \qquad \begin{aligned}&\cos^2 2\alpha\left(X^2 - \frac{c^2}{\cos^2 2\alpha} - \frac{c^2\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right)\\&\times\left(X^2 - \frac{c^2}{\cos^2 2\alpha} + \frac{c^2\sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}\right) = 4c^2z^2.\end{aligned}$$

Nous aurons également besoin de différentier l'équation (7) :

$$(9) \qquad \frac{dz}{dX} = \frac{X(X^2\cos^2 2\alpha - c^2)}{2c^2 z}.$$

Étudions seulement les valeurs positives de z et de X. Pour

$$X = 0$$

z a une valeur maximum $\frac{c}{2}$; puis z diminue, il devient nul pour

$$X^2 = \frac{c^2}{\cos^2 2\alpha} - \frac{c^2 \sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha},$$

la tangente est alors verticale; à partir de ce moment z devient imaginaire; il est de nouveau nul quand

$$X^2 = \frac{c^2}{\cos^2 2\alpha} + \frac{c^2 \sin 2\alpha}{\cos^2 2\alpha},$$

et la tangente est de nouveau verticale; z augmente ensuite indéfiniment; on ne voit pas immédiatement les variations de la tangente, mais pour

$$z = \infty$$

elle devient verticale, ce qui suppose une inflexion. Nous pouvons déjà attribuer à la courbe une forme analogue à une lemniscate, savoir une branche fermée et deux branches infinies détachées.

Pour déterminer avec précision l'inflexion, il faudrait différentier deux fois l'équation (7), ce qui donne

$$3X^2\cos^2 2\alpha - c^2 = 2c^2 z \frac{d^2 z}{dX^2} + 2c^2\left(\frac{dz}{dX}\right)^2,$$

puis supposer $\frac{d^2 z}{dX^2} = 0$. On trouve ainsi une équation en X du sixième degré, qui s'abaisse au troisième, et qu'il serait trop long de discuter.

Le rayon de courbure au sommet H a pour expression $\frac{1}{\left(\frac{d^2z}{dX^2}\right)}$ ou, substitutions faites, $2c$; il est donc indépendant de α, et par suite le point H est un ombilic de la surface.

VI.

Plan tangent.

L'équation du plan tangent en un point ayant pour coordonnées ξ, η, ζ, est

$$(x' - \xi)\xi(2\eta^2 - c^2) + (y' - \eta)\eta(2\xi^2 - c^2) = 2c^2\zeta(z' - \zeta);$$

il est parallèle à zOx' le long des droites indéfinies AD, BC, et parallèle à zOy' le long des droites AB, CD; il est indéterminé aux quatre points A, B, C, D. C'est donc par des *pointes* que les quatre nappes infinies touchent la surface fermée.

GENERALISATION D'UN THÉORÈME DE M. M. ROBERTS;

PAR M. V.-A. LE BESGUE.

THÉORÈME. *Soit* ABCD *un tétraèdre dont les aires des faces respectivement opposées aux sommets* A, B, C, D *sont respectivement* a, b, c, d. *Si sur un plan quelconque* P *on abaisse des points* A, B, C, D *les perpendiculaires* a′, b′, c′, d′, *positives ou négatives selon qu'elles sont d'un côté du plan ou de l'autre, on aura toujours*

$$W = aa' + bb' + cc' + dd' = 3V.\frac{\rho}{r},$$

en représentant par V *le volume du tétraèdre, par* r *le rayon de la sphère inscrite, et par* ρ *la distance du plan* P *au centre de la sphère.*

Quand le théorème a été prouvé pour $\rho = 0$, c'est-à-dire quand on a montré que la somme $aa' + bb' + cc' + dd'$ est nulle relativement à tous les plans passant par le centre de la sphère inscrite, on trouve tout de suite pour un plan à la distance ρ de ce centre

$$a(a' + \rho) + b(b' + \rho) + c(c' + \rho) + d(d' + \rho)$$

$$= (a + b + c + d)\rho = 3V.\frac{\rho}{r},$$

à cause de

$$3V = (a + b + c + d)r.$$

Pour démontrer le cas de $\rho = 0$, on représentera par a'', b'', c'' les trois arêtes passant par D, de sorte que l'aire a soit comprise entre b'' et c''. Si la perpendiculaire menée par D à la face a fait avec a'' l'angle α_1, on a

$$3V = aa'' \cos \alpha_1,$$

et de même

$$3V = bb'' \cos \beta_1, \qquad 3V = cc'' \cos \gamma_1.$$

Maintenant si l'on prend les arêtes a'', b'', c'' pour axes des coordonnées, et que

$$h = \cos \alpha . x + \cos \beta . y + \cos \gamma . z,$$

soit l'équation du plan P, en représentant par h la perpendiculaire abaissée de l'origine D sur ce plan, et par α, β, γ les angles que cette perpendiculaire fait avec les trois axes, il en résulte que pour avoir les trois autres perpendiculaires abaissées sur le plan P des points A, B, C, il suffit de mener par ces points des plans parallèles à P.

En supposant ces trois perpendiculaires d'un même côté du plan, la perpendiculaire h étant de l'autre côté, les trois perpendiculaires de même signe sont

$$a'' \cos\alpha - h, \quad b'' \cos\beta - h, \quad c'' \cos\gamma - h,$$

et faisons

$$\begin{aligned} W = {} & (a'' \cos\alpha - h)\, a + (b'' \cos\beta - h)\, b \\ & + (c'' \cos\gamma - h) c - dh, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} W = {} & aa'' \cos\alpha_1 \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} + bb'' \cos\beta_1 \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\beta_1} \\ & + cc'' \cos\gamma_1 \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma_1} - (a + b + c + d)\, r \cdot \frac{h}{r}, \end{aligned}$$

ou encore

$$W = 3V \left\{ \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} + \frac{\cos\beta}{\cos\beta_1} + \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma_1} - \frac{h}{r} \right\}.$$

Or les coordonnées du centre de la sphère sont respectivement

$$\frac{r}{\cos\alpha_1}, \quad \frac{r}{\cos\beta_1}, \quad \frac{r}{\cos\gamma_1}.$$

Si ce point est sur le plan

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - h = 0,$$

on a donc

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} + \frac{\cos\beta}{\cos\beta_1} + \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma_1} - \frac{h}{r} = 0, \quad \text{d'où} \quad W = 0.$$

La démonstration ne change pas pour le triangle; seulement a, b, c, représentant les côtés, et la surface étant S, on obtient

$$aa'' + bb'' + cc'' = 2S \cdot \frac{\rho}{r},$$

pour $\rho = 0$ on a

$$aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$

pour $\rho = r$ on a

$$aa'' + bb'' + cc'' = 2S,$$

c'est là le théorème de M. Michael Roberts ; alors la droite variable dans le plan du triangle est toujours tangente au cercle inscrit dans ce triangle.

THÉORÈME SUR L'INTERSECTION D'UN CERCLE ET D'UNE CONIQUE.

THÉORÈME. *Par un point* fixe *dans le plan d'une conique, on fait passer une corde* quelconque ; *sur cette corde comme diamètre, on décrit une circonférence qui coupera la conique en deux points ; la corde qui joint ces deux points passe aussi par un point fixe.*

Démonstration. Plaçons l'origine des coordonnées au point fixe, et prenons pour axes des parallèles aux deux axes principaux.

Soient

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

équation de la conique ;

$$(y - px)(y + px + r) = y^2 - p^2x^2 + ry - prx = 0,$$

équation de deux droites *conjointes*, c'est-à-dire de deux droites parallèles à des diamètres *égaux*, système qui coupe la conique en quatre points situés sur une même circonférence ; soit

$$y^2(A+\lambda)+x^2(C-\lambda p^2)+y(D+\lambda r)+x(E-\lambda pr)+F=0,$$

l'équation d'une conique passant par les quatre points d'intersection ; λ est un multiplicateur arbitraire. Pour que cette équation représente un cercle, on doit avoir

$$A+\lambda=C-\lambda p^2,\quad \lambda=\frac{C-A}{1+p^2}.$$

Soient x', y' les coordonnées du centre de ce cercle ; on a

$$x'=-\frac{E-\lambda pr}{2(A+\lambda)},\quad y'=-\frac{D+\lambda r}{2(A+\lambda)};$$

ce centre, d'après l'énoncé, est sur la droite $y-px=0$, donc

$$-(D+\lambda r)+p(E-\lambda pr)=0,$$

$$r=\frac{pE-D}{\lambda(p^2+1)}=\frac{pE-D}{C-A}.$$

Substituant cette valeur de r dans l'équation du second ordre, on obtient

$$y(C-A)+px(C-A)+pE-D=0,$$

ou

$$y+p\left(x+\frac{E}{C-A}\right)=\frac{D}{C-A}.$$

Cette droite passe donc par le point fixe qui a pour coordonnées

$$x=-\frac{E}{C-A},\quad y=\frac{D}{C-A}.$$

C. Q. F. D.

Remarque. Cette propriété nous a été communiquée sans démonstration par M. Siacchi, de Milan, et pour le cas seulement où le point fixe est situé sur l'axe focal de l'ellipse.

Corollaire. Les deux systèmes de cercles sont des faisceaux homographiques.

$$y - px = 0, \quad y(C - A) + px(C - A) + pE - D = 0,$$

sont deux rayons homographiques; éliminant p, on obtient

$$2xy(C - A) + Ey - Dx = 0,$$

équation d'une hyperbole équilatère.

Remarque. Lorsque le point fixe est à l'infini, les deux faisceaux sont chacun formés de rayons parallèles; ce qui est intuitif.

PROPRIÉTÉS QU'ON DÉDUIT DE LA TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS (*).

1. La polaire réciproque d'une courbe plane par rapport à un cercle directeur est une ligne inverse de la podaire du centre du cercle.

2. L'inverse d'une circonférence est une circonférence qui devient une droite lorsque le pôle est sur la circonférence.

3. L'inverse d'une conique ayant pour pôle le centre est égale à la podaire de ce même centre.

(*) Étant donnée l'équation polaire d'une courbe, on obtient la ligne inverse en remplaçant ρ par $\frac{a^2}{\rho}$, a constante.

4. L'inverse d'une conique ayant pour pôle le foyer est une conchoïde circulaire.

5. L'inverse d'une parabole ayant pour pôle le sommet est une cissoïde.

6. L'inverse d'une strophoïde (logocyclique) est une strophoïde semblable.

7. L'inverse d'une cassinienne à plusieurs foyers est une cassinienne de même nombre de foyers.

8. L'inverse d'une droite est une circonférence passant par le pôle.

9. L'inverse d'une hyperbole équilatère est une lemniscate.

10. L'inverse d'une parabole ayant pour pôle le foyer est une cardioïde.

11. Trois circonférences passent par le même point O, et se coupent en trois autres points, sommets d'un triangle curviligne formé par trois arcs de la circonférence; les trois circonférences qui, passant par le même point O, divisent en parties égales les angles du triangle, passent encore par un autre point inverse du point O; les trois circonférences qui passent par le point O, perpendiculaires aux côtés du triangle curviligne, se coupent en un même point; la somme des trois angles du triangle curviligne est égale à deux angles droits.

12. Si sur trois cordes OA, OB, OC d'une circonférence, comme diamètres, on décrit trois circonférences, elles se coupent en trois points qui sont en ligne droite.

13. Si trois circonférences passent par le point de rebroussement d'une cardioïde tangentiellement à la courbe, les trois intersections de ces circonférences sont en ligne droite.

14. Les tangentes à une cardioïde, menées par les extrémités d'une corde passant par le point de rebroussement, se coupent à angle droit.

15. Si sur l'inverse d'une conique l'on prend six points, et si l'on décrit six circonférences passant chacune par deux points *consécutifs* et par le pôle, les intersections de chaque couple de circonférences opposées sont sur une même circonférence.

16. Si dans une lemniscate ordinaire on inscrit un triangle curviligne formé par des arcs de cercles passant chacun par le centre de la lemniscate, les trois circonférences qui passent par les trois sommets perpendiculaires aux côtés opposés, se coupent en un point qui est sur la lemniscate.

17. Soient des circonférences passant par le pôle d'une conchoïde circulaire, et coupant la courbe chacune en deux points, qui sont vus de l'origine sur un angle donné, l'enveloppe de ces circonférences est une conchoïde circulaire de même pôle.

18. Soient OA, OB, deux arcs de cercles; deux points A, B, sont fixes, et l'angle AOB est constant; le lieu des seconds points d'intersection des arcs OA, OB est une circonférence.

19. C_1, C_2, C_3 étant trois circonférences, trouver le centre C d'une quatrième circonférence qui touche les circonférences données. Soit O un point d'intersection des couples C_1 et C_2; prenant ce point pour pôle et pour numérateur de transformation inverse *la puissance* de O par rapport à C_3, les centres C_1 et C_2 se transforment en *droites*, et la circonférence C_3 ne change pas. Il suffit donc de mener un cercle touchant les deux droites et la

circonférence C_3 ; le centre C du cercle est le point cherché.

Si C_1 et C_2 ne se coupent pas, on peut augmenter ou diminuer les trois rayons de la même longueur, de manière qu'il y ait intersection, et cela ne change pas la position du point C (Mannheim).

20. Deux paraboles de même foyer passant par un même point fixe, le lieu du deuxième point d'intersection est un ovale cartésien.

21. Si les trois sommets des trois paraboles *confocales* sont sur une cardioïde dont le point de rebroussement est au foyer commun, leurs points d'intersection sont une quatrième parabole confocale aux premières.

22. Si trois hyperboles équilatères *concentriques* touchent la *même* droite, leurs points d'intersection seront sur une lemniscate concentrique aux hyperboles.

23. Le lieu des sommets d'hyperboles équilatères concentriques à une cassinienne ordinaire, et la touchant, est la podaire d'une conique par rapport à ce centre.

24. Le lieu des sommets des paraboles confocales et touchant une conique à centre est une conchoïde circulaire.

25. Un système d'ovales cartésiens à foyers communs est coupé orthogonalement par un système de paraboles confocales.

26. Un système de cassiniennes ordinaires de mêmes foyers est coupé orthogonalement par un système d'hyperboles équilatères passant par les foyers communs.

(*La suite prochainement.*)

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES

(voir t. XIX, p. 371);

PAR M. E.-E. KUMMER.

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

§ III. — *Direction des plus courtes distances et plans principaux.*

Considérons maintenant les directions des plus courtes distances entre un rayon et tous les rayons infiniment voisins. Ces directions sont données par les cosinus $\varkappa, \lambda, \mu$ de leurs angles avec les trois axes des coordonnées. Remplaçons dans les formules (13), § I, les différentielles dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ pour les quotients différentiels partiels, et par les différentielles des variables indépendantes, nous aurons :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \varkappa &= \frac{\eta\mathrm{c} - \zeta\mathrm{b} + (\eta\mathrm{c}' - \zeta\mathrm{b}')\,t}{\sqrt{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}t + \mathfrak{G}t^2}}, \\ \lambda &= \frac{\zeta\mathrm{a} - \xi\mathrm{c} + (\zeta\mathrm{a}' - \xi\mathrm{c}')\,t}{\sqrt{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}t + \mathfrak{G}t^2}}, \\ \mu &= \frac{\xi\mathrm{b} - \eta\mathrm{a} + (\xi\mathrm{b}' - \eta\mathrm{a}')\,t}{\sqrt{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}t + \mathfrak{G}t^2}}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on prend pour ξ, η, ζ les valeurs données (27), § I,

$$\xi = \frac{\mathfrak{A}}{\Delta}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{B}}{\Delta}, \quad \zeta = \frac{\mathfrak{C}}{\Delta},$$

et si l'on remarque que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}c - \mathcal{C}b &= a'\mathcal{E} - a\mathcal{F}, & \mathcal{B}c' - \mathcal{C}b' &= a'\mathcal{F} - a\mathcal{G},\\
\mathcal{C}a - \mathcal{A}c &= b'\mathcal{E} - b\mathcal{F}, & \mathcal{C}a' - \mathcal{A}c' &= b'\mathcal{F} - b\mathcal{G},\\
\mathcal{A}b - \mathcal{B}a &= c'\mathcal{E} - c\mathcal{F}, & \mathcal{A}b' - \mathcal{B}a' &= c'\mathcal{F} - c\mathcal{G},
\end{aligned}$$

on obtiendra

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\varkappa &= \frac{a'(\mathcal{E}+\mathcal{F}t) - a(\mathcal{F}+\mathcal{G}t)}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t+\mathcal{G}t^2}},\\
\lambda &= \frac{b'(\mathcal{E}+\mathcal{F}t) - b'(\mathcal{F}+\mathcal{G}t)}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t+\mathcal{G}t^2}},\\
\mu &= \frac{c'(\mathcal{E}+\mathcal{F}t) - c(\mathcal{F}+\mathcal{G}t)}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t+\mathcal{G}t^2}}.
\end{aligned}\right.$$

Considérons, en particulier, les directions des plus courtes distances qui correspondent aux points limites, à $t = t_1$ et $t = t_2$, et désignons par $\varkappa_1$, λ_1, μ_1, et $\varkappa_2$, λ_2, μ_2, les valeurs de $\varkappa$, λ, μ correspondantes. Au moyen de l'équation (6), § II, qui donne $\mathcal{E}+\mathcal{F}t_1 = -t_2(\mathcal{F}+\mathcal{G}t_1)$, nous obtenons les expressions suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\varkappa_1 &= -\frac{(a+a't)(\mathcal{F}+\mathcal{G}t_1)}{\Delta V_1},\\
\lambda_1 &= -\frac{(b+b't)(\mathcal{F}+\mathcal{G}t_1)}{\Delta V_1},\\
\mu_1 &= -\frac{(c+c't)(\mathcal{F}+\mathcal{G}t_1)}{\Delta V_1}.
\end{aligned}\right.$$

Nous avons posé

$$V_1 = \sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t_1+\mathcal{G}t_1^2};$$

posons de même

$$V_2 = \sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t_2+\mathcal{G}t_2^2},$$

nous aurons, d'après les équations (11) et (8), § II,

$$(4)\qquad V_1 V_2 = \Delta(t_2 - t_1), \quad \frac{\Delta V_1}{\mathcal{F} + \mathcal{G} t_1} = V_2, \quad \frac{\Delta V_2}{\mathcal{F} + \mathcal{G} t_2} = -V_1,$$

et, par suite,

$$(5)\quad \varkappa_1 = -\frac{a + a' t_2}{V_2}, \quad \lambda_1 = -\frac{b + b' t_2}{V_2}, \quad \mu_1 = \frac{-(c + c' t_2)}{V_2}.$$

On peut tirer de là les valeurs de $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 en changeant t_2 en t_1, ce qui donne $-V_1$ au lieu de V_2 :

$$(6)\qquad \varkappa_2 = \frac{a + a' t_1}{V_1}, \quad \lambda_2 = \frac{b + b' t_1}{V_1}, \quad \mu_2 = \frac{c + c' t_1}{V_1}.$$

Le cosinus de l'angle que forment entre elles les plus courtes distances de deux rayons infiniment voisins aux points limites, a pour valeur :

$$\varkappa_1 \varkappa_2 + \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2$$

$$= -\frac{(a + a' t_1)(a + a' t_2) + (b + b' t_1)(b + b' t_2) + (c + c' t_1)(c + c' t_2)}{V_1 V_2},$$

on obtient en effectuant

$$\varkappa_1 \varkappa_2 + \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 = -\frac{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}(t_1 + t_2) + \mathcal{G} t_1 t_2}{V_1 V_2}.$$

D'après (6), § II, cette valeur est nulle, donc l'angle est droit. Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

Les plus courtes distances d'un rayon aux rayons infiniment voisins pour lesquels on obtient les points limites, sont perpendiculaires entre elles.

Nommons *plans principaux* les plans qui passent par un rayon et sont perpendiculaires aux plus courtes distances de ce rayon aux rayons infiniment voisins qui donnent les points limites. D'après le théorème précédent, ces plans sont rectangulaires. La direction d'une droite perpendiculaire à un rayon sera déterminée quand on connaîtra l'angle qu'elle fait avec un plan passant par ce rayon. On considère les plans principaux d'un rayon comme l'origine des angles de toutes les directions perpendiculaires à ce rayon.

Soit ω l'angle que la direction de la plus courte distance d'un rayon à un rayon infiniment voisin fait avec la direction de la plus courte distance en un des points limites, celui dont l'abscisse est r_1, ou, ce qui revient au même, l'angle complémentaire de cette direction avec le second plan principal, on a

$$(7) \qquad \cos\omega = \varkappa_1\varkappa + \lambda_1\lambda + \mu_1\mu.$$

En mettant dans cette formule les valeurs (2) et (6) de $\varkappa, \lambda, \mu, \varkappa_1, \lambda_1, \mu_1$, on a

$$(8) \qquad \cos\omega = -\frac{\mathcal{E} + \mathcal{F}t_1 + t(\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1)}{V_1\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2}},$$

ou bien, en ayant égard à l'équation (6), § II,

$$(9) \qquad \cos\omega = \frac{(\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1)(t_2 - t_1)}{V_1\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2}}.$$

On tire de là

$$(10) \qquad \sin\omega = \frac{\Delta(t - t_1)}{V_1\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2}},$$

$$(11) \qquad \tang\omega = \frac{\Delta(t - t_1)}{(\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1)(t_2 - t)};$$

et par suite

$$(12) \qquad t = \frac{\Delta t_1 \cos\omega + (\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1)t_2 \sin\omega}{\Delta\cos\omega + (\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1)\sin\omega}.$$

Au moyen de cette formule, on peut remplacer t par sa valeur en fonction de l'angle ω qui fixe plus nettement la position d'un rayon par rapport à un rayon infiniment voisin. Faisons cette substitution dans l'expression

$$r = \frac{e + (f + f')t + gt^2}{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2}$$

de l'abscisse du point d'un rayon le plus rapproché d'un rayon infiniment voisin, et remarquons que

$$(13) \qquad \mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2 = \frac{\Delta^2 V_1^2}{[\Delta \cos\omega + (\mathcal{F} + \mathcal{G}t)\sin\omega]^2},$$

$$(14) \qquad e + (f + f')t + gt^2$$

$$= \frac{\Delta^2[e + (f + f')t_1 + gt_1^2]\cos^2\omega + (\mathcal{F} + \mathcal{G}t)[e + (f + f')t_2 + gt_2^2]\sin^2\omega}{[\Delta\cos\omega + (\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1)\sin\omega]^2},$$

nous obtiendrons

$$(15) \qquad r = -\frac{[e + (f + f')t_1 + gt_1^2]}{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t_1 + \mathcal{G}t_1^2}\cos^2\omega - \frac{[e + (f + f')t_2 + gt_2^2]}{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t_2 + \mathcal{G}t_2}\sin^2\omega.$$

Si nous avons égard aux formules (12) et (13), § II, la formule précédente devient

$$(16) \qquad r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega.$$

Cette élégante formule, qui donne une relation si simple entre les plus courtes distances d'un rayon à un rayon infiniment voisin quelconque et les plus courtes distances qui correspondent aux deux points limites du rayon, a été trouvée par Hamilton, dans le supplément de son Mémoire : *On the theory of systems of rays.* Il nomme *virtual foci* les pieds de la plus courte distance de deux rayons infiniment voisins. Il a aussi signalé pour la première fois les points limites et les plans principaux.

(*La suite prochainement.*)

NOUVELLES DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES DE MM. FAURE ET PAINVIN

(voir t. XIX, p. 290 et 347);

Par M. Paul SERRET.

1. Soient : une ellipse,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2;$$

un triangle conjugué ABC; et le cercle, circonscrit à ce triangle, et représenté par l'équation

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma^2 = 0,$$

où γ désigne la longueur de la tangente menée au cercle par le centre de l'ellipse. Soient, de plus, X, Y les coordonnées du sommet A; et

$$(2) \qquad y = mx + n$$

l'équation du côté opposé BC; m et n ayant les valeurs suivantes :

$$(a) \qquad m = -\frac{b^2 X}{a^2 Y}, \quad n = \frac{a^2 b^2}{a^2 Y}.$$

Les sommets B et C du triangle étant deux points conjugués, la droite (2) doit couper le cercle (1) suivant deux points conjugués; et l'on a, dès lors, entre les coordonnées des points communs au cercle et à la droite, la relation

$$(3) \qquad a^2 . y' y'' + b^2 . x' x'' = a^2 b^2.$$

D'ailleurs l'élimination alternative de x, ou de y, entre les équations (1) et (2), donne les expressions de $y'y''$ et

$x'x''$ en fonction de m, n et, par suite, en fonction de X, Y : et l'on trouve, en substituant ces valeurs dans l'équation de condition (3),

$$(3') \qquad \left\{ \begin{array}{l} b^2(\gamma^2 - b^2)X^2 + a^2(\gamma^2 - a^2)Y^2 \\ - a^2 b^2 (2\alpha X + 2\beta Y - a^2 - b^2) = 0, \end{array} \right.$$

à laquelle il faut joindre la relation

$$(4) \qquad X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y + \gamma^2 = 0,$$

exprimant que le sommet A du triangle appartient au cercle.

Or, les équations (3') et (4) ayant lieu simultanément, l'équation obtenue en multipliant la seconde par $-a^2 b^2$ et l'ajoutant à la première, a lieu en même temps que les deux autres : on a donc

$$(5) \qquad (\gamma^2 - a^2 - b^2)(a^2Y^2 + b^2X^2 - a^2 b^2) = 0,$$

et comme le sommet A (X, Y) peut être pris arbitrairement dans le plan de l'ellipse, le second facteur n'est pas nul; l'égalité précédente se réduit à

$$\gamma^2 - a^2 - b^2 = 0,$$

d'où

$$(6) \qquad \gamma^2 = a^2 + b^2.$$

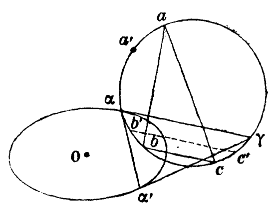
2. On peut parvenir, plus simplement encore, au résultat, par un emploi convenable d'un théorème dû à M. Chasles.

Considérons, à cet effet, un triangle conjugué abc, le cercle circonscrit à ce triangle, et, sur ce cercle, un point a' quelconque, ou tel, du moins, que sa polaire, relative à l'ellipse, coupe le cercle en deux points réels b' et c'. (Cette condition pourra être remplie, d'une infinité de manières, en prenant le point a' suffisamment voisin de l'un des points de rencontre du cercle abc et de l'ellipse.) *Le triangle* a′b′c′, *ainsi défini, sera un triangle conjugué.*

En effet, dans la construction d'un pareil triangle dont un premier sommet a' est donné, on peut choisir le second b', arbitrairement, sur la polaire $b'c'$ du premier : le second sommet b' peut donc, dans le cas actuel, être pris sur le cercle abc. D'ailleurs, par le théorème auquel nous avons fait allusion, *les six sommets de deux triangles conjugués quelconques* abc, a′b′c′ *appartiennent à une même courbe du second degré* : et comme, dans le cas actuel, les cinq premiers sommets a, b, c, a', b' appartiennent, par construction, au cercle abc, il en est de même du sixième.

Cela posé, le triangle abc et le cercle circonscrit demeurant fixes, imaginons que le sommet a' glisse sur ce

FIG. 1.



cercle, en restant extérieur à l'ellipse, et en se rapprochant indéfiniment du point α commun au cercle et à l'ellipse : sa polaire $b'c'$ coupera le cercle en deux points *reels* b', c'; la corde $b'c'$ se rapprochera indéfiniment de la tangente $\alpha\gamma$ de l'ellipse en α, et aussi du point a'. En même temps, l'un des points b', c', le premier par exemple, se rapproche indéfiniment du point a' : d'où il résulte que la limite du côté $a'b'$ est la tangente en α du cercle abc; la limite du point c' étant le pôle γ de cette tangente.

Nous avons donc, par une sorte d'*élimination géomé-*

trique du triangle conjugué primitif *abc*, cette *construction* générale du cercle circonscrit à un pareil triangle : *Mener dans l'ellipse une corde quelconque* $\alpha\alpha'$, *construire son pôle* γ; *et faire passer par ce pôle un cercle tangent à la corde en l'une de ses extrémités.*

Cette construction établie, on trouve aisément la seconde trace γ' du cercle $\alpha\gamma$ sur le diamètre $O\gamma$ de l'ellipse, et la *puissance* $P^2 = O\gamma . O\gamma'$ du centre de l'ellipse par rapport à ce cercle.

3. Les cercles circonscrits aux triangles conjugués coupent orthogonalement le cercle $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$; et l'axe radical de deux quelconques de ces cercles passe par le centre de l'ellipse.

4. Chaque point de l'ellipse pouvant être considéré comme un triangle conjugué, de dimensions nulles, quel est le cercle circonscrit correspondant? On trouve que chacun de ces cercles, tangent extérieurement à la courbe, a pour diamètre le rayon de courbure correspondant de l'ellipse. L'enveloppe de tous les cercles semblables se compose de l'ellipse proposée et de l'une de ses lignes *réciproques* par rapport au centre, pris pour origine des rayons vecteurs; et la tangente à la ligne de leurs centres est perpendiculaire au diamètre correspondant de l'ellipse (*).

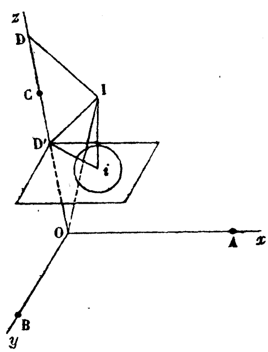
5. On peut déduire, des remarques précédentes, la construction de l'ellipse, connaissant : un premier point de la courbe, et la tangente correspondante; un second point et le cercle de courbure correspondant.

6. Pour passer au théorème de M. Painvin, considérons un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués

(*) Belle observation dont la preuve est à désirer. TM.

quelconques OA, OB, OC, ou Ox, Oy, Oz. Ayant coupé cet ellipsoïde par le plan $z=\gamma$, imaginons un triangle $\mathfrak{T}$ conjugué par rapport à la section résultante; et soit, sur Oz, D le pôle du plan $z=\gamma$: le tétraèdre ($\mathfrak{T}$, D) sera un tétraèdre *conjugué*.

Fig. 2.



Notation. A, B, C demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde;

a, b demi-diamètres conjugués, parallèles à Ox, Oy de la section $z=\gamma$;

r, rayon du cercle circonscrit au triangle $\mathfrak{T}$; R, rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre ($\mathfrak{T}$, D);

i, centre du cercle $\mathfrak{T}$; I, centre de la sphère ($\mathfrak{T}$, D); O, centre de l'ellipsoïde; D', centre de la section $z=\gamma$;

$$(\mathrm{A})\quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{OD}'=\gamma, & \mathrm{OD}=\dfrac{\mathrm{C}^2}{\gamma}, \\ a^2+b^2=(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)\dfrac{\mathrm{C}^2-\gamma^2}{\mathrm{C}^2}, & \overline{\mathrm{D}'i}^2=r^2+a^2+b^2: \end{array} \right.$$

cette dernière équation n'étant autre chose que la traduction du théorème de M. Faure.

Si nous joignons maintenant le point I aux trois points en ligne droite O, D′, D, nous aurons la relation connue

$$\overline{OI}^2.DD' + \overline{DI}^2.OD' = \overline{D'I}^2.OD + OD.OD'.DD' :$$

de là, en remplaçant $\overline{DI}^2$ par R^2; $\overline{D'I}^2$ par sa valeur

$$\overline{D'i}^2 + \overline{iI}^2 = (r^2 + a^2 + b^2) + (R^2 - r^2) = R^2 + a^2 + b^2,$$

déduite de la considération du triangle IiD', rectangle en i, et de l'emploi de la dernière des relations (A),

$$\overline{OI}^2.DD' + R^2.OD' = (R^2 + a^2 + b^2)OD + OD.OD'.DD'.$$

Enfin par une réduction évidente, cette dernière équation peut s'écrire

$$\overline{OI}^2 - R^2 = \frac{(a^2 + b^2)\,OD + OD.OD'.DD'}{DD'} :$$

d'où, par l'emploi des relations (A), et après quelques simplifications,

$$\overline{OI}^2 - R^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

7. Chaque point de l'ellipsoïde peut être considéré comme un tétraèdre conjugué de dimensions nulles; et l'on trouve que la sphère circonscrite correspondante est tangente extérieurement à l'ellipsoïde, son diamètre étant égal à la somme des rayons de courbure principaux de la surface, au point de contact.

Note du Rédacteur. Nous n'avons jusqu'ici que des *vérifications* du beau théorème Faure. L'ingénieux géomètre voudra bien nous donner son procédé d'*invention;* probablement cas particulier de sa méthode générale de transformation métrique, source inépuisable de propriétés de l'espace.

THÉORÈMES CONCERNANT LES COURBES GÉOMÉTRIQUES PLANES;

Par M. E. DE JONQUIÈRES.

I. La courbe enveloppe des cordes communes à une courbe fixe du degré m et aux courbes d'un faisceau (*) du degré n est de la classe $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)$.

Si la courbe fixe est une conique, la classe de l'enveloppe est simplement $(2n-1)$. On en conclut aisément que :

II. Par $\frac{1}{2}n(n+3)-\mu$ points donnés, on peut décrire $\overline{2(2n-1)}^{\mu}$ courbes du degré n tangentes à μ coniques données.

Par exemple, il y a 7776 coniques qui touchent cinq coniques; dix billions de courbes du troisième ordre qui touchent neuf coniques, etc. M. Bischoff a donné dans le *Bulletin*, t. V, p. 17, une formule plus générale qui s'applique à des courbes tangentes quelconques, mais qui paraît en défaut dans certains cas.

III. Une transversale tourne dans un plan autour d'un point fixe S, et rencontre, à chaque instant, en m points, une courbe géométrique du degré m tracée dans ce plan.

(*) On sait que des courbes du degré n forment un *faisceau*, quand elles ont les mêmes n^2 points d'intersection, ce qui a lieu si elles passent par $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ points communs.

Si l'on mène les tangentes et les normales à la C_m en ces points d'intersection, les tangentes se coupent deux à deux sur une courbe Σ, et les normales se coupent aussi deux à deux sur une seconde courbe Σ'.

1° Le degré de la courbe Σ est $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$; cette courbe passe par chacun des $(m-2)$ points de la C_m, autres que le point de contact, qui sont situés sur chacune des $m(m-1)$ tangentes qu'on peut mener du point S à cette C_m.

Chacune des tangentes de C_m en ses points d'inflexion et de rebroussement est une tangente multiple de Σ, d'un ordre de multiplicité égal à $(m-1)$.

Si $m=2$, la courbe Σ est simplement la *droite polaire* du point S.

2° Le degré de la courbe Σ' est $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-1)$; si l'on mène par le point S des parallèles aux m asymptotes de la C_m, et ensuite des normales à cette courbe en tous les points où ces parallèles la rencontrent à distance finie, on obtiendra d'abord $m(m-1)$ droites parallèles aux asymptotes de la courbe Σ'.

On démontre en outre que sur la courbe C_m il existe $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$ paires d'éléments infiniment petits, parallèles deux à deux et situés deux à deux sur des droites concourantes au point S. Les normales en ces points à la courbe C_m sont les directions des autres asymptotes de Σ'; on a en effet

$$m(m-1)+\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)=\frac{1}{2}m(m-1)(2m-1).$$

Les normales à C_m en ses points d'inflexion et de rebroussement sont des tangentes à Σ' de l'ordre $(m-1)$.

Si $m=2$, la courbe Σ' est du troisième ordre, comme je l'ai démontré dans le tome XVIII, page 261, des *Nouvelles Annales*, à l'occasion d'un problème dont celui qui précède est la généralisation.

SOLUTION DE LA QUESTION 548

(voir t. XIX, p. 405 et t. XX, p. 56);

PAR M. E. DÉ JONQUIÈRES.

Lieu géométrique des foyers de coniques assujetties à quatre conditions communes.

On peut, en se servant d'un procédé de démonstration employé par M. Chasles, dans son Cours à la Sorbonne, pour le cas où les coniques ont quatre points communs, trouver aisément, sans aucun calcul, le degré de la courbe, lieu des foyers d'une série de coniques assujetties à quatre conditions quelconques. *Ce degré est* $3n$, n étant le nombre des coniques qui satisfont aux quatre conditions proposées et qui touchent une droite donnée; *et la courbe a deux points multiples imaginaires de l'ordre* n *situés à l'infini sur un cercle.*

Pour le démontrer, supposons d'abord qu'on cherche le degré de la courbe, lieu des points de rencontre des tangentes menées aux coniques de la série proposée par deux points fixes P, P', donnés dans leur plan commun.

Menons, par le point P, une droite quelconque PL, et soit n le nombre des coniques de la série qui touchent PL. On pourra, par le point P', mener $2n$ tangentes à ces coniques, lesquelles couperont PL en $2n$ points appartenant à la courbe cherchée.

En outre, la droite PP′ est elle-même touchée par n coniques de la série, auxquelles on peut mener n autres tangentes par le point P. Ces n tangentes coupent la tangente PP′ au point P lui-même, qui par conséquent est un point n^{tuple}; et de même pour le point P′.

Ainsi le lieu cherché possède, sur toute droite PL, issue du point P, $3n$ points, dont n se confondent en un seul au point P. Donc ce lieu est du degré $3n$.

Si les points P, P′ sont les deux points imaginaires situés à l'infini sur un cercle, deux des sommets du quadrilatère circonscrit à chaque conique restent réels; ce sont les foyers de la conique; ce qui démontre le théorème énoncé ci-dessus.

Autrement. Soient U une conique quelconque, n'appartenant pas à la série proposée, et L une tangente quelconque de cette conique. Il existe, dans la série, n coniques qui touchent L, et chacune de ces courbes a trois autres tangentes communes avec U, lesquelles rencontrent L en trois points. Donc la courbe cherchée a $3n$ points sur L, ce qui prouve qu'elle est du degré $3n$.

Si U se réduit à une ellipse infiniment aplatie, c'est-à-dire à un segment terminé, et que ce segment devienne lui-même le segment imaginaire intercepté par un cercle sur la droite située à l'infini, les points de concours des tangentes communes à U et aux coniques de la série proposée deviennent les foyers de ces courbes; ce qui démontre le théorème, quant au degré du lieu de ces foyers.

On conclut de là que :

1° Si les coniques passent par quatre mêmes points, $n=2$, et le lieu des foyers est du sixième ordre, avec deux points doubles à l'infini sur un cercle.

2° Si les coniques passent par trois mêmes points et touchent une droite (c'est le cas de la question n° 548), $n=4$, et le lieu est du douzième ordre, avec deux points quadruples à l'infini sur un cercle. De même si les coniques passent par deux points et touchent deux droites.

3° Si les coniques sont inscrites dans le même quadrilatère, $n=1$; le lieu est simplement du troisième ordre.

4° Si les coniques sont normales à quatre mêmes droites, $n=51$; le lieu est de l'ordre 153, avec deux points multiples imaginaires de l'ordre 51 à l'infini sur un cercle.

5° Si les coniques passent par trois points et touchent une courbe donnée d'ordre m, on a $n=2m(m+1)$; le lieu des foyers est donc de l'ordre $6m(m+1)$.

6° Si les coniques passent par deux mêmes points et ont un double contact avec une courbe de degré m, le lieu des foyers est de l'ordre $3m(m-1)(m^2+3m-8)$, et ainsi de suite.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. LE PRINCE G. GAGARINN.

Odessa, le $\frac{15}{27}$ juillet, 1860.

Placeriez-vous parmi les questions de votre journal le problème suivant :

Des quantités incommensurables entrent dans un calcul que l'on doit effectuer : avec quel degré d'approximation doit-on prendre chacune d'elles pour que le résultat soit exact à moins de $\frac{1}{10^n}$?

Note du Rédacteur. — Plusieurs analystes se sont occupés de cette question. *Voir* l'ouvrage de M. Vieille, *Théorie générale des approximations*, in-8, 1852; et

Nouvelles Annales, t. I, p. 249; t. IV, p. 114, 215. On peut aussi consulter avec fruit l'ouvrage de M. Mundt (*Bulletin*, t. I, p. 14) dont nous espérons entretenir nos lecteurs. Nous citerons encore une théorie de M. Guilloud, dont on m'a dit beaucoup de bien, et une autre récente de M. Bourget, professeur de la Faculté de Clermont, et dont il sera question au *Bulletin*.

SUR LA QUESTION 478 ET SON EXTENSION AU TÉTRAÈDRE

(voir t. XIX, p. 283);

PAR M. MENTION.

En m'occupant des relations qui existent entre les rayons des huit cercles tangents à trois autres, et ceux des seize sphères qui touchent quatre sphères données, j'ai indiqué les relations suivantes concernant le triangle et le tétraèdre :

$$(\mathrm{A})\quad \sum(\mathrm{AM}^4.a^2) - 2\sum\left(\overline{\mathrm{AM}}^2.\overline{\mathrm{BM}}^2 ab\cos\widehat{a,b}\right) = 16\mathrm{T}^2.\overline{\mathrm{MO}}^2,$$

M étant un point quelconque du plan d'un triangle ABC, a, b, c ses côtés, T sa surface et O le centre de son cercle circonscrit.

$$(\mathrm{B})\quad \sum(\mathrm{AM}^4.\mathrm{A}^2) - 2\sum\left(\overline{\mathrm{AM}}^2.\overline{\mathrm{BM}}^2.\mathrm{AB}\cos\widehat{\mathrm{A},\mathrm{B}}\right) = 36\mathrm{V}.\overline{\mathrm{MO}}^2,$$

M étant un point quelconque de l'espace, A, B, C, D les

(*) M. Pigeon (Henri), élève du lycée de Strasbourg, a envoyé une seconde solution des questions 478 et 523.

quatre faces du tétraèdre ABCD, V son volume et O le centre de sa sphère circonscrite.

Ce ne sont que les relations de Goldbach et de Carnot transformées.

Le théorème de M. Salmon, démontré page 283 du tome XIX de ce recueil, se déduit facilement de ces relations : on peut même l'étendre au tétraèdre.

Lemme. Étant donnés un cercle de centre O et une droite qui lui est extérieure ou tangente, il est toujours possible de déterminer deux points M, M′ (se confondant avec le point de contact, quand la droite touche le cercle), tels que

$$\overline{MA}^2 = 2AP.MO.$$

A un point quelconque de la circonférence, AP sa distance à la droite.

Ce lemme subsiste pour une sphère et un plan.

Alors α, β, γ, δ désignant les distances des sommets d'un triangle à une droite qui ne coupe point le cercle circonscrit, on aura :

$$\overline{AM}^2 = 2\alpha.MO,$$

$$\overline{BM}^2 = 2\beta.MO,$$

$$\overline{CM}^2 = 2\gamma.MO;$$

d'où, par la substitution dans la formule (A),

$$\sum a^2\alpha^2 - 2\sum ab\cos\widehat{a,b}.\alpha\beta = 4T^2.$$

Ensuite α, β, γ, δ désignant les distances des sommets d'un tétraèdre à un plan qui ne coupe point la sphère circonscrite, on aura

$$\overline{AM}^2 = 2\alpha . MO,$$

$$\overline{BM}^2 = 2\beta . MO,$$

$$\overline{CM}^2 = 2\gamma . MO,$$

$$\overline{DM}^2 = 2\delta . MO;$$

d'où, par la substitution dans la formule (B),

$$\sum A^2 \alpha^2 - 2 \sum AB \cos \widehat{A,B}\, \alpha\beta = 9V^2.$$

On pourrait introduire les arêtes dans cette relation, car

$$16 AB . \cos \widehat{A,B}$$

$$= c'^2 (a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2) + b^2 b'^2 + a^2 a'^2 - c^2 c'^2 - a'^2 b'^2 - a^2 b^2,$$

a, a', b, b', c, c' couples d'arêtes opposées, a', b', c' partant du sommet B, a', b, c du sommet A, a, c, b' du sommet B, etc.

Il sera facile de conclure du cas précédent le cas où la droite et le plan coupent le cercle et la sphère, en prenant une droite et un plan parallèles et ne les coupant pas.

Note. Le théorème (p. 63) attribué à M. Roberts est de M. J. Harcourt (t. XIX, p. 439).

SOLUTION DE LA QUESTION 555

(voir t. XIX, p. 464);

PAR M. H. DE MILLEVILLE,
Soldat au 42e de ligne,
ET M. HENGY,
Maître répétiteur au lycée de Sens.

Soient $2b$ la base du triangle isocèle, h sa hauteur, l la distance à la base du sommet d'une parabole inscrite. L'équation de cette parabole, en prenant pour axes la base et la hauteur du triangle, sera

$$y = l - \frac{h^2 x^2}{4b^2(h-l)};$$

l'aire de cette parabole, bornée par la base, est

$$S = lx - \frac{h^2 x^3}{12 b^2 (h-l)}.$$

Prenons la dérivée de la fonction S par rapport à l, ainsi que la dérivée par rapport à x et égalons ces dérivées à zéro, on a

$$x - \frac{h^2 x^3}{12 b^2 (h-l)^2} = 0, \qquad l - \frac{h^2 x^2}{4 b^2 (h-l)} = 0.$$

Eliminons x entre ces deux équations. La première donne

$$\frac{h^2 x^2}{4b^2(h-l)} = 3(h-l),$$

et, par suite, on tire de la seconde

$$l = \frac{3}{4} h,$$

valeur qui correspond au maximum de l'aire.

Cette aire maximum est

$$S_m = \frac{\sqrt{3}}{4} bk.$$

Les coordonnées des points où la parabole est tangente aux côtés du triangle sont $\pm \frac{b}{2}$ et $\frac{h}{2}$.

Note du Rédacteur. Il reste à démontrer que le sommet de la parabole est sur la hauteur.

SOLUTION DE LA QUESTION 281

(voir t. XII, p. 327);

PAR M. COMBESCURE,
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

Par un point donné dans un plan, mener dans l'espace trois droites rectangulaires, de telle sorte qu'en prenant sur ces droites, à partir du point donné, des longueurs égales, les projections de ces longueurs sur le plan soient dans des rapports donnés.

Ces axes ainsi déterminés, tournant autour d'une droite fixe passant par le point donné, trouver les projections de ces axes après une rotation donnée.

Soient γ, γ_1, γ_2 les angles que les droites cherchées OX, OY, OZ font respectivement avec la normale oz au plan de projection yox, dans lequel on a mené à angle droit les axes ox, oy. Les trois droites étant rectangulaires, on aura d'abord

$$\cos^2\gamma + \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 = 1,$$

et la proportionnalité requise des projections conduira à

$$\sin\gamma_1 = m\sin\gamma, \quad \sin\gamma_2 = n\sin\gamma,$$

m et n étant des nombres donnés et prenant sur les droites la longueur commune égale à 1. On déduit immédiatement de ces trois équations

$$\sin^2\gamma = \frac{2}{m^2+n^2+1},$$

et les deux dernières équations font connaître ensuite γ et γ_2.

En désignant par φ, φ_1, φ_2 les angles que font des projections avec ox, les formules connues qui expriment la perpendicularité de deux directions donnent sur-le-champ

$$\cos(\varphi_1-\varphi) = -\cot\gamma_1\cot\gamma,$$
$$\cos(\varphi-\varphi_2) = -\cot\gamma_2\cot\gamma,$$
$$\cos(\varphi_2-\varphi_1) = -\cot\gamma_1\cot\gamma_2,$$

une de ces relations étant la conséquence des deux autres, puisque la longitude initiale du système est manifestement arbitraire.

Soient actuellement λ, λ_1, λ_2 les angles qu'un axe fixe OI fait avec les trois droites dans la position qu'on vient de déterminer; Γ et Φ sa colatitude et sa longitude relativement au plan yox. Si l'on considère le triangle sphérique XIz dont les côtés sont λ, Γ, γ et les angles opposés $\varphi-\Phi$, ξ, θ, on en déduit

$$\sin\theta = \frac{\sin\gamma\sin(\varphi-\Phi)}{\sin\lambda}.$$

Or quand on fait tourner le système autour de OI d'un angle donné ω, l'angle θ devient $\theta\pm\omega$, suivant le sens de la rotation, tandis que λ et Γ restent invariables. On a donc après la rotation un nouveau triangle sphérique dans lequel on connaît deux côtés λ, Γ et l'angle compris $\theta \pm \omega$, et d'où l'on peut déduire par suite les nouvelles valeurs γ', $\varphi' - \Phi$ de γ et $\varphi - \Phi$, ce qui détermine complétement la grandeur et la direction de la projection de OX après la rotation. Il serait parfaitement inutile, surtout au point de vue de l'application, d'exprimer γ' et φ' en fonction des données immédiates. On ferait un calcul analogue pour les deux autres projections (*).

THÉORÈME FONDAMENTAL DE DESARGUES;

PAR M. POUDRA.

Soient une conique à centre o, et une droite D dans le plan de la conique; p est le pôle de D relativement à la conique; par p on mène une transversale quelconque T rencontrant la droite D en t; sur cette transversale on prend deux points *fixes* f_1, f_2 harmoniquement conjugués aux points p et t, et deux points *variables* c_1, c_2 liés harmoniquement aux points fixes f_1, f_2; par c_1 on mène une tangente à la conique; soit m le point de contact: les droites mc_1, mc_2 coupent la droite D en un couple *variable* de points formant une involution sur cette droite. Le diamètre de la conique passant par le milieu de $f_1 f_2$ rencontre la droite D en un point s, qui est le centre de cette involution; soit d la distance de ce centre à un point *double*

(*) Ce problème est relatif à la perspective Farish (William) *on isometrical perspective* (*Trans. Cambr. Soc.*, t, I, 1822). Né en 1759, mort en 1837. TM.

de l'involution ; par la droite D, menez un plan quelconque P, et dans ce plan élevez en s une perpendiculaire st égale à la distance d ; concevons un cône, ayant pour sommet le point t et pour base la conique donnée ; menons un plan parallèle à P, il coupera le cône suivant une conique dont les deux foyers sont sur les droites tf_1, tf_2.

C'est de cette propriété que Desargues déduit toutes les propriétés focales et diamétrales des coniques.

Note du Rédacteur. Les couples de points c_1, c_2 sont aussi en involution sur la transversale T, et le milieu de f_1, f_2 est le centre de cette involution. Les points p et t sont deux points conjugués dans cette involution. Le pôle de la transversale T est le point de la droite D conjuguée au point t, dans l'involution sur cette droite.

SOLUTION DE LA QUESTION 545

(voir t. XIX, p. 404) ;

PAR M. LOUIS CREMONA.
Professeur de géométrie supérieure à l'université de Bologne (*).

On sait que la polaire réciproque d'un cercle, par rapport à un autre cercle, est une conique qui a un foyer au centre du cercle directeur. D'où il suit que la polaire réciproque d'une conique donnée est un cercle, seulement si le cercle directeur a son centre dans un foyer de la conique donnée.

(*) Chaire établie par M. Farini, et trois autres à Turin, Pavie et Naples. Cette dernière par Garibaldi. TM.

On a un théorème analogue dans l'espace. La polaire réciproque d'une surface de révolution du second ordre donnée, par rapport à une sphère, est une surface du second ordre, qui a un point focal au centre de la sphère directrice. D'où il suit que la polaire réciproque d'une surface du second ordre donnée n'est une surface de révolution qu'à condition que le centre de la sphère directrice soit un point focal de la surface donnée. C'est-à-dire :

Les coniques focales ou excentriques d'une surface du second ordre sont le lieu du centre d'une sphère par rapport à laquelle la polaire réciproque de la surface donnée est une surface de révolution.

SOLUTION DE LA QUESTION 527

(voir t. XIX, p. 235);

PAR MM. J. MENTION ET TRONSENS,
Elève du lycée de Douai,

ET M. E.-M. H***.

Les points de rencontre des hauteurs des triangles, inscrits et circonscrits au système de deux circonférences, sont situés sur une circonférence.

On a démontré (*) que la distance du centre du cercle des neuf points au centre du cercle inscrit est égale à $\frac{R}{2} - r$; R, r étant les rayons des cercles circonscrit et

---

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. V, p. 404.

inscrit. Ainsi le centre du cercle des neuf points décrit une circonférence. Or il est au milieu de la droite joignant le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des hauteurs; donc celui-ci décrira une circonférence de rayon $R - 2r$....

Le centre de gravité décrit également une circonférence.

SOLUTION DE LA QUESTION 551

(voir t. XIX, p. 404);

PAR M. STANISLAS KAMINSKY.

1. *Lemme.* La somme de deux carrés n'est jamais de la forme $4n+3$.

2. *Lemme.* Un nombre pair de facteurs de la forme $4n+3$ donne un produit de la forme $4n+1$.

Un nombre impair de facteurs de la forme $4n+3$ donne un produit de même forme.

3. *Lemme.* La somme de deux carrés impairs est de la forme $4n+2$.

THÉORÈME. *L'équation*

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = pz^2,$$

p *étant un nombre de la forme* $4n+3$, *est impossible en nombres rationnels.*

Démonstration. Soient

$$x = \frac{m}{l}, \quad y = \frac{n}{q}$$

deux nombres fractionnaires irréductibles; on devra avoir

$$(2)\qquad m^2q^2 + n^2l^2 = pq^2l^2.$$

Il y a trois cas.

1^er^ CAS. q et l impairs; alors q^2l^2 est de la forme $4n+1$ (lemme 2), donc pq^2l^2 est de la forme $4n+3$; par conséquent l'équation (2) est impossible (lemme 1).

2^e^ CAS. q pair et l impair; $n^2l^2 = pq^2l^2 - m^2q^2$; équation impossible, car q étant pair, n est impair; donc n^2l^2 est impair.

3^e^ CAS. q pair et l pair; faisons

$$q = 2^r q_1, \quad l = 2^s l_1 \quad \text{et} \quad s > r;$$

l_1 et q_1 sont impairs; donc

$$2^{2r} m^2 q'^2 + 2^{2s} n^2 l'^2 = p\, 2^{2r+2s} q'^2 l'^2$$

ou

$$m^2 q'^2 + 2^{2(s-r)} n^2 l'^2 = 2^{r+2s} q'^2 l'^2;$$

équation impossible, car $m^2q'^2$ est impair.

Autre démonstration d'après Legendre.

Si

$$p = s^2 t, \quad \text{on pose} \quad sz = z'$$

et l'équation (1) conserve la même forme; donc on peut admettre que p ne renferme pas de diviseur carré.

Soit donc

$$p = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \ldots \alpha_n;$$

les α sont des nombres premiers.

Legendre démontre (*Théorie des nombres*, 2^e^ éd., p. 31) que l'équation (1) n'est possible qu'autant qu'il existe un nombre entier λ qui satisfasse à l'équation

$$\lambda^2 + 1 = pu;$$

u étant un nombre entier, on devra donc avoir simultanément les équations

$$\lambda^2 + 1 = \alpha_1 u_1 = \alpha_2 u_2 = \alpha_3 u_3 \ldots = \alpha_n u_n;$$

les u étant des nombres entiers; or, pour que l'équation

$$\lambda^2 + 1 = \alpha_t u_t$$

soit possible, il faut que l'on ait

$$(-1)^{\frac{\alpha_t - 1}{2}} - 1 = \alpha_t \nu;$$

ν nombre entier (*Théorie des nombres*, 2[e] édit., p. 170). Or p étant de la forme $4n+3$, il faut qu'il y ait un nombre impair de α de cette forme (lemme 2) et au moins un.

Soit donc

$$\alpha_t = 4n + 3;$$

on devra avoir

$$(-1)^{2n+1} - 1 = \alpha_t \nu, \quad \text{ou} \quad -2 = \alpha_t \nu;$$

équation impossible; donc, etc.

MATHEMATICAL MONTHLY.

(voir BULLETIN, t. V, p. 3).

Décembre 1860, vol. III, p. 65.

Les cinq questions suivantes sont proposées aux Élèves. Les solutions seront reçues jusqu'au 1[er] février 1861 et les prix seront décernés et annoncés au mois de mars 1861.

1. Sur la diagonale AC du carré ABCD, on prend $AE = \frac{1}{4}AC$; démontrer que le quadrilatère BADE est équivalent au carré de AE.

2. Deux roues dentées engrènent, en tournant l'une sur l'autre; la première roue a m dents, désignées par $a_1, a_2, \ldots, a_m$; la seconde roue a n dents, désignées par

$b_1, b_2, \ldots, b_n$; m et n sont premiers entre eux. Supposons que la dent a_1 touche la dent b_1; lorsque ce contact aura lieu une seconde fois, toutes les autres dents se seront touchées.

3. Éliminant φ entre les deux équations

$$x\cos(\varphi+\alpha)+y\sin(\varphi+\alpha)=a\sin 2\varphi,$$
$$y\cos(\varphi+\alpha)+x\sin(\varphi+\alpha)=2a\cos 2\varphi,$$

démontrer que l'on a

$$(x\sin\alpha-y\cos\alpha)^{\frac{2}{3}}+(y\sin\alpha+x\cos\alpha)^{\frac{2}{3}}=(2a)^{\frac{2}{3}}.$$

4. x, y, z étant les trois côtés d'un triangle, si l'on a la relation

$$x^3+y^3+z^3=3m^3,$$

m étant constant, l'aire maximum est $\frac{1}{4}m^2$.

5. Soit donné un système d'ellipses par l'équation $ax^2+by^2=1$ où a et b sont des variables liées par la relation $a-b=c$; c est une constante donnée. Démontrer que la trajectoire donnée par l'équation

$$x=Ce^{-\frac{cy^2}{2}}$$

coupe chaque ellipse en un point (x, y) sous un angle dont la tangente est $\frac{x}{y}$

Remarque. Nous n'avons pas reçu les numéros de novembre 1859 à novembre 1860 inclusivement (*).

(*) On n'insérera pas les solutions des questions 1 et 2.

NOTE SUR LES SECTIONS TORIQUES;

Par M. A. CORNU (*),
Elève à Sainte-Barbe (classe de M. Gerono).

On peut mener au tore une infinité de plans tangents qui coupent la surface : toutes ces sections, remarquables par la variété de leur forme, jouissent d'une propriété commune dont voici l'énoncé :

La section du tore par un plan tangent est la podaire d'une conique, le pôle étant sur l'axe non focal.

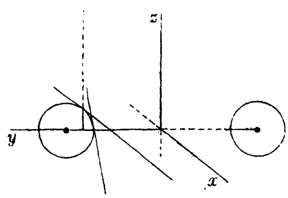
L'équation du tore ayant l'axe des z pour axe de révolution et le centre du cercle méridien sur l'axe des x es

$$(1) \qquad \left(\sqrt{x^2+y^2}-d\right)^2+z^2=r^2.$$

Il s'agit d'obtenir la forme la plus simple de l'équation de la section.

La surface étant de révolution, il suffit de considérer une série de plans tangents suivant un méridien. Prenons le méridien qui est dans le plan des zy.

Ce plan coupe le tore suivant deux cercles égaux dont l'axe des y est la ligne des centres. Il est facile de voir



que tout plan tangent au tore suivant l'un de ces cercles

(*) Admis le 8e à l'École Polytechnique, au concours de 1860.

est parallèle à l'axe des x et que sa trace sur le plan des zy est une droite tangente à la circonférence.

Cette tangente, et par conséquent ce plan tangent, a pour équation

$$(y - d) = mz - r\sqrt{m^2 + 1}$$

(si l'on désigne par m la tangente trigonométrique de l'angle que fait la droite avec l'axe des z).

En éliminant z entre cette équation et celle du tore, on obtient pour la projection de la section sur le plan zy

$$(2) \qquad \left[\sqrt{x^2 - y^2} - d\right]^2 + \left[\frac{y - d + r\sqrt{m^2 + 1}}{m}\right]^2 = r^2.$$

Dans cette projection les dimensions de la figure sont inégalement altérées; les x se projettent en vraie grandeur, les y sont multipliés par le cosinus de l'angle que forme le plan de la courbe avec le plan des xy; cet angle est évidemment le complément de l'angle dont la tangente est m : pour obtenir la section en vraie grandeur, il suffirait de changer y en $y \times \sin \operatorname{arc\,tang} m$, c'est-à-dire en $y \times \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$.

Mais, avant d'opérer cette substitution, il convient de transporter l'axe des z parallèlement à lui-même, de manière qu'il passe par le point de contact; l'équation de la section sera beaucoup plus simple.

Les coordonnées du point de contact sont

$$z_1 = r \sin \operatorname{arc\,tang} m,$$

$$y_1 = d - r \cos \operatorname{arc\,tang} m = d - \frac{r}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Changeons donc y en $\left(y + d - \frac{r}{\sqrt{m^2 + 1}}\right)$ dans l'équation (2) où z n'entre pas, on obtient

$$\left[\sqrt{x^2+\frac{\left(y\sqrt{m^2+1}+d\sqrt{m^2+1}-r\right)^2}{\sqrt{m^2+1}}}-d\right]^2$$

$$+\left[\frac{y\sqrt{m^2+1}+rm}{m.\sqrt{m^2+1}}\right]^2=r^2.$$

Remplaçant maintenant y par $\frac{my}{\sqrt{m^2+1}}$,

$$\left[\sqrt{x^2+\frac{\left(my+d\sqrt{m^2+1}-r\right)^2}{m^2+1}}-d\right]^2+\frac{[y+rm]^2}{m^2+1}=r^2.$$

Développant et élevant au carré on trouve, réductions faites :

$$(x^2+y^2)^2+\frac{4md}{\sqrt{m^2+1}}y.(x^2+y^2)+4y^2\left[d^2-\frac{dr}{\sqrt{m^2+1}}\right]$$

$$-\frac{4dr}{\sqrt{m^2+1}}x^2=0.$$

Comme

$$m=\operatorname{tang}\alpha$$

(α angle du plan tangent avec le plan des xz), on a

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}=\sin\alpha,$$

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}=\cos\alpha,$$

et par conséquent

$$(3)\left\{\begin{array}{l}(x^2+y^2)^2+4d\sin\alpha.y.(x^2+y^2)+4y^2(d^2-dr\cos\alpha)\\ \qquad -4drx^2\cos\alpha=0\ (*).\end{array}\right.$$

(*) Les termes du quatrième degré forment un carré parfait, c'est donc une podaire de conique. Tm.

Or, l'équation de la podaire d'une conique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y+y')^2}{b^2}=1,$$

l'origine des coordonnées étant le pôle, est

$$(x^2+y^2)^2+2y'.y.(x^2+y^2)+y^2(y'^2-b^2)-a^2x^2=0.$$

Identifions les deux équations :

$$y'=2d\sin\alpha,$$
$$y'^2-b^2=4d^2-4dr\cos\alpha,$$
$$a^2=4dr\cos\alpha.$$

Retranchons la seconde du carré de la première, il vient

$$b^2=4d\cos\alpha(r-d\cos\alpha).$$

On a donc les deux axes de la conique; la distance du pôle y' situé sur l'axe b au centre de la courbe est

$$2d\sin\alpha.$$

Ainsi toute section torique par un plan tangent est la podaire d'une conique, le pôle étant situé sur l'axe non focal.

Nous allons voir que la réciproque est aussi générale.

En effet, on a

$$4d^2=a^2-b^2+y'^2,$$

valeur toujours réelle si $a>b$. Divisant y' par a^2, on trouve

$$\frac{\tang\alpha}{r}=\frac{2y'}{d^2}.$$

Or tang α sera toujours réel, car on a

$$\sin\alpha = \frac{y'}{d} = \frac{2y'}{\sqrt{c^2 + y'^2}}.$$

Il est facile de voir que, pour obtenir toutes les sections, il suffit de faire varier α de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

D'où l'on conclut que a^2 sera toujours positif, mais que b^2 ne sera positif que quand on aura

$$\cos\alpha < \frac{r}{d},$$

c'est-à-dire que la section sera la podaire d'une ellipse tant que l'inclinaison du plan tangent sur le plan des xz sera plus grande que arc cos $\frac{r}{d}$.

Au delà, la section sera la podaire d'une hyperbole. L'inclinaison limite correspond au cas où le plan tangent passe par le centre, comme on peut le voir facilement.

Sans entrer dans la discussion des courbes, qui d'ailleurs est extrêmement simple, nous aurons une idée de leur forme en donnant à α différentes valeurs.

$\alpha = 0$. Le plan tangent est parallèle à l'axe. L'équation (3) devient

$$(x^2 + y^2)^2 + 4dy^2(d - r) - 4drx^2 = 0,$$

équation d'une courbe passant par l'origine.

C'est la podaire d'une hyperbole si $d > r$, car

$$b^2 = 4d(r - d):$$

le pôle est au centre. Le système des tangentes à l'origine est

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{r}{d - r}}.$$

La courbe devient une lemniscate de Bernoulli pour

$$d = 2r,$$

l'hyperbole est équilatère; car

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = 4dr = 8r^2, \\ b^2 = 4dr = -8r^2. \end{array} \right.$$

Si $d < r$, la section sera toujours une podaire d'ellipse.

Supposons que le plan tangent se meuve de manière que α augmente de 0° à arc $\cos \frac{r}{d}$.

La section sera une podaire d'hyperbole dont l'axe focal a^2 varie de $4dr$ à $4r^2$, dont l'axe imaginaire b^2 varie de $4d(r-d)$ à o.

Le pôle d'ailleurs s'éloigne du centre jusqu'à la distance

$$2d \sin \operatorname{arc} \cos \frac{r}{d} = 2\sqrt{d^2 - r^2}.$$

Quand le plan passe par le centre, l'hyperbole podaire de la section s'est réduite à ses deux sommets, la podaire devient un système de deux circonférences; en effet, l'équation est le produit des deux facteurs

$$x^2 + y^2 + 2y\sqrt{d^2 - r^2} - 2rx = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2y\sqrt{d^2 - r^2} + 2rx = 0.$$

Elles sont symétriquement placées par rapport à l'axe des x passant par l'origine; les coordonnées des centres sont

$$x_1 = \pm r,$$

$$y_1 = -\sqrt{d^2 - r^2};$$

le rayon est donc

$$\sqrt{(d^2 - r^2) + r^2} = d.$$

C'est la section découverte par M. Yvon Villarceau.

Si le plan tangent continue à se mouvoir jusqu'à ce que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, les sections sont des podaires d'ellipses dont l'axe focal a^2 varie de $4r^2$ à o; dont l'axe b^2 varie de o à r^2, puis revient à o.

La distance du pôle au centre de l'ellipse augmente et converge vers $2d$.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'ellipse se réduit à un point, la section devient un système de deux cercles qui coïncident : en effet, l'équation est un carré parfait :

$$(x^2 + y^2 + 2dy)^2 = 0,$$

cercle tangent à l'axe des x à l'origine et dont le rayon est d.

Jamais la section n'est une podaire de cercle dont le pôle est en dehors du centre, c'est-à-dire qu'on n'obtient jamais de *conchoïde de cercle* ni d'*épicycloïde;* car a^2 ne peut pas devenir égal à b^2, excepté pour $a = b = 0$.

Il y a cependant une section curieuse quand le plan est tangent à l'extrémité de l'ombilic du tore lorsque $d < r$; la courbe de section présente alors un point de rebroussement de première espèce. C'est une podaire d'ellipse dont le pôle est au sommet du petit axe. C'est la podaire elliptique correspondante à la podaire circulaire nommée *conchoïde de cercle* ou *limaçon de Pascal.*

Remarque. Toutes ces courbes ont pour diamètre curviligne, divisant en parties égales les cordes passant par l'origine, un cercle dont le rayon est $d \sin \alpha$: en effet, transformons les coordonnées rectilignes en coordonnées polaires, et divisons par ρ^2,

$$\rho^2 + 4d\rho\sin\alpha\sin\omega + 4[d^2 - dr\cos\alpha]\sin^2\omega - 4dr\cos\alpha\cos^2\omega = 0,$$

$$\rho = -2d\sin\alpha\sin\omega \pm \sqrt{\qquad\qquad}.$$

C. Q. F. D.

SOMMATION DE SÉRIES INFINIES;

D'APRÈS M. SCHLOMILCH.

(Zeitschrift, 5e année, page 133, mars 1860.)

1. Soit

$$f(x) = \frac{x}{1^{1+x}} + \frac{x}{2^{1+x}} + \frac{x}{3^{1+x}} + \ldots.$$

$f(x)$ est une fonction inconnue, mais qui a une valeur connue pour $x = 0$, valeur qui n'est pas nulle, comme semble l'indiquer le développement que la décomposition suivante met en évidence

$$f(x) = x\left(\frac{1}{1^{1+x}} + \frac{1}{2^{1+x}} + \frac{1}{3^{1+x}} + \ldots\right).$$

Posant

$$x = 0,$$

on obtient

$$f(0) = 0.\infty,$$

expression indéterminée; on la détermine ainsi.

On a

$$\frac{x}{(2p)^{1+x}} - \frac{2x}{2^x.p^{1+x}} = \frac{-x}{(2p)^{1+x}},$$

donc

$$f\left(1-\frac{2}{2^{1+x}}\right)$$

$$=f(x)\left(1-\frac{1}{2^x}\right)=\frac{x}{1^{1+x}}-\frac{x}{2^{1+x}}+\frac{x}{3^{1-x}}-\frac{x}{4^{1-x}}+\ldots,$$

d'où

$$f(x)=\frac{2^x}{\frac{2^x-1}{x}}\left(\frac{1}{1^{1+x}}-\frac{1}{2^{1+x}}+\frac{1}{3^{1+x}}-\frac{1}{4^{1+x}}+\ldots\right).$$

Faisons

$$x=0,$$

on trouve

$$f(0)=\frac{1}{\log 2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)=1.$$

Ainsi, dans le cas actuel,

$$0.\infty=1.$$

2.

$$\varphi(x)=\frac{\sin x}{1^x}+\frac{\sin\frac{1}{2}x}{2^x}+\frac{\sin\frac{1}{3}x}{3^x};$$

il s'agit de trouver la valeur de $\varphi(0)$.

Si x désigne un arc du premier quadrant, on a l'inégalité

$$x>\sin x>x-\frac{1}{6}x^3.$$

Remplaçant les sinus par les arcs, on a

$$\varphi(x)<\frac{x}{1^{1+x}}+\frac{x}{2^{1+x}}+\frac{x}{3^{1+x}}+\ldots,$$

$$\varphi x>\frac{x}{1+x}+\frac{x}{2^{1+x}}+\frac{x}{3^{1+x}}+\ldots-\frac{1}{6}x^3\left(\frac{1}{1^{x+3}}+\frac{1}{2^{x+3}}+\ldots\right).$$

Posant

$$x = 0,$$

ces deux séries s'approchent de l'unité.

Donc

$$\varphi(0) = 1.$$

3.

$$\varphi(x) = \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x}{(1+2x)^2} + \frac{x}{(1+3x)^2} + \ldots,$$

série convergente pour toute valeur positive de x;

$$\varphi x = x\left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+2x)^2} + \ldots\right].$$

Faisant

$$x = 0,$$

on a

$$\varphi(0) = 0.\infty \text{ valeur indéterminée,}$$

$$\varphi(x) - \varphi(2x) = \frac{x}{(1-x^2)} - \frac{x}{(1+2x]^2} + \frac{x}{(1+3x)^2}$$

$$- \frac{x}{(1+4x)^2} + \ldots$$

$$= \frac{2x^2 + 3x^3}{(1+x)^2(1+2x)^2} + \frac{2x^2 + 5x^3}{(1+3x)^2(1+4x)^3} + \ldots;$$

donc

$$\varphi x > \varphi(2x),$$

$$\varphi(1) < \varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi\left(\frac{1}{4}\right) < \varphi\left(\frac{1}{8}\right) < \ldots < \varphi(0),$$

$$\varphi(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = 0{,}644934,$$

donc

$$\varphi(0) > 0{,}644934.$$

Ainsi x décroissant, $\varphi(x)$ augmente.

QUESTIONS.

566. Soit $D^n \operatorname{tang}\varphi$ la dérivée d'ordre n de $\operatorname{tang}\varphi$, on a l'équation symbolique

$$D^n \operatorname{tang}\varphi = (D^1 + D^0)^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$D^{n-1} D^0 + (n-1) D^{n-2} D^1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} D^{n-3} D^2$$

ou

$$D^0 = \operatorname{tang}\varphi.$$

Lorsque $n = 1$, le dernier terme doit être pris $= 1$; alors

$$D^1 \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}^2\varphi + 1.$$

567. Quelle est la probabilité que l'angle aigu formé par deux grands cercles tracés au hasard sur une sphère sera compris entre m degrés et n degrés?

568. Construire, sans admettre aucun *postulatum* relatif aux parallèles, un trapèze tel, que les milieux des deux côtés et les milieux des diagonales soient sur une même droite parallèle aux bases, et que chaque diagonale fasse avec cette droite et la plus petite base des angles alternes-internes égaux entre eux.

(Lionnet, professeur.)

569. ABD est un triangle rectangle en B; sur AB comme diamètre une circonférence décrite rencontre AD en E; si AE = BD, alors AE est égal au quadrant de la circonféreuce à un millième du rayon près.

(A. S. Herschel.)

570. Deux ellipses *homofocales* sont l'une *inscrite* à

un triangle et l'autre *circonscrite* au même triangle; on a la relation suivante entre les demi grands axes et l'excentricité

$$\alpha^8 - 4\alpha^6 a^2 + 6\alpha^4 a^2 c^2 - 4\alpha^2 a^2 c^4 + a^4 c^4 = 0.$$

(MENTION.)

571.

$$y + z = 1,$$

on a

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{y^p + z^p}{p^2} = \frac{\pi^2}{6} - \log y \log z.$$

On prend pour p tous les nombres entiers positifs de 1 à ∞. Faisant

$$y = z = \frac{1}{2},$$

on a

$$\sum \frac{1}{2^{p-1} p^2} = \frac{\pi^2}{6} - \log(2)^2.$$

(EULER.)

572.

$$\log 2 = 4\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \frac{1}{13.14.15} + \ldots\right).$$

(EULER.)

573. Soit la fraction continue

$$\sqrt{n} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{2c + \cfrac{1}{b + \sqrt{n}}}}.$$

Faisons

$$a + \frac{1}{b} = \text{M}, \qquad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \text{N},$$

on a

$$MN = n.$$

574. Dans le pentaèdre ABCA′B′C′, ABC, A′B′C′ sont deux faces triangulaires *parallèles;* les faces ABA′B′, ACA′C′ sont deux faces quadrilatères *planes;* la cinquième face BCB′C′ est un paraboloïde décrit par la droite B′C se mouvant sur les directrices BB′, CC′ parallèlement aux plans ABC, A′B′C′. On a :

Volume du pentaèdre égale

$$\frac{1}{6} h \sin \mathrm{BAC} \left[\mathrm{AB} \left(\mathrm{AC} + \frac{1}{2} \mathrm{A'C'} \right) + \mathrm{A'B'} \left(\mathrm{A'C'} + \frac{1}{2} \mathrm{AC} \right) \right];$$

$h =$ distance des faces ABC, A′B′C′. (MASCHERONI.)

575. Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$lx + my + nz = 0,$$

les équations d'une ellipse dans l'espace; les axes principaux de cette ellipse sont les racines de l'équation

$$\frac{l^2 a^2}{z^2 - a^2} + \frac{m^2 b^2}{z^2 - b^2} + \frac{n^2 c^2}{z^2 - c^2} = 0.$$

(SEDLEY TAYLOR.)

PROPRIÉTÉS SEGMENTAIRES DE L'HYPERBOLE
rapportée à ses asymptotes ou à des axes parallèles aux asymptotes.

Rappelons quelques définitions et quelques principes déjà énoncés.

1. *Points-racines.* Ce sont des points situés sur une droite et dont les distances à un point fixe, aussi sur cette droite, représentent les racines d'une équation, ou peuvent les représenter. Les points-racines *multiples* correspondent à des racines égales.

2. *Segment,* intervalle entre deux points-racines.

3. *Points* analytiques *conjugués,* points-racines imaginaires correspondant à des racines imaginaires conjuguées; le segment compris entre deux points *analytiques* est réel.

4. *Produit segmentaire,* un produit de segments où chaque racine ne se présente qu'*une fois.*

Chaque segment renfermant deux racines, il s'ensuit que dans un produit segmentaire il y a deux fois autant de racines que de segments.

5. *Rapport segmentaire :* c'est le rapport entre deux produits segmentaires renfermant chacun les mêmes racines différemment combinées.

Le nombre des segments dans chaque produit donne le *quantième* du rapport; ainsi il y a des rapports doubles, triples, etc.

Lorsqu'un point-racine est à l'infini, il y a dans les deux termes du rapport un segment infini, qu'on peut supprimer; le quantième s'abaisse d'une unité; le rapport double devient simple, etc.

6. *Rapport fasciculaire :* si d'un point *fixe* on mène des droites à tous les points-racines qui entrent dans un rapport segmentaire, on obtient autant de triangles qu'il y a de segments; triangles de même hauteur; remplaçant donc les segments pris pour bases par les aires de ces triangles et les aires par le produit des deux autres côtés et par le sinus de l'angle qu'ils comprennent, le rapport segmentaire sera remplacé par un rapport entre des sinus

égal au rapport segmentaire. Le rapport entre les sinus est un rapport *fasciculaire*.

7. *Corollaire*. Les rapports segmentaires sont *projectifs*. Soient a_1, a_2, a_3, . . . , un système de points-racines, qu'on les projette sur un plan en b_1, b_2, b_3, . . . ; un rapport segmentaire formé avec les a est égal au rapport segmentaire analogue formé avec les b.

Les rapports fasciculaires sont aussi *projectifs*.

Ces deux principes sont d'une extrême fécondité et permettent de transporter des propriétés segmentaires d'une figure dans la figure projetée, ou, comme s'exprime Newton dans son *Ombre*, par exemple, du cercle dans les trois autres coniques, etc.

8. *Système réciproque des points-racines* : lorsque les racines peuvent se partager en couples tels, que dans chaque couple le produit de deux racines soit constant, le système des points-racines est dit *réciproque*.

Desargues, qui le premier a considéré ce système, l'a surnommé en *involution*, parce qu'en effet une moitié renferme l'autre moitié.

9. Soit

$$x_2 - x_1 = d;$$

alors

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = - \frac{d}{x_1 x_2},$$

de là on conclut : si dans un produit segmentaire on remplace chaque racine par sa réciproque, ce second produit est égal au premier divisé par le produit des racines; les deux produits sont de mêmes signes si le quantième est pair, et de signes opposés si le quantième est impair.

10. *Corollaire*. Si dans un rapport segmentaire on

remplace chaque racine par sa réciproque, ce second rapport est égal au premier.

Les applications au système de points-racines en involution sont intuitives.

11. Soient une hyperbole de centre O et rapportée à ses asymptotes, OP l'abscisse et PM l'ordonnée d'un point M de l'hyperbole; portons PM sur l'axe des abscisses de O en P_1, le produit $OP_1 . OP$ est constant; conséquemment les couples de points P, P_1 forment un système en involution; au centre O correspond un point situé à l'infini soit à droite, soit à gauche; les deux nappes donnent le même système en involution; car $xy = -x - y$ et le centre appartient à la fois aux deux systèmes et les sépare; aux sommets les abscisses sont égales aux ordonnées; alors le point P coïncide avec P_1; ce sont les deux points *doubles* situés à égale distance du centre, la distance d'un point double au centre se nomme la *moyenne* (géométrique) de l'involution.

12. Soient a, x, y, b quatre points-racines; a et b sont fixes et x et y sont variables; supposons que le rapport segmentaire *double* soit égal à la constante c; on aura

$$(y - x)(b - a) = c(x - a)(b - y);$$

posons

$$\frac{a - b}{c} = p;$$

on aura

$$xy - y(a + p) + x(p - b) + ab = 0,$$

qui représente une hyperbole rapportée à des axes parallèles aux asymptotes et *vice versâ*, une telle hyperbole représente un couple de points variables formant avec deux points fixes un rapport segmentaire double, constant, l'abscisse du centre est $a + p$ et l'ordonnée $b - p$.

Si l'on rapporte cette hyperbole à ses asymptotes, on obtient

$$xy = (b - p)(a + p),$$

les points sont distribués sur le second axe des x comme sur le premier, mais on voit qu'ils sont en involution relativement au centre. Donc, lorsqu'un couple de points *variables* forme un rapport segmentaire *double* toujours le même, avec deux points fixes, ces points forment un système en *involution*, et réciproquement tout système en involution peut être produit par un tel système de quatre points.

13. Un système de points en involution est *projectif*, car il peut être engendré par des rapports segmentaires constants qui soient projectifs (§ 7).

Les points doubles restent tels en projection, mais non le centre d'involution; car le centre de la perspective d'une conique n'est pas la perspective du centre; mais ayant les deux points doubles, le milieu de leur intervalle donne le centre d'involution. D'après ce principe on transporte les propriétés involutives d'une figure dans sa perspective.

Dans un système en involution tous les cercles décrits sur l'intervalle des deux points conjugués, comme diamètre, ont même axe radical, et il passe par le centre d'involution.

14. Soit

$$Ay^2 + Bay + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

l'équation d'une conique; le coefficient B variant seul, toutes les coniques passent par les mêmes quatre points fixes situés sur les axes. Une parallèle à l'axe des x coupe ces coniques en un système de couples en involution; car y étant constant, le produit des abscisses dans chaque couple est $\frac{Ay^2 + Dy + F}{C}$; par conséquent, le produit est constant. Lorsque la transversale rencontre les deux axes, passant par les points fixes, on peut mettre la figure en perspective de telle sorte que la transversale devienne parallèle à l'un des axes; donc le théorème subsiste pour une transversale quelconque (§ 13).

Ce théorème est de Desargues; il a démontré le premier que les six points d'intersection des côtés et des diagonales d'un quadrilatère, ou bien des côtés d'un quadrilatère et d'une conique circonscrite, par une transversale, sont en involution. Sturm a généralisé le théorème.

15. Un rapport segmentaire de quantième quelconque étant *donné,* si deux racines seulement sont inconnues, elles représentent les coordonnées d'une hyperbole, rapportée à ses asymptotes.

16. Le rapport segmentaire binaire égal à 1 se rencontre dans les accords musicaux : aussi les Grecs ont-ils donné le nom d'harmonique à ce rapport. D'après des considérations algébriques de position, M. Chasles donne ce nom au rapport égal à -1, et nomme *anharmonique* tout rapport qui n'est pas égal à -1. Cette dernière expression est adoptée en France, en Angleterre, en Italie, mais pas en Allemagne.

DÉMONSTRATION SIMPLE

d'un théorème de Newton sur les coniques inscrites à un quadrilatère;

Par M. VANNSON.

Le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère est une ligne droite joignant les milieux des trois diagonales. La démonstration de M. Briot est fondée sur les polaires réciproques que beaucoup d'élèves ne possèdent pas. Celle-ci est directe et me paraît courte.

Je prends pour axes deux diagonales AOA', BOB' du quadrilatère. Soient a, a' les abscisses des sommets A, A'; b, b' les ordonnées de B et B'. Soient COC', DOD' les points de contact d'une des courbes, les quatre droites partant de O forment un faisceau harmonique (*Nouvelles Annales*, 1858, p. 221). Si donc je représente OC par l'équation

$$y = mx,$$

la droite DD' aura pour équation

$$y = -mx.$$

Cela posé, les coordonnées de C seront

$$x = \frac{ab}{b+ma}, \quad y = \frac{mab}{b+ma};$$

celles du point D sont

$$x_1 = \frac{ab'}{b'-ma}, \quad y_1 = \frac{-mab'}{b'-ma};$$

je joins par une droite le point A au milieu de CD : cette droite qui contient le centre aura, réduction faite, pour équation

$$\frac{y}{x-a} = \frac{m(b+b')}{b'-b-2am};$$

celle qui joint A' au milieu de C'D' s'en déduit en changeant a en a', b en b' et réciproquement, ce qui donne

$$\frac{y}{x-a'} = \frac{m(b+b')}{b-b'-2a'm};$$

éliminant m, il vient

$$\frac{y}{\frac{1}{2}(b+b')}+\frac{x}{\frac{1}{2}(a+a')}=1,$$

c'est-à-dire une ligne droite.

REMARQUE SUR LA QUESTION 412

(voir t. XVI, p. 420);

PAR M. TARDY,
Directeur des études à l'Ecole de la Marine à Gênes.

Les formules dont on demande la démonstration dans la question proposée par M. Michael Roberts ne sont autre chose que les coefficients du troisième et quatrième terme de l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation

$$(a, b, c, \ldots)(x, 1)^n = 0.$$

Ces coefficients ont été calculés d'une manière nouvelle par M. Brioschi dans un important Mémoire dans le t. VI des *Annali* de M. Tortolini.

Je saisis cette occasion pour faire une déclaration.

Dans la solution de la question 141 publiée dans le t. XIII des *Nouvelles Annales*, j'avais fait, en passant, l'observation qu'un énoncé de Fourier n'était pas exact. Depuis j'ai connu que cette méprise échappée au célèbre géomètre avait été signalée par M. Mainardi dans un Mémoire sur la théorie des équations, imprimé à Pavie en 1833 (*Ricerche sulla dottrina delle equazioni*) et par M. Stern dans le t. IX du *Journal de Crelle*. Je dois cette dernière indication à mon illustre ami M. Betti.

M. Mainardi donne aussi dans son Mémoire un procédé pour calculer les coefficients de l'équation aux carrés des différences.

SOLUTION DE LA QUESTION 483

[voir t. XIX, p. 11 (*)];

PAR M. LÉON AUTIÉ,
Elève du lycée Louis-le-Grand.

Nous conservons la même figure.

Notations.

$$AO = r,\quad OD = x,\quad DC = y,\quad AB = a;$$

$$\text{Cône ABD} = \frac{1}{3}\pi a^2 (r + x);$$

$$\text{Cône tronqué ABCD} = \frac{1}{3}\pi (r + x)(a^2 + ay + y^2);$$

$$\text{Segment sphérique ACD} = \frac{1}{6}\pi (r + x)[3y^2 + (r + x)^2];$$

$$\text{Vol. mixtiligne ABC} = \text{vol. ABCD} - \text{vol. ACD}$$

$$= \frac{1}{6}\pi (r + x)[2a^2 + 2ay - y^2 - (r + x)^2]$$

$$= \frac{1}{3}\pi a^2 (r + x) + \frac{1}{6}\pi (r + x)[2ay - y^2 - (r + x)^2].$$

La tangente de l'angle que la tangente en C fait avec l'axe des x, donne cette égalité

$$\frac{x}{y} = \frac{ax}{r(r + x)},\qquad ay = r(r + x).$$

Substituant, on a

$$\text{Vol. mixtiligne ABC} = \text{vol. ABD}.$$

(*) La solution donnée en cet endroit est fautive.

La solution de la question 484 est une conséquence immédiate de celle-ci.

SOLUTION DE LA QUESTION 543

(voir t. XIX, p. 361);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Répétiteur à Lyon (institution Poncin).

1. x, y désignant des inconnues; a, b, c, d des quantités connues liées entre elles par les relations

$$(\mathrm{I}) \qquad a+b=c^2, \quad a-b=d^3,$$

le système

$$(\mathrm{A}) \qquad ax-by=x^2-y^2, \quad bx+ay=4xy$$

a les quatre solutions suivantes

$$x=\frac{1}{8}\left[(c+d)(2c^2-3dc+2d^2)-cd(c-d)\sqrt{3}\,.\,i\right],$$

$$x=\frac{1}{8}\left[(c+d)(2c^2-3dc+2d^2)+cd(c-d)\sqrt{3}\,.\,i\right],$$

$$x=\frac{1}{4}(c+d)(c^2+d^2),$$

$$x=0;$$

ou $i=\sqrt{-1}$.

$$y=\frac{1}{8}\left[(c-d)(2c^2+3dc+2d^2)+cd(c+d)\sqrt{3}\,.\,i\right],$$

$$y=\frac{1}{8}\left[(c-d)(2c^2+3dc+2d^2)-cd(c+d)\sqrt{3}\,.\,i\right],$$

$$y=\frac{1}{4}(c-d)(c^2+d^2),$$

$$y=0.$$

2. En supposant d'abord qu'aucune des quantités a, b ne soit nulle, la valeur qui annule $4y - b$ ne peut faire partie d'une solution du système A ; ce dernier est donc équivalent au suivant :

$$x = \frac{ay}{4y-b},$$

$$\frac{y}{4y-b}[a^2 - b(4y-b)]$$
$$= \frac{y^2}{(4y-b)^2}[a + (4y-b)][a - (4y-b)]$$

ou bien

$$x = \frac{ay}{4y-b},$$

$$y(4y-b)[a^2 - b(4y-b)]$$
$$= y^2[a + (4y-b)][a - (4y-b)],$$

ce qui donne la solution $y = 0$, $x = 0$. Il reste à résoudre le système

$$(4y-b)[a^2 - b(4y-b)] = y[a + (4y-b)][a - (4y-b)],$$

$$x = \frac{ay}{4y-b},$$

qu'on remplace par le suivant

$$y = \frac{z+b}{4}, \quad x = \frac{a}{4}\frac{z+b}{z}, \quad z^3 - 3bz^2 + 3a^2 z - a^2 b = 0,$$

et enfin, en posant $z = u + b$, par

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned} & u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(a^2 - b^2) = 0, \\ & y = \frac{1}{4}(u + 2b), \\ & x = \frac{a}{4}\frac{u+2b}{u+b} \end{aligned} \right.$$

3. On a identiquement

$$u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(a^2 - b^2)$$
$$= (u + b)(u^2 - bu + 3a^2 - 2b^2) - a^2 b;$$

donc, pour les valeurs de u racines de l'équation du troisième degré du système (B),

$$\frac{1}{u+b} = \frac{u^2 - bu + 3a^2 - 2b^2}{a^2 b},$$

$$\frac{u+2b}{u+b} = \frac{(u+2b)(u^2 - bu + 3a^2 - 2b^2)}{a^2 b}$$

$$= \frac{[u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(a^2 - b^2)] + [bu^2 - b^2 u + 4ba^2 - 2b^3]}{a^2 b}$$

$$= \frac{u^2 - bu + 4a^2 - 2b^2}{a^2}.$$

Le système (B) est donc remplacé par le suivant

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{aligned} & u^3 + 3(a^2 - b^2)u + 2b(a^2 - b^2) = 0, \\ & y = \frac{1}{4}(u + 2b), \\ & x = \frac{1}{4}\left(\frac{u^2 - bu + 4a^2 - 2b^2}{a}\right). \end{aligned} \right.$$

4. On sait que les racines de

$$v^3 + 3pv + 2q = 0$$

se déduisent de la formule

$$\alpha\sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \alpha^2\sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}},$$

en remplaçant successivement α par chacune des racines cubiques de l'unité positive. L'application de cette formule à la dernière équation en u donne

$$u = \alpha \sqrt[3]{-b(a^2-b^2) + \sqrt{+b^2(a^2-b^2)^3 + (a^2-b^2)^3}}$$

$$+\alpha^2 \sqrt[3]{-b(a^2-b^2) - \sqrt{+b^2(a^2-b^2)^2 + (a^2-b^2)^3}}$$

$$= \alpha \sqrt[3]{(a-b)(a^2-b^2)} + \alpha^2 \sqrt[3]{(-a-b)(a^2-b^2)}$$

$$= \sqrt[3]{(a^2-b^2)} \left[\alpha \sqrt[3]{(a-b)} - \alpha^2 \sqrt[3]{(a+b)}\right];$$

ou enfin, en tenant compte des relations (I),

$$u = \alpha d^2 c - \alpha^2 dc^2.$$

5. Substituant dans l'équation (C) cette valeur de u, on a

$$y = \frac{1}{4}(c^3 - \alpha^2 dc^2) + \alpha d^2 c - d^3),$$

$$x = \frac{1}{4}\,\frac{c^6 + \alpha^2 dc^5 + \alpha d^2 c^4 + 2d^3 c^3 + \alpha^2 d^4 c^2 + \alpha d^5 c + a^6}{c^3 + d^3},$$

ou

$$y = \frac{1}{4}(c^3 - \alpha^2 dc^2 + \alpha d^2 c - d^3),$$

$$x = \frac{1}{4}(c^3 + \alpha^2 dc^2 + \alpha d^2 c + d^3).$$

Posant tour à tour

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}.i}{2},\quad \frac{-1-\sqrt{3}.i}{2},\quad \alpha = 1,$$

on a les trois premières solutions du n° 1.

Les formules de ce numéro subsistent encore quand une des quantités a, b est nulle ou que toutes deux le sont : ces formules sont donc générales.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1860

(voir t. XIX, p. 328 et 436);

PAR M. DESGRANGES.

Question généralisée. Un cône de révolution est coupé par un plan. Si par tous les points de l'intersection on mène des droites qui rencontrent l'*axe* du cône sous un angle *constant*, chacune de ces droites perce la surface du cône en un second point.

Quelle est la courbe formée par ces seconds points?

Solution analytique. Soient

$$(1) \qquad y^2 + x^2 = (az - r)^2$$

l'équation du cône;

$$(2) \qquad z = mx$$

l'équation du plan sécant, et k la cotangente de l'angle constant. L'équation de la surface formée par toutes les droites est

$$(3) \quad (x^2 + y^2)(z - kamx + kr)^2 = [(az - r)mx - k(x^2 + y^2)]^2.$$

Les deux intersections de cette surface avec le cône (1) ont pour équations :

$$1^\circ \qquad y^2 + x^2 = (az - r)^2 \quad \text{et} \quad z = mx,$$

c'est l'intersection donnée;

$$2^\circ \quad y^2 + x^2 = (az - r)^2 \quad \text{et} \quad z = -mx - \frac{2kr}{1 - ka},$$

c'est l'intersection cherchée.

La courbe cherchée est donc semblable à l'intersection donnée. Les plans des deux courbes sont perpendiculaires à une section principale du cône, ils sont également inclinés sur l'axe du cône, mais en sens contraire.

C. Q. F. T.

Tout cône de révolution qui a même sommet que le cône primitif coupe la surface (3) suivant deux coniques semblables *entre elles* et de même espèce que l'intersection donnée.

Si dans l'équation (3) on fait $k=a$, on aura l'équation de la surface formée par les normales.

Si a devient zéro, le cône donné devient un cylindre.

On a alors une surface que tous les cylindres de révolution concentrique à l'axe des z coupent suivant deux ellipses égales, etc.

Cette surface est identique à celle qui a pour directrices : 1° la base d'un cylindre de révolution; 2° une des arêtes de ce cylindre et dont la génératrice fait un angle constant avec cette arête.

Elle peut encore être engendrée par une droite qui tourne autour d'une autre qu'elle rencontre sous un angle constant, le point d'intersection marchant sur la droite fixe de quantités proportionnelles au sinus de l'angle que décrit le plan des deux droites.

Quand on a en même temps $a=0$, $k=0$, tous les plans des ellipses suivant lesquelles la surface est coupée par les cylindres de révolution concentriques aux z se coupent suivant une même ligne, toutes les ellipses ont leur petit axe sur cette ligne et ont leurs centres en un même point de cette ligne.

Nota. Pour le cas où le plan sécant est vertical, l'équation (3) ne donne qu'un cas particulier.

Mais si l'on prend les équations

$$y^2 + x^2 = (az - r)^2,$$
$$x = \mathrm{P},$$

l'équation de la surface est

$$x^2(az - r)^2 = (x^2 + y^2)[kax - \mathrm{P}(ka - 1)]^2.$$

On voit bien que tout cône de révolution ayant même axe et même sommet que le cône donné coupe la surface suivant deux hyperboles dont les plans sont verticaux et perpendiculaires à une section principale du cône donné.

Remarques générales.

Si l'on fait tourner le plan des xz autour de l'axe des z, toute droite du plan qui rencontre l'axe des z décrira un cône de révolution. Mais si l'intersection de la droite avec l'axe, au lieu de rester fixe, se meut sur l'axe de telle sorte que sa distance z' à l'origine varie en même temps que l'angle B du plan mobile avec le plan des xz, en un mot que l'on ait

$$z' = \varphi(\mathrm{B})$$

(φ représentant une fonction quelconque) pour

$$z' = \operatorname{tang} \mathrm{B} \quad \text{et} \quad k = 0,$$

on a, comme on sait, le paraboloïde gauche isocèle.

Il est clair que pour chaque espèce de fonction φ on aura une espèce particulière de surfaces dont l'équation est de la forme

$$z + \varphi\left(\frac{x}{y}\right) = k\sqrt{x^2 + y^2},$$

k étant, comme on l'a supposé, la cotangente de l'angle que la génératrice fait avec les z.

La surface représentée par l'équation (3) est une de ces espèces de surfaces. On a dans ce cas

$$z' = \frac{rm(1 + ka)\cos B}{1 + am\cos B}.$$

On peut supposer que k, au lieu d'être constant, varie avec B. On a alors un genre de surfaces représentées par l'équation générale

$$z + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \psi\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Cette dernière équation représente toutes les surfaces gauches qui peuvent être coupées par un plan suivant une droite qui rencontre toutes les génératrices (rectilignes, bien entendu).

Ainsi, pour prendre un cas simple, l'équation

$$z - N\frac{y}{x} = M\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}} \times \sqrt{x^2 + y^2}$$

est l'équation d'un hyperboloïde à une nappe;

$$z - N\frac{y}{z} = 0$$

l'équation d'un paraboloïde gauche isocèle, etc.

RELATIONS ENTRE LES DIAMÈTRES CONJUGUÉS D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

Par M. PAINVIN,
Professeur au lycée de Douai.

1. *Lemme*. Pour que la fonction

$$\begin{gathered} A_{11}X_1^2 + A_{22}X_2^2 + A_{33}X_3^2 \\ + 2A_{12}X_1X_2 + 2A_{13}X_1X_3 + 2A_{23}X_2X_3 \end{gathered}$$

se réduise à la somme de *deux carrés*, il faut et il suffit que

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

2. Prenons une surface du second degré rapportée à son centre

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = h; \end{aligned} \right.$$

désignons par S le premier membre de cette équation, et par

$$\alpha_1 = \cos(x_2 o x_3), \quad \alpha_2 = \cos(x_3 o x_1), \quad \alpha_3 = \cos(x_1 o x_2)$$

les angles que font entre eux les axes ox_1, ox_2, ox_3.

Soit maintenant

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 \\ & + 2b_{12}y_1y_2 + 2b_{13}y_1y_3 + 2b_{23}y_2y_3 = h, \end{aligned} \right.$$

la forme que prend l'équation (1) lorsqu'on rapporte la surface à de nouveaux axes oy_1, oy_2, oy_3; désignons par T le premier membre de cette équation, et par

$$\beta_1 = \cos(y_2\, oy_3),\quad \beta_2 = \cos(y_3\, oy_1),\quad \beta_3 = \cos(y_1\, oy_2)$$

les angles que font entre eux les nouveaux axes.

Considérons en outre les deux fonctions

$$M = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\alpha_3\, x_1\, x_2 + 2\alpha_2\, x_1\, x_3 + 2\alpha_1\, x_2\, x_3,$$

$$N = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2\beta_3\, y_1\, y_2 + 2\beta_2\, y_1\, y_3 + 2\beta_1\, y_2\, y_3,$$

qui représentent: la première, la distance d'un point à l'origine dans le système des axes primitifs; la seconde, la distance du même point à la même origine dans le nouveau système d'axes.

Quand on passe du système primitif au système nouveau, la fonction S se change en T et la fonction M en N; par suite, la fonction $S + \lambda M$ se change en $T + \lambda N$, quelle que soit l'indéterminée λ. Donc, si, pour une certaine valeur de λ, la fonction $S + \lambda M$ devient la somme de deux carrés, pour cette même valeur de λ, la fonction $T + \lambda N$ deviendra aussi la somme de deux carrés. Par conséquent, si l'on exprime que les deux fonctions $S + \lambda M$, $T + \lambda N$ se réduisent à la somme de deux carrés, les deux équations en λ ainsi obtenues, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} + \lambda\alpha_3 & a_{13} + \lambda\alpha_2 \\ a_{21} + \lambda\alpha_3 & a_{22} + \lambda & a_{23} + \lambda\alpha_1 \\ a_{31} + \lambda\alpha_2 & a_{32} + \lambda\alpha_1 & a_{33} + \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} + \lambda & b_{12} + \lambda\beta_3 & b_{13} + \lambda\beta_2 \\ b_{21} + \lambda\beta_3 & b_{22} + \lambda & b_{23} + \lambda\beta_1 \\ b_{31} + \lambda\beta_2 & b_{32} + \lambda\beta_1 & b_{33} + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

devront avoir les mêmes racines en λ, être identiques.

3. Posons

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{vmatrix} \\
\Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
B &= \frac{d\Delta}{da_{11}} + \frac{d\Delta}{da_{22}} + \frac{d\Delta}{da_{33}} + 2\alpha_1 \frac{d\Delta}{da_{23}} + 2\alpha_2 \frac{d\Delta}{da_{31}} + 2\alpha_3 \frac{d\Delta}{da_{12}}, \\
C &= a_{11}(1-\alpha_1^2) + a_{22}(1-\alpha_2^2) + a_{33}(1-\alpha_3^2) \\
&\quad + 2a_{12}(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3) + 2a_{13}(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2) + 2a_{23}(\alpha_2 a_3 - \alpha_1);
\end{aligned}\right.$$

C'est le carré du volume du parallélipipède construit suivant les trois axes ox_1, ox_2, ox_3 avec des longueurs égales à l'unité.

les quantités A, B, C, Δ sont des quantités connues et constantes qui ne dépendent que des coefficients de l'équation primitive et des angles des anciens axes.

En exprimant que les deux équations ci-dessus ont les mêmes racines, on arrive aux trois relations fondamentales suivantes entre les coefficients de l'équation primitive et ceux de l'équation transformée :

$$\left\{\begin{aligned}
&(\text{I}) && \Theta = \frac{\Delta}{A}\cdot V, \\
&(\text{II}) && \frac{d\Theta}{db_{11}} + \frac{d\Theta}{db_{22}} + \frac{d\Theta}{db_{33}} + 2\beta_1 \frac{d\Theta}{db_{23}} + 2\beta_2 \frac{d\Theta}{db_{41}} \\
& && \qquad + 2\beta_3 \frac{d\Theta}{db_{12}} = \frac{B}{A}\cdot V, \\
&(\text{III}) && b_{11}(1-\beta_1^2) + b_{22}(1-\beta_2^2) + b_{33}(1-\beta_3^2) \\
& && \qquad + 2b_{12}(\beta_1\beta_2 - \beta_3) + 2b_{13}(\beta_1\beta_3 - \beta_2) \\
& && \qquad + 2b_{23}(\beta_2\beta_3 - \beta_1) = \frac{C}{A}\cdot V.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces relations, je désigne par Θ et V les expressions suivantes :

$$\Theta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$V = \begin{vmatrix} 1 & \beta_3 & \beta_2 \\ \beta_3 & 1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_1 & 1 \end{vmatrix}$$

C'est le carré du volume du parallélipipède construit suivant les axes oy_1, oy_2, oy_3 avec des longueurs égales à l'unité.

4. Première application. Si les trois nouveaux axes sont trois diamètres conjugués, on devra avoir

$$b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0,$$

et l'équation (2) prendra la forme

$$b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + b_{33} y_3^2 = h.$$

Or, si l'on désigne par a_1, a_2, a_3 les longueurs des trois diamètres conjugués, on aura

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} b_{11} &= \frac{h}{a_1^2}, \\ b_{22} &= \frac{h}{a_2^2}, \\ b_{33} &= \frac{h}{a_3^2}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette hypothèse particulière les relations (I), (II), (III) deviennent

$$(\text{I } bis) \qquad b_{11} b_{22} b_{33} = \frac{\Delta}{A} \cdot V,$$

$$(\text{II } bis) \qquad b_{22} b_{33} + b_{33} b_{11} + b_{11} b_{22} = \frac{B}{A} \cdot V,$$

$$(\text{III } bis) \qquad b_{11}(1 - \beta_1^2) + b_{22}(1 - \beta_2^2) + b_{33}(1 - \beta_3^2) = \frac{C}{A} \cdot V.$$

Or, en introduisant les valeurs (3) et en remarquant que $V a_1^2 a_2^2 a_3^2$ est le carré du volume du parallélipipède construit suivant les trois axes oy_1, oy_2, oy_3, avec des longueurs respectivement égales aux longueurs des demi-diamètres, la relation (I *bis*) donne

$$V a_1^2 a_2^2 a_3^2 = \frac{A h^3}{\Delta} = \text{constante} = a^2 b^2 c^2,$$

a, b, c désignant les trois demi-axes de la surface.

La relation (II *bis*) donne

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{B}{A} \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2 V}{h^2} = \frac{B h}{\Delta} = a^2 + b^2 + c^2.$$

La relation (III *bis*) conduit à

$$a_2^2 a_3^2 (1 - \beta_1^2) + a_3^2 a_1^2 (1 - \beta_2^2) + a_1^2 a_2^2 (1 - \beta_3^2)$$
$$= \frac{C}{A h} V a_1^2 a_2^2 a_3^2 = \frac{C h^2}{\Delta} = a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2.$$

D'où l'on conclut ces trois théorèmes :

1° *Le volume du parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués quelconques est constant.*

2° *La somme des carrés de trois diamètres conjugués quelconques est constante.*

3° *La somme des carrés des surfaces des trois parallélogrammes construits avec trois diamètres conjugués quelconques est constante.*

5. Seconde application. Si les trois nouveaux axes sont rectangulaires, on a

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$$

et

$$b_{11} = \frac{h}{a_1^2}, \quad b_{22} = \frac{h}{a_2^2}, \quad b_{33} = \frac{h}{a_3^2}.$$

Une seule des relations ci-dessus, la relation (III), ne dépend que des quantités b_{11}, b_{22}, b_{33}; elle donne alors

$$b_{11}+b_{22}+b_{33}=\frac{C}{A}$$

ou

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}=\frac{C}{Ah},$$

c'est-à-dire *la somme des carrés des inverses de trois diamètres rectangulaires quelconques est constante*.

SOLUTION DE LA QUESTION 557

(voir t. XIX, p. 464);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Répétiteur à Lyon (institution Poncin).

Énoncé :

$$\frac{x}{x^2+1^2}+\frac{x}{x^2+2^2}+\frac{x}{x^2+3^2}+\ldots+\frac{1}{2}\pi \quad \text{pour} \quad \lim x=0.$$

1. Il nous semble que, dans l'hypothèse dont il s'agit, la limite de la série proposée est zéro (*).

Posons

$$\varphi(x,n)=\frac{x}{x^2+1^2}+\frac{x}{x^2+2^2}+\ldots+\frac{x}{x^2+n^2},$$

$$f(x,n)=\frac{1}{x^2+1^2}+\frac{1}{x^2+2^2}+\ldots+\frac{1}{x^2+n^2},$$

d'où

$$\varphi(x,n)=x\,f(x,n).$$

(*) J'ai copié cette équation, sans examen, dans je ne sais quel journal allemand. TM.

Pour des valeurs quelconques finies de x et de n, on a

$$\mathrm{f}(x,n) < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2};$$

cette dernière somme, quand le nombre de ses termes augmente, tend constamment vers une limite finie, savoir $\frac{1}{6}\pi^2$ (Euler, *Introductio in analysin*, vol. I, p. 131) :

$$\mathrm{f}(x,n) < \frac{6}{1}\pi^2, \quad \varphi(x,n) < \frac{1}{6}\pi^2 x, \quad \text{pour} \quad x > 0,$$

r représentant un nombre absolu aussi petit qu'on voudra, mais non nul, alors pour

$$0 < x < \frac{6}{\pi^2} r,$$

on aura

$$\varphi(x,n) < r,$$

quel que soit n.

2. On peut donc trouver un nombre absolu, non nul, tel, que, pour toute valeur positive de x inférieure à ce nombre, la somme d'un nombre quelconque de termes de la série proposée soit inférieure à un nombre absolu donné, quelque petit que soit ce dernier; la limite est donc zéro.

3. On peut arriver au même résultat sans avoir recours à la limite d'une autre série.

x étant positif et non nul, chaque terme de la série proposée est plus petit que le précédent; donc, n étant un entier fixe,

$$\frac{x}{x^2+1^2} + \frac{x}{x^2+2^2} + \frac{x}{x^2+3^2} + \ldots + \frac{x}{x^2+n^2} < \frac{nx}{x^2+1},$$

r étant un nombre absolu, non nul, inférieur à $\frac{1}{2}$ et aussi petit qu'on voudra, l'inégalité

$$\frac{nx}{x^2+1} < r$$

est remplacée par les suivantes :

$$rx^2 - nx + r > 0,$$

$$\left(rx - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n^2 - 4r^2}{4} > 0,$$

$$\left(rx - \frac{n - \sqrt{n^2 - 4r^2}}{2}\right)\left(rx - \frac{n - \sqrt{n^2 - 4r^2}}{2}\right) > 0,$$

$$x < \frac{n - \sqrt{n^2 - 4r^2}}{2r}, \quad x > \frac{n + \sqrt{n^2 - 4r^2}}{2r},$$

donc

$$0 < x < \frac{2r}{n + \sqrt{n^2 + 4r^2}} \quad \frac{x}{x^2+1^2} + \ldots + \frac{x}{x^2+n^2} < \frac{nx}{x^2+1} < r.$$

4. Quel que soit le nombre de termes consécutifs de la série proposée que l'on veut ajouter, il existe un nombre tel, que, pour toute valeur positive de x inférieure à ce nombre, la somme dont il s'agit soit plus petite qu'un nombre absolu donné, non nul, quelque petit que soit ce dernier ; la limite ne peut donc être que zéro.

Note. MM. Pirain et Kessler, élèves du lycée Saint-Louis, emploient cette considération.

Soit la courbe donnée par l'équation

$$y = \frac{a}{a^2 + x^2},$$

l'aire de cette courbe est

$$\int y\,dy = \text{arc tang}\,\frac{x}{a} + \text{constante}.$$

Si l'on suppose qu'à l'origine où $x = 0$ l'aire est nulle, alors la constante est aussi nulle; mais on ne peut plus supposer ensuite $a = 0$, arc tang $\frac{0}{0}$ est une expression indéterminée.

QUESTIONS.

576. Soient C le centre, F, F' les foyers et P un point quelconque d'une ellipse de Cassini. Qu'on décrive un cercle passant par F, F' et P, et supposons que la normale à la courbe au point P rencontre ce cercle dans un second point N; alors on aura cette relation

$$CP \times PN = \text{constante}. \qquad (\text{Strebor.})$$

577. Dans un polyèdre, la différence entre la double somme des angles dièdres et la somme des angles solides est égale à autant de fois quatre angles droits qu'il y a de faces moins deux.

578. Les quatre cercles inscrits dans un triangle *sphérique* sont touchés par un même cercle. (Hart.)

La tangente du rayon sphérique de ce dernier cercle est la moitié de la tangente du rayon sphérique du cercle circonscrit au triangle. (Salmon.)

579. Étant donnée une courbe quelconque sur la sphère, d'un point fixe C pris sur la sphère menons à la courbe le rayon vecteur sphérique CO; prenons sur ce rayon un point O' tel, qu'on ait

$$\frac{\sin \frac{CO'}{2}}{\sin \frac{CO}{2}} = \alpha,$$

quantité constante. Le lieu des points O′ forme une seconde courbe telle, qu'on aura : aire de la courbe CO′ est à l'aire de la courbe CO comme $\alpha^2 : 1$. (VANNSON.)

580. Résoudre les équations

$$u^6 - 3A^2u^4 + 3A^4(1-\gamma^2)u^2 - A^6(1 - 3\gamma^2 + 2\gamma^3) = 0,$$

$$u^6 - (2A^2 + C^2)u^4 + (2A^2C^2\sigma + A^4\sigma'')u^2 - A^2C^2\varpi = 0,$$

$$\sigma = 1 - \gamma^2, \quad \sigma'' = 1 - \gamma''^2,$$

$$\varpi = 1 + 2\gamma\gamma'\gamma'' - \gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2.$$

(LAMÉ.)

581. En calculant la valeur algébrique du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & . & \dfrac{n.n-1}{1.2}t & . & \dfrac{n.n-1.n-2}{1.2.3}t^2 \ldots & nt^{n-2}.t^{n-1} \\ \dfrac{n\;n-1}{1.2}t & . & \dfrac{n.n-1.n-2}{1.2.3}t^2 & . & \dfrac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}t^3 \ldots & t^{n-1}.n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t^{n-1} & . & n & . & \dfrac{n.n-1}{1.2}t \ldots\ldots & n-1\,t^{n-3}.nt^{n-2} \end{vmatrix}$$

les puissances impaires de t disparaissent, et, en posant $t^2 = u$, l'équation $\Delta = 0$ est l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation

$$x^n - 1 = 0.$$

(MICHAEL ROBERTS.)

582. Soit V un des foyers d'une hyperbole équilatère quelconque tangente à une ellipse donnée et concentrique avec elle. En supposant que le point de contact de ces deux courbes varie, le rectangle FV.F′V, F, F′ étant les foyers de l'ellipse, conservera une valeur constante.

(STREBOR.)

583. Étant données, dans un plan, deux courbes géométriques, l'une de *degré m* et l'autre de la *classe n*; si une tangente roule sur celle-ci et que par les points où elle rencontre la courbe C_m, on mène à cette courbe des tangentes et des normales :

1° Les tangentes se coupent deux à deux sur une courbe de degré $\frac{1}{2}mn(m-1)(2m-3)$;

2° Les normales se coupent deux à deux sur une courbe de degré $\frac{1}{2}mn(m-1)(2m-1)$.

(E. DE JONQUIÈRES.)

584. Une conique étant inscrite dans un triangle, soient respectivement α, β, γ les rayons de courbure de la conique aux points où elle touche les côtés a, b, c du triangle, on a

$$8S = \left(-\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} - \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} - \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right),$$

S désignant l'aire du triangle. (Capitaine FAURE.)

585. Trois coniques étant données dans un même plan, il y a vingt points d'où elles sont vues sous le même angle ou sous des angles supplémentaires.

(Capitaine FAURE.)

586. *Géométrie descriptive*. Étant données deux droites A et B dans l'espace, construire une troisième droite qui fasse avec A un angle donné α et avec B un angle β.

(DESGRANGES.)

587. Quelle est la surface engendrée par une droite qui glisse sur deux autres A et B de telle sorte que dans chacune de ses positions l'angle qu'elle fait avec A est égal à l'angle qu'elle fait avec B. (DESGRANGES.)

588. Soient T, T′ les points de contact des deux tangentes menées à une ellipse d'un point quelconque O, et soient F, F′ les foyers de la courbe. Désignons par d, d' les deux demi-diamètres parallèles à OT, OT′, et posons

$$\mathrm{OT} = t, \quad \mathrm{OT'} = t', \quad \mathrm{FO} = \rho, \quad \mathrm{F'O} = \rho'.$$

Alors on aura

$$tt' + dd' = \rho\rho'.$$

(Strebor.)

589. Un polygone d'un nombre pair de côtés étant inscrit dans une conique, si l'on mène par son centre des parallèles à chaque côté du polygone, de manière à former un parallélogramme en chacun de ses sommets, la somme des inverses des parallélogrammes de rang pair est égale à la somme des inverses des parallélogrammes de rang impair. (Capitaine Faure.)

590. Si l'on prend les polaires des points milieux des côtés d'un triangle relativement à une conique *quelconque* inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle qui a une surface constante.

(Capitaine Faure.)

591. Deux tétraèdres de volume V et V′ étant polaires réciproques relativement à une surface du second degré dont les demi-axes principaux sont a, b, c; si l'on désigne par V_1, V_2, V_3, V_4 les volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le centre de la surface aux sommets de V, on a la relation

$$\left(\frac{abc}{6}\right)^2 = V' \frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^3}.$$

Lorsque $V = V'$, on a le théorème de M. Painvin (*Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 294).

Il existe une relation analogue entre les volumes de deux tétraèdres corrélatifs. (Capitaine FAURE.)

NOTE SUR LA SOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

(voir p. 18);

PAR M. HOUSEL.

A la page 21, il faut ajouter :

Lorsque $\beta^2 < 8p^2$, A *et* B *sont imaginaires, d'après l'équation* (2), *cependant la droite* AB *et le lieu cherché sont réels.*

L'expression que donne l'auteur pour le coefficient angulaire de la tangente est inexacte, car l'équation du lieu étant

$$y^2(2p+3x)+2p(p+x)^2=0,$$

on a

$$2y\frac{dy}{dx}(2p+3x)+3y^2+4p(p+x)=0.$$

Pour

$$x=-p,$$

$\frac{dy}{dx}$ est indéterminé, car y est nul; mais pour ce point l'équation de la courbe montre que

$$\frac{y^2}{(p+x)^2}=2.$$

Donc, si l'on divise par $p+x$ l'équation dérivée, il reste à cette limite

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2},$$

comme l'a indiqué M. E. Barbier (p. 22); ce n'est donc pas un point d'inflexion, mais un point double.

Outre cela la parabole asymptote a pour équation

$$9y^2 + 2p(3x + p) = 0,$$

et il existe une parabole diamètre représentée par

$$3y^2 + 4p(x + p) = 0.$$

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME DEGRÉ AU MOYEN DES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES;

Par A. DEMONGEOT,
Elève du lycée de Besançon.

La résolution de l'équation du troisième degré privée de second terme peut dans tous les cas se ramener à la trisection de l'angle, pourvu qu'on admette les angles imaginaires de la forme $x + iy$.

Je laisse de côté le cas bien connu où les trois racines sont réelles.

II^e cas où l'on a $p < 0$ et deux racines imaginaires. — L'équation est, en rendant explicite le signe de p,

$$(1) \qquad u^3 - pu + q = 0,$$

et celle qui donne le cosinus du tiers d'un arc en fonction du cosinus de cet arc, est

$$(2) \qquad z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\cos(x + iy)}{4} = 0.$$

En posant dans la première équation

$$u = \lambda z$$

afin d'introduire une nouvelle indéterminée qui rende l'identification possible, il vient

$$z^3 - \frac{p}{\lambda^2} z + \frac{q}{\lambda^3} = 0. \tag{3}$$

Cette équation sera identique avec l'équation (2) si l'on prend

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$$

et

$$\cos(x + iy) = -\frac{q}{2\sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$

ou (*voir* la *Trigonométrie* de M. Serret, 2ᵉ édition, p. 212)

$$(e^y + e^{-y})\cos x - i(e^y - e^{-y})\sin x = \frac{-q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}.$$

On voit que le terme en $\sin x$ doit être nul, condition qui sera satisfaite si $x = 0$. Alors l'équation précédente se réduit à

$$e^y + e^{-y} = \frac{-q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$$

qui donne, en posant (*voir* la *Résolution trigonométrique de l'équation du deuxième degré*)

$$\sin 2\varphi = -\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}},$$

$$e^y = \operatorname{tang}\varphi, \qquad e^{-y} = \cot\varphi.$$

L'angle φ est réel, comme il est facile de s'en assurer, et les racines de l'équation proposée sont :

$$u' = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{iy}{3},$$

$$u'' = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{2\pi+iy}{3},$$

$$u''' = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{4\pi+iy}{3}.$$

Développant et posant

$$\tang\psi = \sqrt[3]{\tang\varphi},$$

il vient, après les réductions,

$$u' = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,\text{coséc}\,2\psi,$$

$$u'' = -\sqrt{\frac{p}{3}}\,\text{coséc}\,2\psi - i\sqrt{p}\cot 2\psi,$$

$$u''' = -\sqrt{\frac{p}{3}}\,\text{coséc}\,2\psi + i\sqrt{p}\cot 2\psi.$$

III[e] cas. $p > 0$. — Les équations (1), (2), (3) sont alors, rendant toujours explicite le signe de p,

$$(1)\qquad u^3 + pu + q = 0,$$

$$(2)\qquad z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\cos(x+iy)}{4} = 0,$$

$$(3)\qquad z^3 + \frac{p}{\lambda^2}z + \frac{q}{\lambda^3} = 0,$$

et l'on identifiera les deux dernières en prenant

$$\lambda = 2i\sqrt{\frac{p}{3}}$$

et

$$\cos(x + iy) = \frac{-qi}{2\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$$

ou

$$(e^y + e^{-y})\cos x - i(e^y - e^{-y})\sin x = \frac{-qi}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}.$$

On voit que le terme en $\cos x$ doit être nul, condition remplie si $x = \frac{\pi}{2}$; alors l'équation précédente se réduit à

$$e^y - e^{-y} = \frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}},$$

qui donne, en posant

$$\operatorname{tang} 2\varphi = -\frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}},$$

$$e^y = \operatorname{tang}\varphi, \qquad e^{-y} = -\cot\varphi,$$

l'angle 2φ est toujours réel puisqu'on suppose $p > 0$, et les racines de l'équation proposée sont

$$u' = 2i\sqrt{\frac{p}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{iy}{3}\right),$$

$$u'' = 2i\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{iy}{3}\right),$$

$$u''' = 2i\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{iy}{3}\right).$$

Développant les seconds membres et posant comme précédemment

$$\operatorname{tang}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi},$$

il vient, après les réductions,

$$u' = \sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\psi + i\sqrt{p} \operatorname{coséc} 2\psi,$$

$$u'' = \sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\psi - i\sqrt{p} \operatorname{coséc} 2\psi,$$

$$u''' = -2\sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\psi. \quad (\textit{Voir t. XVII, p. 386.})$$

SUR LES COEFFICIENTS BINOMIAUX

(voir p. 8);

PAR M. ANGE LE TAUNÉAC.

Cette question est intéressante, mais elle n'a pas été complétement résolue. En effet, si l'on emploie les formules

$$S_1 = \frac{2^m + (1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m}{4},$$

$$S_2 = \frac{2^m + (1+\sqrt{-1})^m - (1-\sqrt{-1})^m}{4}$$

(formules que je n'ai pas vérifiées) (*), on se trouve, pour ainsi dire, ramené au point de départ. Du reste, il est facile de les transformer en d'autres qui ne présentent pas le même inconvénient.

On a, identiquement,

$$1+\sqrt{-1} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

(*) Elles sont évidentes dès qu'on connaît $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$. TM.

$$1 - \sqrt{-1} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

et, par suite,

$$(1 + \sqrt{-1})^m = 2^{\frac{m}{2}}\left(\cos\frac{m\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{4}\right),$$

$$(1 - \sqrt{-1})^m = 2^{\frac{m}{2}}\left(\cos\frac{m\pi}{4} - \sqrt{-1}\sin\frac{m\pi}{4}\right).$$

On déduit, de ces valeurs :

$$S_1 = 2^{m-2} + 2^{\frac{m}{2}-1}\cos\frac{m\pi}{4},$$

$$S_2 = 2^{m-2} - 2^{\frac{m}{2}-1}\cos\frac{m\pi}{4},$$

$$S_3 = 2^{m-2} + 2^{\frac{m}{2}-1}\sin\frac{m\pi}{4},$$

$$S_4 = 2^{m-2} - 2^{\frac{m}{2}-1}\sin\frac{m\pi}{4}.$$

Soit, par exemple, $m = 15$. On aura

$$S_1 = 2^{13} + 2^6 = 8256,$$

$$S_2 = 2^{13} - 2^6 = 8128,$$

$$S_3 = 2^{13} - 2^6 = 8128,$$

$$S_4 = 2^{13} + 2^6 = 8256;$$

ce qui est exact.

Paris, 8 janvier 1861.

PROJECTION HOMALOGRAPHIQUE [BABINET (*)]

(voir t. XIX, p. 461);

1. Soit une ellipse ayant pour équation

$$y^2 + \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ ; axes rectangulaires ;}$$

l'aire élémentaire est égale à $bdx\sqrt{1-x^2}$.

Soit une seconde ellipse

$$y^2 + \frac{x^2}{b'^2} = 1 ;$$

l'aire élémentaire est $b'dx\sqrt{1-x^2}$.

Si $b'-b$ est un infiniment petit du premier ordre, la différence entre les deux aires élémentaires sera égale à $db.dx\sqrt{1-x^2}$; infiniment petit du second ordre, aire d'un quadrilatère mixtiligne formé par deux arcs d'ellipse et deux droites, infiniment petits du premier ordre. L'aire du croissant renfermé entre les deux demi-ellipses est égale à $\frac{\pi}{2}db$, quantité constante si db est constant; l'aire du quadrilatère divisée par l'aire du croissant est

$$\frac{2}{\pi}dx\sqrt{1-x^2}$$

ou, en posant $x = \sin\varphi$, égale à

$$(1) \qquad \frac{2\cos^2\varphi\, d\varphi}{\pi}.$$

(*) Babinet (Jacques), né à Lusignan (Vienne) le 5 mars 1794.

2. Soit une sphère de rayon 1 ; menons deux méridiens infiniment voisins et renfermant une aire $\frac{4\pi}{n}$, où n est infiniment grand ; concevons deux parallèles aux latitudes λ et $\lambda + d\lambda$; l'aire du quadrilatère formé par deux arcs de grands cercles et deux de petits cercles, quatre côtés infiniment petits, sera égale à $\frac{2\pi}{n}\cos\lambda\, d\lambda$. Ainsi cette aire divisée par l'aire du fuseau élémentaire, donne pour quotient

$$(2) \qquad \frac{\cos\lambda\, d\lambda}{2}.$$

3. Établissons l'équation (1) = (2) ou

$$\pi\cos\lambda\, d\lambda = 4\cos^2\varphi\, d\varphi = 2\, d\varphi(1 + \cos 2\varphi);$$

intégrant, on obtient

$$(3) \qquad \pi\sin\lambda = 2\varphi + 2\sin 2\varphi;$$

on suppose que λ et φ s'annulent simultanément ; ainsi la constante est nulle.

4. Pour fixer les idées, prenons $n = 1000$, et concevons 1000 méridiens divisant la sphère en 1000 fuseaux égaux ; divisons encore, pour fixer les idées, le quadrant en 180 parties égales chacun de 30′ et menons des parallèles par les points de division : les latitudes de ces parallèles sont les valeurs des λ, l'hémisphère sera divisé en 180000 petits carreaux sphériques. Prenons pour représenter l'aire de la sphère une ellipse de centre O, de grand axe $AOA' = 2$, et de petit axe BOB', divisons BOB' en 1000 parties égales et faisons passer par les points de division des ellipses ; on aura 1000 croissants d'aires égales ; par conséquent chacun de ces croissants elliptiques peut représenter un fuseau *sphérique*. A partir du centre O portons sur le grand axe des abscisses x qui satisfassent à

l'équation (3) et menons par les points de division des parallèles à BOB'; on formera des carreaux elliptiques; et d'après l'équation (3), l'aire de chacun de ces carreaux sera à l'aire du croissant qui le renferme comme le carreau sphérique correspondant à l'aire du fuseau sphérique; chaque carreau elliptique, c'est-à-dire chaque aire élémentaire de l'ellipse représente *sensiblement* une aire élémentaire de la sphère. Au lieu d'une ellipse ABA'B' on peut prendre une circonférence de même aire que l'hémisphère et par conséquent de rayon égal à $\sqrt{2}$.

On voit que ce système peut servir à représenter sur un plan une surface de révolution quelconque; il conserve les rapports des aires, mais altère considérablement les angles, surtout en s'approchant des pôles, car alors les parallèles coupent les ellipses méridiennes sous des angles de plus en plus aigus. Aussi, pour représenter les régions polaires, la projection Lorgna est alors préférable; elle conserve aussi les rapports des aires, et l'altération des distances *diminue* en s'approchant des pôles.

M. Ernest Bourdin (*), membre de la Société de Géographie, a eu la généreuse idée, bien rare aujourd'hui, d'éditer tout un atlas d'après ce système; voici le titre :

Atlas universel de Géographie physique et politique à l'usage des cours supérieurs et des gens du monde; système homalographique de M. Babinet.

En tout 25 cartes qui renferment les données géométriques, physiques, politiques des diverses contrées de la terre. On doit espérer que cet atlas sera adopté dans toutes les institutions d'enseignement primaires et secondaires.

M. Jules Bourdin, fils de l'éditeur, attaché aujourd'hui

(*) Rue de Seine, 51.

comme ingénieur civil à l'entreprise de l'isthme de Suez, a calculé les tables des sinus et des cosinus de x, correspondant aux valeurs des latitudes λ, par intervalles de $30'$, depuis 0° jusqu'à 90°; tables approuvées par M. Babinet. Les cartes sont dessinées avec le soin et le goût qu'on peut attendre de M. Vuillemin, géographe. Ces cartes homalographiques sont exclusivement propres à représenter avec exactitude les phénomènes physiques, tels que la direction des principaux vents et la représentation graphique des faits de statistique.

Note étymologique. ὁμαλός, semblable, pareil; *ἀνομαλός*, qui n'est pas semblable, irrégulier; en français, *anomal* et non *anormal*, orthographe vicieuse généralement répandue, dont voici l'origine : *norma* est un mot latin désignant une *équerre;* d'où *normal*, ce qui est fait d'équerre, avec justesse : on en a formé *anormal*, expression hybride; il faudrait dire *innormal*, par analogie avec *innocent;* les Allemands disent très-correctement *abnormal*.

ACADÉMIE DES SCIENCES DE BRUXELLES (1860).

(Concours jusqu'au 20 septembre 1862.)

1° Généraliser le théorème de Sturm en l'étendant à un système de deux équations à deux inconnues (prix : 1500 fr.).

2° Trouver l'intégrale de l'équation des lignes de courbure à la surface, lieu géométrique des points dont la somme des deux distances à deux droites qui se coupent, est constante (prix : 1500 fr.). (Voir *Nouvelles Annales*, p. 57.)

3° Déterminer, à l'aide d'expériences nouvelles, si une quantité donnée de travail mécanique peut développer constamment la même quantité de chaleur, et réciproquement si une même quantité de chaleur est susceptible de produire la même quantité de travail mécanique (prix : 1000 fr.).

4° On demande si le principe de Joule (*) est applicable aux effets de la poudre dans les bouches à feu. Dans la négative ou dans l'affirmative, déterminer les conditions des mouvements des gaz produits par la déflagration de la poudre dans les bouches à feu et, subsidiairement, dans d'autres circonstances (prix : 1000 fr.).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III

(voir t. XIX, p. 438 à 440);

PAR M. T.-T. WILKINSON, F. R. A. S.

THÉORÈME. *Dans un triangle, les lignes qui joignent les pieds des hauteurs sont respectivement perpendiculaires aux rayons qui joignent les sommets avec le centre du cercle circonscrit.*

Démonstration. Soient ABC le triangle, O le centre du cercle circonscrit, A', B', C', les pieds des hauteurs correspondant aux sommets A, B, C. Prolongeons AA', BB', CC' jusqu'à leur rencontre respective avec la circonférence circonscrite en l, i, k. Menons lk, ki, il et OA.

Les triangles rectangles ABB', ACC', donnent

$$\text{angle } C'CB' = \text{angle } C'BB';$$

(*) James Prescott, brasseur, né à Manchester en 1818, *On the Mechanical equivalent of heat* (*Phil. Tr.*, 1850).

d'où

$$\text{angle } ACi = \text{angle } ABk.$$

Donc

$$\text{arc } Ai = \text{arc } Ak\,;$$

et OA est perpendiculaire à ik et à $C'B'$. De même pour les autres. C. Q. F. D.

RECTIFICATIONS DIVERSES;

Par M. DUPAIN,
Professeur à Nîmes.

Tome IX, page 418. Il me semble que, contrairement à l'énoncé, deux tétraèdres trirectangles peuvent avoir un angle dièdre égal sans être semblables.

Tome XVIII, page 224, ligne 11, *lisez* : cercle de *neuf* points *au lieu de* cercle de *six* points. Voir sur ce cercle les *Annales*, t. I, p. 196.

Tome XIX, page 187. Le théorème énoncé en bas de la page fait partie de la solution de la question 436, t. XVII, p. 186.

Tome XIX, page 382. La question V se trouve déjà résolue t. XVII, p. 353.

Tome XIX, page 381, question III. La réponse *directe* a été omise : Les progressions dont le premier terme est égal à la moitié de la raison.

Même réponse quand on compare la somme des n premiers termes et la somme des kn suivants.

NOTE SUR CERTAINS DÉVELOPPEMENTS ET SOLUTION DES QUESTIONS 461, 468 ET 479;

PAR M. A. VACHETTE,
Professeur de Mathématiques.

I. *Valeur de* $a_m = x^m + \frac{1}{x^m}$ *en fonction de* $a = x + \frac{1}{x}$ *et de* m.

L'abaissement des équations réciproques de degré pair donne lieu à une équation de degré sous-double en posant $x + \frac{1}{x} = a$, et remplaçant $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}, \ldots, x^m + \frac{1}{x^m}$ par les valeurs qui en résultent. On a la relation générale

$$(1)\quad x^m + \frac{1}{x^m} = \left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right)$$

ou

$$a_m = a_{m-1}\, a - a_{m-2}.$$

Je calcule directement plusieurs termes, en commençant par $a_0 = x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2.\\
a_1 &= a.\\
a_2 &= a^2 - 2.\\
a_3 &= a^3 - 3a.\\
a_4 &= a^4 - 4a^2 + 2.\\
a_5 &= a^5 - 5a^3 + 5a.\\
a_6 &= a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 2.\\
a_7 &= a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a.\\
a_8 &= a^8 - 8a^6 + 20a^4 - 16a^2 + 2.\\
a_9 &= a^9 - 9a^7 + 27a^5 - 30a^3 + 9a.\\
a_{10} &= a^{10} - 10a^8 + 35a^6 - 50a^4 + 25a^2 - 2.\\
a_{11} &= a^{11} - 11a^9 + 44a^7 - 77a^5 + 55a^3 - 11a.
\end{aligned}$$

. . . .

Pour un indice pair, si $m = 4p$, le dernier terme est $+ 2$; et si $m = 4p + 2$, le dernier terme est $- 2$. Pour un indice impair, si $m = 4p + 1$, le dernier terme est $+ma$; et si $m = 4p + 3$, le dernier terme est $-ma$. Le nombre des termes augmente d'une unité, d'un indice pair à l'indice pair suivant, et surpasse d'une unité la moitié de l'indice. Pour un indice pair, le développement ne contient que les puissances paires de a; et pour un indice impair, il ne contient que les puissances impaires. La valeur absolue d'un terme de a_m est la somme des valeurs absolues du terme de a_{m-1} situé dans la même colonne verticale, et du terme de a_{m-2} situé dans la colonne à gauche. Les termes ont alternativement le signe $+$ et le signe $-$.

Soit $\mathrm{T}_{\frac{m}{k}}$ la valeur absolue du coefficient d'un terme de a_m qui en a k avant lui, on aura

$$a_m = a^m - \mathrm{T}_{\frac{m}{1}} a^{m-2} + \mathrm{T}_{\frac{m}{2}} a^{m-4} - \mathrm{T}_{\frac{m}{3}} a^{m-6} + \ldots$$
$$\pm \mathrm{T}_{\frac{m}{k-1}} a^{m-2k-2} \mp \mathrm{T}_{\frac{m}{k}} a^{m-2k} + \ldots .$$

Le premier terme d'une série verticale est toujours 2, et s'il en a k avant lui, l'indice de la ligne horizontale est $2k$; on aura donc toujours $\mathrm{T}_{\frac{2k}{k}} = 2$.

Supposons un indice $m > 2k$, la loi de formation d'un terme donne

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{T}_{\frac{m}{k}} &= \mathrm{T}_{\frac{m-1}{k}} + \mathrm{T}_{\frac{m-2}{k-1}} \\
\mathrm{T}_{\frac{m-1}{k}} &= \mathrm{T}_{\frac{m-2}{k}} + \mathrm{T}_{\frac{m-3}{k-1}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathrm{T}_{\frac{2k+1}{k}} &= \mathrm{T}_{\frac{2k}{k}} + \mathrm{T}_{\frac{2k-1}{k-1}} \\
\mathrm{T}_{\frac{2k}{k}} &= 2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{T}_{\frac{2k-2}{k-1}}
\end{aligned}\right.$$

et en ajoutant

$$(3)\quad T_{\frac{m}{k}} = T_{\frac{m-2}{k-1}} + T_{\frac{m-3}{k-1}} + \ldots + T_{\frac{2k-1}{k-1}} + T_{\frac{2k-2}{k-1}}$$

$$= \sum_{2k-2}^{m-2} T_{\frac{p}{k-1}}$$

la somme $\sum$ s'étendant depuis $p = m - 2$ jusqu'à $p = 2k - 2$.

On a

$$T_{\frac{m}{0}} = 1\,.$$

excepté pour $T_{\frac{0}{0}} = 2$.

Pour $T_{\frac{m}{1}}$, la formule (2) donne

$$T_{\frac{m}{1}} = T_{\frac{m-1}{1}} + T_{\frac{m-2}{0}} = T_{\frac{m-1}{1}} + 1\,;$$

il faut toujours augmenter d'une unité le terme précédent de la même colonne. A partir de $m = 3$, $T_{\frac{3}{1}} = 3$; on aura donc

$$T_{\frac{m}{1}} = m\,.$$

Pour $T_{\frac{m}{2}}$, la formule (3) donne

$$T_{\frac{m}{2}} = \sum_{2}^{m-2} T_{\frac{p}{1}} = 2 + 3 + \ldots + (m-2) = \frac{m(m-3)}{1\,.\,2}$$

Pour $T_{\frac{m}{3}}$, on aura

$$T_{\frac{m}{3}} = \sum_{4}^{m-2} T_{\frac{p}{2}} = \sum_{4}^{m-2} \frac{p(p-3)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(m-2)(m-5)+(m-3)(m-6)+\ldots+5.2+4.1\Big],$$

$$2\,T_{\frac{m}{3}} = 1(1+3)+2(2+3)+\ldots+(m-5)(m-5+3)$$

$$= 1^2+2^2+\ldots+(m-5)^2+3[1+2+3+\ldots+(m-5)];$$

or

$$S_2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et pour $n = m-5$

$$S_2 = \frac{(m-5)(m-4)(2m-9)}{6},$$

par suite

$$2\,T_{\frac{m}{3}} = \frac{(m-5)(m-4)(2m-9)}{6} + \frac{3(m-5)(m-4)}{2}$$

$$= \frac{2m(m-4)(m-5)}{6},$$

$$T_{\frac{m}{3}} = \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}.$$

On peut dès lors soupçonner que

$$T_{\frac{m}{k}} = \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

qui se réduit à 2 pour $m=2k$, et à m pour $m=2k+1$.

Pour justifier cette forme du terme général de a_m, on la suppose applicable aux développements $a_1\, a_2 \ldots a_{m-1}$;

si on peut l'appliquer à a_m, étant vérifiée jusqu'à a_6 elle sera générale. Or d'après (2)

$$T_{\frac{m}{k}}=\frac{(m-1)(m-k-2)(m-k-3)\ldots(m-2k)}{1.2.3\ldots k}$$

$$+\frac{(m-2)(m-k-2)(m-k-3)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots(k-1)}$$

$$=\frac{(m-k-2)(m-k-3)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots(k-1)}$$

$$\times\left[\frac{(m-1)(m-2k)}{k}+m-2\right]$$

$$=\frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k}$$

et la formule (1) devient

$$(4)\quad a_m=a^m-\frac{m}{1}a^{m-2}+\frac{m(m-3)}{1\ 2}a^{m-4}-\frac{m(m-4)(m-5)}{1\ 2.3}a^{m-6}+\ldots$$

$$\pm\frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k}a^{m-2k}\mp\ldots$$

le terme général ayant le signe $+$ ou le signe $-$, selon que k est pair ou impair.

II. *Trouver deux nombres dont on a la somme* a *et la somme des* m^ièmes^ *puissances* a_m.

On a, x et y étant ces deux nombres l'identité

$$x^m+y^m=(x^{m-1}+y^{m-1})(x+y)-xy(x^{m-2}+y^{m-2}),$$

que nous pouvons écrire au moyen des indices et de $p=xy$,

$$(5)\qquad a_m=a_{m-1}a-pa_{m-2}$$

avec $a_1=a$ et $a_0=2$. Cette formule ne diffère de la formule (1) du paragraphe précédent qu'en ce que le terme négatif est multiplié par p

Le calcul direct donne une analogie parfaite

$$\begin{aligned}
&a_0 = 2,\\
&a_1 = a,\\
&a_2 = a^2 - 2p,\\
&a_3 = a^3 - 3pa,\\
&a_4 = a^4 - 4pa^2 + 2p^2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

les coefficients numériques suivent évidemment la même loi de formation, et

$$\mathrm{T}_{\frac{m}{k}} = \mathrm{T}_{\frac{m-1}{k}} + \mathrm{T}_{\frac{m-2}{k-1}},$$

coefficients de p^k et p^{k-1} dans a_{m-1} et a_{m-2}, sera coefficient de p^k dans a_m d'après la loi (5). On aura donc, les exposants de p allant en augmentant d'une unité à chaque terme depuis p^0 jusqu'au dernier terme où p a un exposant égal à la moitié de m,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
a_m = a^m - \frac{m}{1} p a^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1\,2} p^2 a^{m-4}\\
- \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3} p^3 a^{m-6} + \dots\\
\pm \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\dots(m-2k+1)}{1.2.3\dots k} p^k a^{m-2k} \mp \dots
\end{aligned}\right.$$

Comme a et a_m sont connus, on aura le produit p par une équation de degré sous-double. Avec la somme a et le produit p des nombres x et y, x et y seront les deux racines de $\zeta^2 - a\zeta + p = 0$.

III. *Conséquences de la formule* (6).

1° Quand m est un nombre premier autre que 2, le nombre $\frac{(x+y)^m-(x^m+y^m)}{mxy(x+y)}$ est un nombre entier, x et y étant entiers. Comme m est un nombre premier autre que 2, il est impair et le dernier terme du développement (6) est $\pm mp^{\frac{m-1}{2}}a$.

On déduit de la formule (6)

$$\begin{aligned}&\frac{a^m - a_m}{ap}\\ &= ma^{m-3} - \frac{m(m-3)}{1.2}pa^{m-5} + \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}p^2a^{m-7} - \ldots\\ &\pm \frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k}p^{k-1}a^{m-2k-1} \mp \ldots\\ &\pm mp^{\frac{m-3}{2}}.\end{aligned}$$

Chaque coefficient contient m au numérateur, et le dénominateur $1.2.3\ldots k$ ne le contient pas, puisque m est premier, et que chacun des nombres $1, 2, 3, \ldots, k$ est plus petit que m. Donc $\frac{a^m - a_m}{map}$ est entier, et ce quotient a pour expression

$$\begin{aligned}&a^{m-3} - \frac{m-3}{2}pa^{m-5} + \frac{(m-4)(m-5)}{2.3}p^2a^{m-7} - \ldots\\ &\pm \frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{2.3\ldots k}p^{k-1}a^{m-2k-1} \mp \ldots\\ &\pm p^{\frac{m-3}{2}}.\end{aligned}$$

Si m est premier, tous les coefficients sont entiers; celui de $p^{\frac{m-3}{2}}$, qui se réduit à 1, est

$$\frac{\left(\frac{m+1}{2}-1\right)\left(\frac{m+1}{2}-2\right)\left(\frac{m+1}{2}-3\right)\cdots\left(\frac{m+1}{2}-\frac{m-1}{2}+1\right)}{2\cdot3\cdot4\cdots\frac{m-1}{2}}.$$

La plus grande valeur du dernier facteur k d'un dénominateur est $\frac{m-1}{2}$.

Si m n'est pas premier, il contiendra certains facteurs premiers, k par exemple; ce facteur k ne peut être égal à $\frac{m-1}{2}$, car

$$m : \frac{m-1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{2m}{m-1} = 2 + \frac{2}{m-1}$$

devrait être un nombre entier, ce qui nécessite $m - 1 = 2$ ou $m = 3$, nombre premier. Alors le nombre

$$\frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{2.3\ldots k}$$

ne peut pas être entier; posons

$$m = (q+1)k,$$

d'où

$$m - k = qk,$$

et le nombre devient

$$\frac{(qk-1)(qk-2)(qk-3)\ldots(qk-k+1)}{2.3.4\ldots k},$$

où k ne divise aucun des nombres $qk-1$, $qk-2$, $qk-3$, ..., $qk-(k-1)$, égaux chacun à une différence entre un multiple de k et un non-multiple de k.

2° Si m est premier, égal à $2n+1$, on peut écrire

$$\frac{(x+y)^{2n+1} - (x^{2n+1} + y^{2n+1})}{x+y}$$

$$= (x+y)^{2n} - (x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \ldots - xy^{2n-1} + y^{2n})$$

$$= \left.\begin{array}{l}2n\\+1\end{array}\right| x^{2n-1}y + \left.\begin{array}{r}\frac{2n(2n-1}{1.2}\\-1\end{array}\right| x^{2n-2}y^2 + \dots$$

$$+ \left.\begin{array}{r}\frac{2n(2n-1)\dots(2n-2p)}{1.2.3\dots(2p+1)}\\+1\end{array}\right| x^{2n-2p-1}y^{2p+1}$$

$$+ \left.\begin{array}{r}\frac{2n(2n-1)\dots(2n-2p+1)}{1.2.3\dots(2p+2)}\\-1\end{array}\right| x^{2n-p-2}y^{2p+2} + \dots$$

$$+ \left.\begin{array}{l}2n\\+1\end{array}\right| xy^{2n-1}$$

Le deuxième membre, comme on l'a vu plus haut, est divisible par xy et par $2n+1$; comme $2n+1$ est indépendant de x et de y, chaque coefficient est divisible par $2n+1$, et les deux nombres

$$\frac{2n(2n-1)\dots(2n-2p)}{1.2.3\dots(2p+1)}+1, \quad \frac{2n(2n-1)\dots(2n-2p-1)}{1.2.3\dots(2p+2)}-1$$

sont divisibles par le nombre premier $2n+1$, p étant plus petit que n.

Ce dernier théorème peut résulter de la généralisation du principe de la preuve par 9 : si les nombres a, a', a'', ..., divisés par d, donnent les restes r, r', r'', ..., la différence $aa'a''\dots - rr'r''\dots$ est divisible par d. En effet

$$2n, \quad 2n-1, \quad 2n-2, \quad \dots, \quad 2n-2p, \quad 2n-2p-1$$

divisés par $2n+1$, donnent les restes

$$-1, \quad -2, \quad -3, \quad \dots, \quad -(2p+1), \quad -(2p+2).$$

Prenons tous les facteurs, excepté le dernier, le produit des restes correspondants, en nombre impair, a le signe —, et en vertu du lemme

$$2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-2p)+1.2.3\ldots(2p+1)$$

est divisible par $2n+1$; divisant cette somme par $1.2.3\ldots(2p+1)$, on n'enlève pas le facteur $2n+1$, qui est premier avec ce produit et il en résulte

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2p)}{1.2.3\ldots(2p+1)}+1$$

divisible par $2n+1$.

Si on prend tous les facteurs, le produit a le signe +; alors on aura

$$2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-2p-1)-1.2.3\ldots(2p+1)(2p+2)$$

divisible par $2n+1$, et il en est de même de

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2p-1)}{1.2.3\ldots(2p+2)}-1.$$

Si une seule des divisions précédentes n'a pas lieu, quand p est plus petit que n, $2n+1$ n'est pas un nombre premier; car, premier ou non, il divise toujours

$$2n(2n-1)\ldots(2n-2p)+1.2.3\ldots(2p+1)$$

et

$$2n(2n-1)\ldots(2n-2p-1)-1.2.3\ldots(2p+2);$$

il faut alors que le facteur $2n+1$ ou au moins un de ses diviseurs ait été enlevé dans la division respective de chaque somme par $1.2.3\ldots(2p+1)$ pour la première, et par $1.2.3\ldots(2p+2)$ pour la seconde; donc $2n+1$ admettant un diviseur plus petit que lui, n'est pas un nombre premier.

IV. *Valeur des différences* $A_5 = a^5 - a_5$, $A_7 = a^7 - a_7$ *et conséquences qui en résultent pour* A_{5+6n} *et* A_{7+6n}, *le nombre* n *pouvant être nul.*

On trouve aisément

$$A_5 = a^5 - a_5 = 5a(a^2 - 1),$$
$$A_7 = a^7 - a_7 = 7a(a^2 - 1)^2.$$

Généralement

$$A_{5+6n} \text{ est divisible par } a^2 - 1,$$
$$A_{7+6n} \text{ est divisible par } (a^2 - 1)^2.$$

Nous commençons par établir une relation entre A_{m+6} et A_m, en nous servant des six relations suivantes, déduites de la formule (1) qu'on ajoute, en les multipliant par les facteurs respectifs placés vis-à-vis, afin d'éliminer plus rapidement :

$$\begin{array}{ll}
a_{m+6} = aa_{m+5} - a_{m+4}, & 1; \\
a_{m+5} = aa_{m+4} - a_{m+3}, & a; \\
a_{m+4} = aa_{m+3} - a_{m+2}, & a^2 - 1; \\
a_{m+3} = aa_{m+2} - a_{m+1}, & a(a^2 - 1) - a = a^3 - 2a; \\
a_{m+2} = aa_{m+1} - a_m, & a(a^3 - 2a) - (a^2 - 1) = a^4 - 3a^2 + 1; \\
a_{m+1} = aa_m - a_{m-1}, & a(a^4 - 3a^2 + 1) - (a^3 - 2a) = a^5 - 4a^3 + 3a.
\end{array}$$

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}
a_{m+6} = (a^6 - 4a^4 + 3a^2 - a^4 + 3a^2 - 1)\,a_m \\
\qquad\qquad - a(a^4 - 4a^2 + 3)\,a_{m-1} \\
\qquad = a^6 a_m - (5a^4 - 6a^2 + 1)\,a_m - a(a^4 - 4a^2 + 3)\,a_{m-1} \\
a_{m+6} = a^6 a_m - (a^2 - 1)\{(5a^2 - 1)\,a_m + a(a^2 - 3)\,a_{m-1}\}.
\end{array}\right.$$

Retranchant les deux membres de a^{m+6},

$$A_{m+6} = a^6 A_m + (a^2 - 1)\,[(5a^2 - 1)\,a_m + a(a^2 - 3)\,a_{m-1}].$$

Si m est de la forme $6n + 5$, la divisibilité par $a^2 - 1$ de A_{m+6} est ramenée à celle de A_m ou de A_{m-6} ..., ou enfin de A_5 ; ainsi A_{5+6n} est divisible par $a^2 - 1$.

Quand m est de la forme $6n + 7$, la parenthèse

$$\begin{aligned} P_m &= (5a^2 - 1)\, a_m + a\,(a^2 - 3)\, a_{m-1} \\ &= (a^2 - 1)\,(a_m + aa_{m-1}) + 2a\,(2aa_m - a_{m-1}) \end{aligned}$$

est divisible par $a^2 - 1$. Il suffit de prouver que la deuxième partie de P_m, que $2aa_m - a_{m-1}$ est divisible par $a^2 - 1$. Appliquons la formule (7)

$$\begin{aligned} a_m &= a^6 a_{m-6} - (a^2 - 1)\, P_{m-6}, \\ a_{m-1} &= a^6 a_{m-7} - (a^2 - 1)\, P_{m-7}, \end{aligned}$$

et par suite

$$2aa_m - a_{m-1} = a^6(2aa_{m-6} - a_{m-7}) - (a^2 - 1)\,(2aP_{m-6} - P_{m-7}).$$

La divisibilité par $a^2 - 1$ de P_m ou de $2aa_m - a_{m-1}$ est ramenée à celle de $2aa_{m-6} - a_{m-7}$, ou de $2aa_{m-12} - a_{m-13}$, ..., ou enfin de $2aa_7 - a_6$, ou même de

$$2aa_1 - a_0 = 2a^2 - 2 = 2(a^2 - 1).$$

On peut écrire dans ce cas

$$A_{m+6} = a^6 A_m + (a^2 - 1)^2 Q$$

et la divisibilité de A_{m+6} par $(a^2 - 1)^2$ est ramenée à celle de A_m ou de A_{m-6}, ..., ou enfin de A_7 ; ainsi A_{6n+7} sera divisible par $(a^2 - 1)^2$.

Cette divisibilité a été établie par Cauchy (*voir* le *Journal de Liouville*), sur les remarques qu'avait faites M. Lamé pour A_5 et A_7, mais en s'appuyant sur des considérations toutes différentes.

Si m est de la forme $6n + 5$, la divisibilité de A_m par $a^2 - 1$ donne $A_m = 0$ pour $a^2 = 1$; il en résulte l'identité suivante, en divisant tous les termes par m, dans la relation (4)

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} o = 1 - \frac{m-3}{2} + \frac{(m-4)(m-5)}{2.3} \\ - \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4} \\ + \frac{(m-6)(m-7)(m-8)(m-9)}{2.3.4.5} - \ldots + \\ \pm \frac{(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k} \mp \ldots \end{aligned}\right.$$

le dernier terme étant ± 1. Quand m est premier, chaque terme du second membre est entier. Cette identité (8) existe aussi pour les nombres entiers m de la forme $6n+7$.

Si m est de la forme $6n+7$, on sait que $2aa_m - a_{m-1}$ est divisible par a^2-1; cette expression ne contient que des puissances paires de a, et doit devenir nulle pour $a^2=1$. Or on peut écrire

$$\begin{aligned} 2aa_m - a_{m-1} &= 2a^{m+1} - 2a^{m+1} + 2aa_m - a_{m-1} \\ &= 2a^{m+1} - a_{m-1} - 2aA_m. \end{aligned}$$

Comme $A_m = o$ pour $a^2 = 1$, il faut que pour cette hypothèse

$$2a^{m+1} - a_{m-1} = o,$$

ce qui donne, pour cette forme de m, l'identité

$$\begin{aligned} o = 2 - 1 + \frac{m-1}{1} - (m-1)\frac{m-4}{2} + (m-1)\frac{(m-5)(m-6)}{2.3} \\ - (m-1)\frac{(m-6)(m-7)(m-8)}{2.3.4} + \ldots \\ \pm (m-1)\frac{(m-k-2)(m-k-3)\ldots(m-2k)}{2.3\ldots k} \mp \ldots, \end{aligned}$$

le dernier terme étant égal à $\pm$ 2. On aura donc

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned} 0 = m &- \frac{(m-1)(m-4)}{2} + \frac{(m-1)(m-5)(m-6)}{2.3} \\ &- (m-1)\frac{(m-6)(m-7)(m-8)}{2.3.4} + \ldots \\ &\pm \frac{(m-1)(m-k-2)(m-k-3)\ldots(m-2k)}{2.3\ldots k} \mp \ldots \end{aligned}\right.$$

Ces identités (8) et (9) sont exclusives; l'identité (8) ne convient qu'aux nombres entiers des deux formes $6n+5$ et $6n+7$ ou $6n\pm 1$, n prenant toutes les valeurs entières à partir de 1; l'identité (9) ne convient qu'aux nombres entiers de la forme $6n+1$.

V. *Conséquences de la formule* (3) $T_{\frac{m}{k}} = \sum_{2k-2}^{m-2} T_{\frac{p}{k-1}}$.

Si on y remplace m par $m+2$, et k par $k+1$, on aura

$$T_{\frac{m+2}{k+1}} = \sum_{2k}^{m} T_{\frac{p}{k}},$$

ou bien

$$\begin{aligned} &\frac{m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots k} \\ &\quad + \frac{(m-1)(m-k-2)\ldots(m-2k)}{1.2\ldots k} \\ &\quad + \frac{(m-2)(m-k-3)\ldots(m-2k-1)}{1.2\ldots k} + \ldots \\ &\quad + \frac{2k(k-1)(k-2)\ldots 1}{1.2\ 3\ldots k} \\ &\quad = \frac{(m+2)(m-k)(m-k-1)\ldots(m-2k+1)}{1.2.3\ldots(k+1)}, \end{aligned}$$

et supprimant le dénominateur $1.2.3\ldots k$

$$\begin{gathered}m(m-k-1)(m-k-2)\ldots(m-2k+1)\\+(m-1)(m-k-2)\ldots(m-2k)\\+(m-2)(m-k-3)\ldots(m-2k-1)+\ldots\\+2k(k-1)(k-2)\ldots 1\\=\frac{1}{k+1}(m+2)(m-k)(m-k-1)\ldots(m-2k+1).\end{gathered}$$

Ce résultat peut s'obtenir directement. Cherchons la somme

$$\begin{gathered}1.2.3\ldots(k-1).2k+2.3.4\ldots k(2k+1)\\+3.4.5\ldots(k+1).(2k+2)+\ldots\\+(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1).m.\end{gathered}$$

Je décompose chaque dernier facteur en deux parties, dont la première est k, on aura la somme des deux lignes suivantes

$$\begin{gathered}1.2.3\ldots(k-1).k+2.3.4\ldots k(k+1)\\+3.4.5\ldots(k+1)(k+2)+\ldots\\+(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k)\\+k\{1.2.3\ldots(k-1)+2.3.4\ldots k+3.4.5\ldots(k+1)+\ldots\\+(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)\}.\end{gathered}$$

La première est la somme depuis k jusqu'à $m-k$, des produits de k nombres entiers consécutifs; elle est égale au quotient par $k+1$ du dernier de ces produits multiplié par le nombre entier consécutif de son dernier facteur, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{k+1}(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k)(m-k+1).$$

On le vérifie pour 2, 3, 4,..., termes, et on démontre la généralité de proche en proche, par la méthode bien connue

$$1.2.3\ldots(k-1)k+2.3.4\ldots k(k+1)=2.3\ldots(k-1)k.(k+2)$$
$$=2.3\ldots(k-1)k(k+1)(k+2)\cdot\frac{1}{k+1};$$

ajoutant le troisième terme

$$2.3\ldots k(k+1)(k+2)\frac{1}{k+1}+3.4\ldots(k+1)(k+2)$$
$$=3.4.5\ldots(k+1)(k+2)\left(\frac{2}{k+1}+1\right)$$
$$=3.4.5\ldots(k+1)(k+2)(k+3)\frac{1}{k+1},$$

et ainsi de suite.

La seconde ligne est le produit par k de la somme depuis $k-1$ jusqu'à $m-k-1$, des produits de $k-1$ nombres entiers consécutifs; elle sera

$$\frac{k}{k}(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k).$$

La somme cherchée est donc

$$\frac{1}{k+1}(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k)(m-k+1)$$
$$+(m-2k+1)\ldots(m-k-1)(m-k)$$
$$=(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k)\left(\frac{m-k+1}{k+1}+1\right)$$
$$=\frac{m+2}{k+1}(m-2k+1)(m-2k+2)\ldots(m-k-1)(m-k),$$

ce qu'il fallait vérifier.

Le lemme qui nous a servi à cette vérification donne un théorème sur les arrangements; $A_{\frac{m-k}{k}}$ étant le nombre des arrangements de $m-k$ lettres prises k à k, on aura

$$\mathrm{A}_{\frac{k}{k}} + \mathrm{A}_{\frac{k+1}{k}} + \mathrm{A}_{\frac{k+2}{k}} + \ldots + \mathrm{A}_{\frac{m-k}{k}} = \frac{1}{k+1}\,\mathrm{A}_{\frac{m-k+1}{k+1}},$$

et, si l'on pose $m-k=n$,

$$\mathrm{A}_{\frac{k}{k}} + \mathrm{A}_{\frac{k+1}{k}} + \mathrm{A}_{\frac{k+2}{k}} + \ldots + \mathrm{A}_{\frac{n}{k}} = \frac{1}{k+1}\,\mathrm{A}_{\frac{n+1}{k+1}}.$$

VI. *Question* 461. *Limite de la série*

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} + \frac{1}{2.3\ldots(n+1)} + \frac{1}{3.4.5\ldots(n+2)} + \ldots.$$

La différence entre le premier et le dernier facteur de chaque dénominateur est $n-1$; si l'on multiplie et divise chaque terme par $n-1$, on aura

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n}{1.2.3\ldots n} - \frac{1}{1.2.3\ldots n}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} - \frac{1}{1.2.3\ldots n}\right),$$

$$\frac{1}{2.3.4\ldots(n+1)}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n+1}{2.3.4\ldots(n+1)} - \frac{2}{2.3.4\ldots(n+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2.3.4\ldots n} - \frac{1}{3.4.5\ldots(n+1)}\right),$$

$$\frac{1}{3.4.5\ldots(n+2)}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{n+2}{3.4.5\ldots(n+2)}-\frac{3}{3.4.5\ldots(n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{3.4.5\ldots(n+1)}-\frac{1}{4.5.6\ldots(n+2)}\right),$$

. . . .

$$\frac{1}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{n+m}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}-\frac{1+m}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m)}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(1+m)(2+m)\ldots(n+m-1)}-\frac{1}{(2+m)\ldots(n+m)}\right);$$

si l'on ajoute

$$S_m=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}-\frac{1}{(2+m)(3+m)\ldots(n+m)}\right),$$

si l'on passe à la limite, pour $m=\infty$,

$$S=\frac{1}{(n-1).1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Avec la notation des arrangements, on a la formule indiquée par M. Vannson :

$$\frac{1}{A_{\frac{n}{n}}}+\frac{1}{A_{\frac{n+1}{n}}}+\frac{1}{A_{\frac{n+2}{n}}}+\ldots=\frac{1}{(n-1)A_{\frac{n-1}{n-1}}}.$$

VII. *Vérification directe de l'identité binomiale et solution de la question 468.*

Je veux parler de l'identité

$$0 = 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots;$$

la méthode est analogue à celle du § V.

$$1 - \frac{m}{1} = \frac{1-m}{1} = -\frac{m-1}{1},$$

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} = \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m-1}{1} = \frac{m-1}{1}\left(\frac{m}{2} - 1\right)$$
$$= \frac{(m-1)(m-2)}{1.2},$$

$$1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} = -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}.$$

Si S_n est la somme des termes jusques et y compris

$$\mp \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n},$$

on trouve

$$S_n = \mp \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{1.2\ldots(n-1)n};$$

car elle est vraie encore pour

$$S_{n+1} = S_n \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n+1)}$$
$$= \pm \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)(m-n-1)}{1.2\ldots n(n+1)}.$$

Quand m est un nombre entier, le dernier terme a pour valeur

$$\mp\frac{m(m-1)\ldots(m-m+1)}{1\ 2\ldots m},$$

$$S_m=\mp\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)(m-m)}{1.2\ \ldots m}=0,$$

à cause du facteur $m-m$.

On vérifie absolument de la même manière

$$0=1^p-\frac{m^p}{1^p}+\frac{m^p(m^p-1^p)}{1^p.2^p}-\frac{m^p(m^p-1^p)(m^p-2^p)}{1^p.2^p.3^p}+\ldots$$

quand p est un nombre entier ainsi que m.

Le principal objet de cette Note était l'établissement de la formule (4) et de la formule (6); le formule (6) est précisément le sujet de la question 479. J'ai été assez surpris de voir indiquée une formule que j'avais trouvée depuis longtemps déjà, et c'est ce qui m'a décidé à publier ce petit travail. Loin de moi néanmoins l'idée de vouloir disputer à M. Stern la priorité d'une formule, assez curieuse, sans aucun doute, que nous avons trouvée séparément.

SOLUTION DES QUESTIONS 531 ET 532

(voir t. XIX, p. 247);

PAR M. DELLACH,
Professeur au lycée d'Amiens.

---

531. Soient B l'aire d'un polygone régulier circonscrit, B′ celle du polygone régulier d'un nombre double de côtés : l'aire du cercle est comprise entre B′ et $B'-\frac{1}{3}(B-B')$.

532. Soient A et B les aires de deux polygones réguliers, l'un inscrit, l'autre circonscrit : l'aire du cercle est comprise entre A et $A + \frac{2}{3}(B - A)$ (*).

Question 531.

Soient AB le demi-côté du polygone régulier de n côtés, AC pour $2n$ côtés, AD pour $4n$ côtés : on obtient ces longueurs en divisant l'angle AOB en deux parties égales et AOC en deux parties égales. Si B, B', B'', B''', etc., sont les aires des polygones réguliers de n, $2n$, $4n$, etc., côtés, on a

$$B = 2n.\mathrm{OAB}, \quad B' = 4n.\mathrm{OAC}, \quad B'' = 8n.\mathrm{OAD}.$$

Donc

$$2\frac{B - B'}{B' - B''} = \frac{\mathrm{BCE}}{\mathrm{CDF}}.$$

Soit CG la bissectrice de l'angle BCE ; elle sera parallèle à DE. On a

$$\frac{\mathrm{CBE}}{\mathrm{CEG}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EG}} = \frac{\mathrm{CE} + \mathrm{CB}}{\mathrm{CE}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}.$$

D'un autre côté

$$\frac{\mathrm{CEG}}{\mathrm{CDF}} = \frac{\overline{\mathrm{CE}}^2}{\overline{\mathrm{DF}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}^2}{\overline{\mathrm{AD}}^2}.$$

Donc

$$\frac{\mathrm{CBE}}{\mathrm{CDF}} = 2\frac{B - B'}{B' - B''} = \frac{\mathrm{AB}.\mathrm{AC}}{\overline{\mathrm{AD}}^2}.$$

Or

$$\mathrm{AC} > 2\mathrm{AD}, \quad \mathrm{AB} > 4\mathrm{AD},$$

d'où

$$\mathrm{AB}.\mathrm{AC} > 8\overline{\mathrm{AD}}^2;$$

(*) C'est une propriété différente de celle de Huyghens. Tm.

de sorte que

$$\frac{B - B'}{B' - B''} > 4$$

et

$$B' - B'' < \frac{1}{4}(B - B'),$$

$$B'' - B''' < \frac{1}{4^2}(B - B'),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on désigne par S l'aire du cercle, on a

$$S = B' - (B' - B'') - (B'' - B''') - \ldots$$

Remplaçant chaque différence par sa limite supérieure, on obtient

$$S > B' - \frac{1}{3}(B - B').$$

C. Q. F. D.

Question 532.

Soient A, A′, A″, etc., les aires des polygones réguliers inscrits de n, $2n$, $4n$, etc., côtés; on a

$$S = A + (A' - A) + (A'' - A') + \ldots$$

On démontrera aisément que

$$A' - A < \frac{1}{2}(B - A),$$

$$A'' - A' < \frac{1}{2}(B' - A').$$

Or on sait que

$$B' - A' < \frac{1}{4}(B - A) \quad \text{(problème de Catalan).}$$

Donc

$$A'' - A' < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(B - A), \quad A''' - A'' < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4^2}(B - A),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si dans la valeur de S on remplace les différences par ces limites supérieures, on obtient

$$S < A + \frac{2}{3}(B - A).$$

C. Q. F. D.

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir t. XVIII, p. 420);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

§ II. — *Cônes et cylindres du second degré passant par deux coniques situées sur une surface du second degré.*

67. La question que nous allons résoudre nous donnera une idée de l'usage qu'on peut faire des résultats précédents dans la discussion des problèmes.

Soient

$$(1)\qquad (\varphi)\quad \left\{\begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 \\ & + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 \\ & + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 \end{aligned}\right\} = 0$$

l'équation d'une surface du second degré, et

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} M &= m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 = 0, \\ N &= n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 = 0, \end{aligned}\right.$$

les équations de deux plans.

Les équations de deux coniques situées sur la surface (1) seront

$$\begin{cases} \varphi = 0, \\ M = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = 0, \\ N = 0, \end{cases}$$

et l'équation générale des surfaces du second ordre passant par les deux coniques (φ, M) et (φ, N), sera

$$(3) \qquad \varphi + 2\lambda MN = 0.$$

On exprimera que cette surface est un cône, en écrivant que le discriminant de l'équation (3) est nul, ce qui permettra de déterminer la constante λ. L'équation en λ est en apparence du quatrième degré; nous allons d'abord constater qu'elle se réduit au second degré.

68. Si l'on désigne par D le discriminant de l'équation (3), et qu'on pose

$$(4) \qquad M_{rs} = m_r n_s + m_s n_r,$$

d'où

$$M_{rs} = M_{sr},$$

l'équation en λ sera

$$(5) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda M_{11} & a_{12} + \lambda M_{12} & a_{13} + \lambda M_{13} & a_{14} + \lambda M_{14} \\ a_{21} + \lambda M_{21} & a_{22} + \lambda M_{22} & a_{23} + \lambda M_{23} & a_{24} + \lambda M_{24} \\ a_{31} + \lambda M_{31} & a_{32} + \lambda M_{32} & a_{33} + \lambda M_{33} & a_{34} + \lambda M_{34} \\ a_{41} + \lambda M_{41} & a_{42} + \lambda M_{42} & a_{43} + \lambda M_{43} & a_{44} + \lambda M_{44} \end{vmatrix}$$

Développons ce déterminant par colonnes, après avoir posé :

$$(6) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{vmatrix}$$

Désignons

Par Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, ce que devient le déterminant Δ

lorsqu'on y remplace la 1^{re}, 2^e, 3^e, 4^e colonne respectivement par la 1^{re}, 2^e, 3^e, 4^e colonne du déterminant Δ';

Par $\Delta_{r,s}$, ce que devient le déterminant Δ lorsqu'on y remplace à la fois la $r^{ième}$ et la $s^{ième}$ colonne par la $r^{ième}$ et la $s^{ième}$ colonne du déterminant Δ';

Par Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4, ce que devient le déterminant Δ' lorsqu'on y remplace la 1^{re}, 2^e, 3^e, 4^e colonne par la 1^{re}, 2^e, 3^e, 4^e colonne du déterminant Δ.

En employant ces notations, nous trouverons pour l'équation en λ :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta'\lambda^4 + (\Delta'_1 + \Delta'_2 + \Delta'_3 + \Delta'_4)\lambda^3 \\ \quad + (\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{23} + \Delta_{24} + \Delta_{34})\lambda^2 \\ \quad + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)\lambda + \Delta \end{array}\right\} = 0.$$

69. Il est facile de démontrer que

$$\Delta' = 0,\quad \Delta'_1 = 0,\quad \Delta'_2 = 0,\quad \Delta'_3 = 0,\quad \Delta'_4 = 0.$$

Il suffit, pour cela, de faire voir que le déterminant Δ' est identiquement nul, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre.

Or

$$\Delta' = \begin{vmatrix} m_1n_1 + m_1n_1 & m_1n_2 + m_2n_1 & m_1n_3 + m_3n_1 & m_1n_4 + m_4n_1 \\ m_2n_1 + m_1n_2 & m_2n_2 + m_2n_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & m_2n_4 + m_4n_2 \\ m_3n_1 + m_1n_3 & m_3n_2 + m_2n_3 & m_3n_3 + m_3n_3 & m_3n_4 + m_4n_3 \\ m_4n_1 + m_1n_4 & m_4n_2 + m_2n_4 & m_4n_3 + m_3n_4 & m_4n_4 + m_4n_4 \end{vmatrix}$$

De la première colonne, multipliée par n_2, retranchons la seconde multipliée par n_1, il vient :

$$\Delta' = \frac{m_1n_2 - m_2n_1}{n_2}\begin{vmatrix} n_1 & m_1n_2 + m_2n_1 & m_1n_3 + m_3n_1 & m_1n_4 + m_4n_1 \\ n_2 & m_2n_2 + m_2n_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & m_2n_4 + m_4n_2 \\ n_3 & m_3n_2 + m_2n_3 & m_3n_3 + m_3n_3 & m_3n_4 + m_4n_3 \\ n_4 & m_4n_2 + m_2n_4 & m_4n_3 + m_3n_4 & m_4u_4 + m_4n_4 \end{vmatrix}$$

De la seconde colonne de ce dernier déterminant, multipliée par n_3, retranchons la troisième multipliée par n_2, nous obtenons :

$$\Delta' = \frac{(m_1n_2 - m_2n_1)(m_2n_3 - m_3n_2)}{n_2n_3} \begin{vmatrix} n_1 & n_1 & m_1n_3 + m_3n_1 & m_1n_4 + m_4n_1 \\ n_2 & n_2 & m_2n_3 + m_3n_2 & m_2n_4 + m_4n_2 \\ n_3 & n_3 & m_3n_3 + m_3n_3 & m_3n_4 + m_4n_2 \\ n_4 & n_4 & m_4n_3 + m_3n_4 & m_4n_4 + m_4n_4 \end{vmatrix}$$

Or le dernier facteur est nul, car c'est un déterminant dont deux colonnes sont identiques ; donc

$$\Delta' = 0.$$

On s'assurera, par un calcul semblable, que les dérivées partielles du déterminant Δ' sont aussi nulles ; d'où l'on conclura

$$\Delta'_r = 0, \quad r = 1, 2, 3, 4.$$

Ainsi l'équation (7) se réduit à

$$\left\{ \begin{aligned} &(\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{23} + \Delta_{24} + \Delta_{34})\lambda^2 \\ &\qquad + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)\lambda + \Delta = 0. \end{aligned} \right.$$

Donc il existe, au plus, deux cônes du second degré passant par les deux coniques (φ, M), (φ, N).

70. Posons maintenant :

$$
(9)\quad\left\{
\begin{aligned}
T &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} \\
S &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} \\
U &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} \\
V &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

On vérifiera sans difficulté les relations suivantes :

$$
(10)\quad\left\{
\begin{aligned}
\Delta_{rs} &= (n_r m_s - n_s m_r)\frac{d^2 V}{dm_r\, dn_s}, \\
\Delta_r &= -\left(n_r \frac{dT}{dm_r} + m_r \frac{dS}{dn_r}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Or

$$U = m_1 \frac{dS}{dn_1} + m_2 \frac{dS}{dn_2} + m_3 \frac{dS}{dn_3} + m_4 \frac{dS}{dn_4}$$
$$= n_1 \frac{dT}{dm_1} + n_2 \frac{dT}{dm_2} + n_3 \frac{dT}{dm_3} + n_4 \frac{dT}{dm_4}.$$

Cette relation, jointe au second groupe des identités (10), nous donnera immédiatement

$$(11) \qquad \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = -2U.$$

Si l'on a égard à la relation

$$\frac{d^2V}{dm_r\,dn_s} = -\frac{d^2V}{dm_s\,dn_r},$$

le premier groupe des identités (10) donnera

$$\Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{23} + \Delta_{24} + \Delta_{34} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1\left(n_2 \frac{d^2V}{dm_1\,dn_2} + n_3 \frac{d^2V}{dm_1\,dn_3} + n_4 \frac{d^2V}{dm_1\,dn_4}\right), \\ -m_2\left(n_1 \frac{d^2V}{dm_2\,dn_1} + n_3 \frac{d^2V}{dm_2\,dn_3} + n_4 \frac{d^2V}{dm_2\,dn_4}\right), \\ -m_3\left(n_1 \frac{d^2V}{dm_3\,dn_1} + n_2 \frac{d^2V}{dm_3\,dn_2} + n_4 \frac{d^2V}{dm_3\,dn_4}\right), \\ -m_4\left(n_1 \frac{d^2V}{dm_4\,dn_1} + n_2 \frac{d^2V}{dm_4\,dn_2} + n_3 \frac{d^2V}{dm_4\,dn_3}\right). \end{array} \right.$$

ou enfin

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{12} + \Delta_{13} + \Delta_{14} + \Delta_{23} + \Delta_{24} + \Delta_{34} \\ = -\left(m_1 \frac{dV}{dm_1} + m_2 \frac{dV}{dm_2} + m_3 \frac{dV}{dm_3} + m_4 \frac{dV}{dm_4}\right) = -V. \end{array} \right.$$

L'équation (8) prendra donc la forme définitive

$$(I) \qquad V\lambda^2 + 2U\lambda - \Delta = 0.$$

71. Nous allons maintenant discuter cette équation.

La condition de réalité des racines est donnée par l'inégalité :

$$(13) \qquad U^2 + V\Delta > 0.$$

Or, si dans le déterminant V on applique aux quatre éléments $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$, que je remplacerai, pour un instant, par $\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}$, la formule

$$V \frac{d^2V}{d\alpha\, d\gamma} = \frac{dV}{d\alpha}\frac{dV}{d\gamma} - \left(\frac{dV}{d\beta}\right)^2,$$

on obtient la relation

$$(14) \qquad V\Delta + U^2 = TS.$$

Nous arrivons ainsi à cette conclusion :

Suivant que le produit des deux déterminants T *et* S *est positif, nul ou négatif, les deux cônes, passant par les coniques* (φ, M), (φ, N), *sont réels, se confondent ou sont imaginaires.*

On voit par la relation (14), que les deux cônes ne se confondront que dans le cas où l'un ou l'autre des déterminants T, S, sera nul; c'est-à-dire que l'une des coniques se réduira à un point ou à deux droites (56.)

72. Le problème admettra toujours *deux solutions réelles*, lorsque les déterminants Δ et V seront tous deux de même signe, ou lorsque l'un ou l'autre de ces deux déterminants sera nul.

Parcourons ces différentes hypothèses :

1°. ($\Delta > 0$, $V > 0$); la droite I, intersection des deux plans $M = 0$, $N = 0$, ne rencontre pas la surface $\varphi = 0$ sur laquelle sont les deux coniques, et cette surface $\varphi = 0$ est, dans le cas actuel, une surface réglée gauche, c'est-à-dire un hyberboloïde à une nappe, ou un paraboloïde hyperbolique, ou un ellipsoïde imaginaire (n° 23 et 36).

2°. $(\Delta < 0, V < 0)$; la droite I rencontre la surface φ, laquelle est, dans ce cas, un ellipsoïde réel, ou un hyperboloïde à deux nappes, ou un paraboloïde elliptique (nos 21 et 36).

3°. $(\Delta = 0)$; la surface φ est un cône et les valeurs de λ sont alors o et $-\frac{2U}{V}$. Ainsi, lorsque deux coniques sont placées sur un cône du second degré, on peut toujours faire passer par ces coniques un cône différent du premier et un seul.

4°. $(V = 0)$; la droite I est tangente à la surface φ, et les deux coniques sont elles-mêmes tangentes à la droite I. Les valeurs de λ sont alors ∞ et $\frac{\Delta}{2U}$; l'un des deux cônes se réduit aux deux plans M et N.

Lorsque le problème n'admet qu'une *seule solution* il faut d'abord que Δ et V soient de signes contraires, et, en outre, que l'un ou l'autre des déterminants T et S soit nul ; nous supposerons, par exemple, $T = 0$.

1°. $(\Delta < 0, V > 0)$; la surface φ est dénuée de génératrices rectilignes et n'est pas rencontrée par la droite I ; de plus, le plan M est tangent à la surface φ, qu'il coupe suivant un point; ce point est le sommet du cône unique.

2°. $(\Delta > 0, V < 0)$; la surface φ est réglée et gauche, et est rencontrée par la droite I ; de plus, le plan M est tangent à la surface φ, et il la coupe suivant deux droites ; ces deux droites sont situées sur le cône unique qui a pour sommet le point de contact.

Je n'insisterai pas d'avantage sur cette discussion.

73. Cherchons maintenant les relations qui doivent exister entre les quantités a_{rs}, m_i, n_i, pour qu'on puisse faire passer un cylindre du second degré par les deux coniques (φ, M) et (φ, N).

Il faut d'abord que le discriminant de l'équation (3) soit nul ; ce qui laisse subsister les calculs précédents, et conduit, par suite, à l'équation (I) (n° 70).

Il faut, en second lieu (35), remplir la condition suivante :

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda M_{11} & a_{12}+\lambda M_{12} & a_{13}+\lambda M_{13} \\ a_{21}+\lambda M_{21} & a_{22}+\lambda M_{22} & a_{23}+\lambda M_{23} \\ a_{31}+\lambda M_{31} & a_{32}+\lambda M_{32} & a_{33}+\lambda M_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation en λ, qui est en apparence du troisième degré, se réduit au second, parce que le coefficient de λ^3 est une des dérivées partielles du déterminant Δ'. La comparaison de cette dernière équation (15) avec l'équation (5), que nous avons développée ci-dessus, nous conduit sans nouveaux calculs à la relation

$$\frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0.$$

Ainsi, *pour que la surface*

$$\varphi + 2\lambda MN = 0,$$

passant par les deux coniques (φ, M) *et* (φ, N), *soit un cylindre elliptique ou hyperbolique, il faut que le paramètre indéterminé* λ *vérifie les deux équations*

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{ \begin{aligned} &V\lambda^2 + 2U\lambda - \Delta = 0, \\ &\frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Lorsque les équations (II) ont deux solutions communes, ce qui entraîne les deux équations de condition

$$(16)\qquad \frac{\frac{dV}{da_{44}}}{V} = \frac{\frac{dU}{da_{44}}}{U} = \frac{\frac{d\Delta}{da_{44}}}{\Delta},$$

il existe deux cylindres passant par les deux coniques données.

Lorsque les équations (II) ont une seule racine commune, ce qui entraîne la condition

$$(17)\quad \left(\Delta\frac{dV}{da_{44}} - V\frac{d\Delta}{da_{44}}\right)^2 = 4\left(V\frac{dU}{da_{44}} - U\frac{dV}{da_{44}}\right)\left(\Delta\frac{dU}{da_{44}} - U\frac{d\Delta}{da_{44}}\right),$$

qu'on peut écrire

$$\Delta^2\left[\frac{d.}{da_{44}}\left(\frac{V}{\Delta}\right)\right]^2 = 4V^2\left[\frac{d.}{da_{44}}\left(\frac{U}{V}\right)\right]\left[\frac{d.}{da_{44}}\left(\frac{U}{\Delta}\right)\right],$$

on obtient un cône et un seul cylindre passant par les deux coniques données.

En suivant la marche qui a été adoptée dans la discussion précédente, on pourra, sans difficulté, assigner toutes les particularités que présente la question actuelle.

74. Cherchons enfin les conditions pour qu'on puisse faire passer un *cylindre parabolique* par les deux coniques (φ, M) et (φ, N).

Il faut, dans ce cas, satisfaire à trois conditions (35).

La première est exprimée, par la relation (15); elle conduit à l'équation

$$\frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0.$$

Les deux autres conditions sont :

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda M_{11} & a_{12} + \lambda M_{12} \\ a_{21} + \lambda M_{21} & a_{22} + \lambda M_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda M_{11} & a_{13} + \lambda M_{13} \\ a_{31} + \lambda M_{31} & a_{33} + \lambda M_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ces deux conditions, on sera amené à la conclusion suivante :

Pour que la surface

$$\varphi + 2\lambda MN = 0,$$

passant par les deux coniques (φ, M) *et* (φ, N) *soit un cylindre parabolique, il faut que le paramètre indéterminé* λ *vérifie les trois équations*

$$(\text{III}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \\ &\frac{d^2V}{da_{44}\,da_{33}}\lambda^2 + 2\frac{d^2U}{da_{44}\,da_{33}}\lambda - \frac{d^2\Delta}{da_{44}\,da_{33}} = 0, \\ &\frac{d^2V}{da_{44}\,da_{22}}\lambda^2 + 2\frac{d^2U}{da_{44}\,da_{22}}\lambda - \frac{d^2\Delta}{da_{44}\,da_{22}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces trois équations entraînent comme conséquence l'équation (I). Suivant que ces trois équations auront une ou deux racines communes, on pourra faire passer par les deux coniques un ou deux cylindres paraboliques.

75. On pourrait déduire des résultats que nous venons d'obtenir les équations d'un cône ou d'un cylindre circonscrits à une surface du second ordre; mais nous arriverons à des formes d'équation plus remarquables en abordant ce problème d'une autre manière.

Je me contenterai, pour terminer la question objet de ce paragraphe, de donner les coordonnées du sommet du cône et la direction des génératrices du cylindre.

Si l'on a égard aux remarques faites dans les numéros 60 et 62, on aura :

1°. Pour les coordonnées $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ du sommet du cône passant par les coniques (φ, M) et (φ, N) :

$$
(18)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{dV}{da_{14}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{14}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{14}},\\
\alpha_2 &= \frac{dV}{da_{24}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{24}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{24}},\\
\alpha_3 &= \frac{dV}{da_{34}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{34}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{34}},\\
\alpha_4 &= \frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}},
\end{aligned}\right.
$$

en y joignant l'équation

$$V\lambda^2 + 2U\lambda - \Delta = 0.$$

2°. Pour la direction $\frac{\alpha_1}{\alpha_3}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$, des génératrices du cylindre passant par les coniques (φ, M) et (φ, N) :

$$
(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{dV}{da_{13}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{13}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{13}},\\
\alpha_2 &= \frac{dV}{da_{23}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{23}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{23}},\\
\alpha_3 &= \frac{dV}{da_{33}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{33}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{33}},
\end{aligned}\right.
$$

en y joignant les équations relatives au cylindre :

$$
\left\{\begin{aligned}
&V\lambda^2 + 2U\lambda - \Delta = 0,\\
&\frac{dV}{da_{44}}\lambda^2 + 2\frac{dU}{da_{44}}\lambda - \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Les quantités α_1, α_2, α_3, sont proportionnelles aux cosinus des angles que la direction des génératrices fait avec les axes x_1, x_2, x_3, si ces axes sont rectangulaires.

Dans plusieurs classes de problèmes, ces dernières formules pourront être d'une grande utilité.

§ III. — *Équations générales des cônes et cylindres circonscrits à une surface du second ordre.*

76. Cherchons, en premier lieu, l'équation d'un cône circonscrit à une surface du second degré, et ayant pour sommet un point donné $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$.

Si l'on exprime que la droite

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 &= 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 &= 0, \end{aligned} \right.$$

passe par le point fixe $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$, et qu'elle est, en outre, tangente à la surface du second degré, on aura les relations :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \alpha_3 + m_4 \alpha_4 &= 0, \\ n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + n_3 \alpha_3 + n_4 \alpha_4 &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$(3) \qquad V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On obtiendra, par conséquent, l'équation cherchée de la surface conique en éliminant m_1, m_2, m_3, m_4, n_1, n_2, n_3, n_4, entre les cinq équations (1), (2) et (3).

77. Pour effectuer cette élimination, j'introduirai les notations suivantes. Je désignerai par φ le premier membre de l'équation de la surface du second degré; par X_1, X_2, X_3, X_4, les demi-dérivées $\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_1}$, $\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_2}$, $\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_3}$,

$\frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_4}$; puis, par φ_0, A_1, A_2, A_3, A_4, ces mêmes expressions dans lesquelles on aura remplacé x_1, x_2, x_3, x_4, respectivement par α_1, α_2, α_3, α_4. Nous aurons, d'après cela,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} X_r &= a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r3}x_3 + a_{r4}x_4 \\ &= a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + a_{3r}x_3 + a_{4r}x_4, \\ A_r &= a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + a_{r3}\alpha_3 + a_{r4}\alpha_4 \\ &= a_{1r}\alpha_1 + a_{2r}\alpha_2 + a_{3r}\alpha_3 + a_{4r}\alpha_4, \\ &\qquad \text{où}\quad r = 1, 2, 3, 4; \end{aligned}\right.$$

puis, d'après le principe des fonctions homogènes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 + x_4 X_4, \\ \varphi_0 &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4. \end{aligned}\right.$$

78. En représentant, pour un instant, par $\begin{matrix}\alpha & \beta \\ \beta & \gamma\end{matrix}$ le carré $\begin{matrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{matrix}$ du déterminant V, nous aurons les équations :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_{11}\frac{dV}{dn_1} + a_{21}\frac{dV}{dn_2} + a_{31}\frac{dV}{dn_3} + a_{41}\frac{dV}{dn_4} + m_1\frac{dV}{d\beta} + n_1\frac{dV}{d\gamma} = 0, \\
&a_{12}\frac{dV}{dn_1} + a_{22}\frac{dV}{dn_2} + a_{32}\frac{dV}{dn_3} + a_{42}\frac{dV}{dn_4} + m_2\frac{dV}{d\beta} + n_2\frac{dV}{d\gamma} = 0, \\
&a_{13}\frac{dV}{dn_1} + a_{23}\frac{dV}{dn_2} + a_{33}\frac{dV}{dn_3} + a_{43}\frac{dV}{dn_4} + m_3\frac{dV}{d\beta} + n_3\frac{dV}{d\gamma} = 0, \\
&a_{14}\frac{dV}{dn_1} + a_{24}\frac{dV}{dn_2} + a_{34}\frac{dV}{dn_3} + a_{44}\frac{dV}{dn_4} + m_4\frac{dV}{d\beta} + n_4\frac{dV}{d\gamma} = 0, \\
&m_1\frac{dV}{dn_1} + m_2\frac{dV}{dn_2} + m_3\frac{dV}{dn_3} + m_4\frac{dV}{dn_4} + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = 0, \\
&n_1\frac{dV}{dn_1} + n_2\frac{dV}{dn_2} + n_3\frac{dV}{dn_3} + n_4\frac{dV}{dn_4} + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = V = 0;
\end{aligned}\right.$$

ces relations résultent de la propriété fondamentale des déterminants.

Si l'on multiplie les quatre premières de ces équations respectivement par x_1, x_2, x_3, x_4, puis qu'on ajoute les résultats, en ayant égard aux identités (1) et (4), il viendra

$$X_1 \frac{dV}{dn_1} + X_2 \frac{dV}{dn_2} + X_3 \frac{dV}{dn_3} + X_4 \frac{dV}{dn_4} = 0.$$

On obtiendra de même, en multipliant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, et en ayant égard aux relations (2) et (4),

$$A_1 \frac{dV}{dn_1} + A_2 \frac{dV}{dn_2} + A_3 \frac{dV}{dn_3} + A_4 \frac{dV}{dn_4} = 0.$$

L'élimination de $\frac{dV}{dn_1}, \frac{dV}{dn_2}, \frac{dV}{dn_3}, \frac{dV}{dn_4}$, entre les deux dernières équations du groupe (6) et les deux qu'on vient de déduire, conduit immédiatement à la relation

$$(7) \qquad V_1 = \begin{vmatrix} X_1 & A_1 & m_1 & n_1 \\ X_2 & A_2 & m_2 & n_2 \\ X_3 & A_3 & m_3 & n_3 \\ X_4 & A_4 & m_4 & n_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière équation fournira les suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &X_1 \frac{dV_1}{dX_1} + A_1 \frac{dV_1}{dA_1} + m_1 \frac{dV_1}{dm_1} + n_1 \frac{dV_1}{dn_1} = V_1 = 0, \\ &X_2 \frac{dV_1}{dX_1} + A_2 \frac{dV_1}{dA_1} + m_2 \frac{dV_1}{dm_1} + n_2 \frac{dV_1}{dn_1} = 0, \\ &X_3 \frac{dV_1}{dX_1} + A_3 \frac{dV_1}{dA_1} + m_3 \frac{dV_1}{dm_1} + n_3 \frac{dV_1}{dn_1} = 0, \\ &X_4 \frac{dV_1}{dX_1} + A_4 \frac{dV_1}{dA_1} + m_4 \frac{dV_1}{dm_1} + n_4 \frac{dV_1}{dn_1} = 0. \end{aligned}\right.$$

En ajoutant ces quatre relations multipliées d'abord par x_1, x_2, x_3, x_4, puis par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, on trouvera successivement

$$\left\{\begin{aligned}&\varphi\frac{dV_1}{dX_1}+(x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4)\frac{dV_1}{dA_1}=0,\\&(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3+\alpha_4X_4)\frac{dV_1}{dX_1}+\varphi_0\frac{dV_1}{dA_1}=0.\end{aligned}\right.$$

L'élimination de $\frac{dV_1}{dX_1}, \frac{dV_1}{dA_1}$, entre ces deux dernières équations conduira précisément à l'équation cherchée.

On a ainsi pour l'équation générale des cônes circonscrits à une surface du second ordre :

$$(8)\qquad\left\{\begin{aligned}&\varphi\varphi_0-(x_1A_1+x_2A_2+x_3A_3+x_4A_4)\\&\quad\times(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3+\alpha_4X_4)=0.\end{aligned}\right.$$

Il est aisé de vérifier que les deux derniers facteurs sont identiquement égaux.

79. On peut donner une forme très-remarquable à cette dernière équation.

Désignant toujours par Δ le discriminant de la fonction φ, posons

$$(9)\qquad \alpha_{rs}=\frac{d\Delta}{da_{rs}}.$$

On sait que si l'on représente par S le déterminant dont les éléments sont α_{rs}, on a les deux identités

$$(10)\qquad\left\{\begin{aligned}&S=\Delta^3,\\&\frac{dS}{d\alpha_{rs}}=\Delta^2a_{rs}.\end{aligned}\right.$$

(Brioschi, *Théorie des déterminants*, p. 41).

Ceci admis, considérons le déterminant

$$(11)\qquad C = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & x_1 & \alpha_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & x_2 & \alpha_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & x_3 & \alpha_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & x_4 & \alpha_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On aura, d'après une formule fréquemment employée,

$$(12)\qquad C\frac{d^2C}{d\alpha\, d\gamma} = \frac{dC}{d\alpha}\frac{dC}{d\gamma} - \left(\frac{dC}{d\beta}\right)^2,$$

en représentant le carré $\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ par $\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{matrix}$.

Or, si l'on a égard aux identités (10), on vérifiera immédiatement les relations suivantes :

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2C}{d\alpha\, d\gamma} = S = \Delta^3, \\ \dfrac{dC}{d\gamma} = -\Delta^2\varphi, \\ \dfrac{dC}{d\alpha} = -\Delta^2\varphi_0, \\ \dfrac{dC}{d\beta} = -\Delta^2(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_2 + \alpha_4 X_4) \\ \qquad = -\Delta^2(x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4). \end{cases}$$

L'identité (10) donne alors

$$(14)\qquad C = \Delta\left[\begin{matrix} \varphi\varphi_0 - (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4) \\ \times (x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4) \end{matrix}\right].$$

Du rapprochement des relations (8), (11) et (14), nous conclurons que l'équation d'un cône ayant pour sommet

$\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$, et circonscrit à une surface du second degré qui a pour discriminant Δ, peut se mettre sous la forme simple et mnémonique :

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} \frac{d\Delta}{da_{11}} & \frac{d\Delta}{da_{12}} & \frac{d\Delta}{da_{13}} & \frac{d\Delta}{da_{14}} & x_1 & \alpha_1 \\ \frac{d\Delta}{da_{21}} & \frac{d\Delta}{da_{22}} & \frac{d\Delta}{da_{23}} & \frac{d\Delta}{da_{24}} & x_2 & \alpha_2 \\ \frac{d\Delta}{da_{31}} & \frac{d\Delta}{da_{32}} & \frac{d\Delta}{da_{33}} & \frac{d\Delta}{da_{34}} & x_3 & \alpha_3 \\ \frac{d\Delta}{da_{41}} & \frac{d\Delta}{da_{42}} & \frac{d\Delta}{da_{43}} & \frac{d\Delta}{da_{44}} & x_4 & \alpha_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

80. Cherchons maintenant l'équation d'un cylindre circonscrit à la surface $\varphi = 0$.

Il faut d'abord exprimer que la droite quelconque

$$(16)\qquad \begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = 0, \end{cases}$$

est parallèle à une droite fixe donnée

$$(17)\qquad \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 = 0, \end{cases}$$

ce qui entraîne les relations

$$(18)\qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m_3 & n_3 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \end{cases}$$

λ étant une constante indéterminée.

Il faut, en second lieu, exprimer que la droite (16) est tangente à la surface φ, ce qui donne (36)

$$(19)\qquad V = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On obtiendra donc l'équation du cylindre circonscrit en éliminant les m_i, n_i entre les équations (16), (18) et (19).

81. Pour effectuer cette élimination, il est nécessaire de transformer le déterminant V. Multiplions les trois premières lignes par x_1, x_2, x_3, et ajoutons les résultats ainsi obtenus à la quatrième, multipliée elle-même par x_4, il viendra, en ayant égard aux relations (4) et (16) :

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplions maintenant les trois premières colonnes de ce dernier déterminant par x_1, x_2, x_3, et ajoutons les résultats à la quatrième, multipliée elle-même par x_4, nous obtiendrons l'équation :

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 & m_3 & n_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \varphi & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Or remarquons que si l'on développait ce déterminant, les m_i, n_i, n'y entreraient que sous les formes $\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} m_3 & n_3 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}$; et, de plus, le résultat serait homogène par rapport à ces binômes.

Il en résulte, si l'on fait attention aux relations (18), que l'élimination s'effectuera par la simple substitution, dans l'équation (21), des α_i aux m_i, et des β_i aux n_i.

On trouve ainsi, pour l'équation d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite (17), et qui est circonscrit à la surface du second ordre $\varphi = 0$,

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & X_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & X_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & X_3 & \alpha_3 & \beta_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 & \varphi & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut encore donner à ce dernier déterminant une forme beaucoup plus simple. Retranchons de la quatrième colonne les trois premières respectivement multipliées par x_1, x_2, x_3; puis opérons de la même manière sur les lignes du déterminant ainsi obtenu, en ayant toujours égard aux identités (4) et (5), on arrive à la forme définitive pour l'équation du cylindre circonscrit :

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \alpha_1 & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \alpha_2 & \beta_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \alpha_3 & \beta_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & A & B \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & A & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & B & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Les quantités A et B sont définies par les équations suivantes :

$$(24)\qquad \begin{cases} A = -\left(\alpha_1 \dfrac{x_1}{x_4} + \alpha_2 \dfrac{x_2}{x_4} + \alpha_3 \dfrac{x_3}{x_4}\right), \\ B = -\left(\beta_1 \dfrac{x_1}{x_4} + \beta_2 \dfrac{x_2}{x_4} + \beta_3 \dfrac{x_3}{x_4}\right); \end{cases}$$

ce sont les premiers membres, changés de signe, des équations d'une droite passant par l'origine et parallèle à la direction donnée des génératrices du cylindre.

CALCUL DE δu_0, $\delta^2 u_0, \ldots$, $\delta^n u_0$ EN FONCTION DE Δu_0, $\Delta^2 u_0, \ldots$, $\Delta^m u_0$, puis de δu_{-1}, $\delta^2 u_{-2}, \ldots$, $\delta^n u_{-n}$ en fonction de Δu_{-1}, $\Delta^2 u_{-2}, \ldots$, $\Delta^m u_{-m}$;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

I. Soient u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0, \ldots$, $\Delta^m u_0$ les valeurs d'une fonction u, entière en x, du degré m et de ses différences successives pour $x = x_0$, les valeurs de x considérées à partir de x_0 formant une progression arithmétique de raison h.

Soient δu_0, $\delta^2 u_0, \ldots$, $\delta^m u_0$ les valeurs des différences, lorsque les valeurs de x à partir de x_0 se suivent en progression de raison k.

Dans le grand ouvrage de Lacroix, t. III, § 940, p. 73, on trouve pour le calcul de $\delta^n u_0$ la formule

$$\delta^n u_0 = [(1 + \Delta)^z - 1]^n u_0,$$

z étant le rapport $\frac{k}{h}$.

La formule, je le présume, est de Lagrange. Je ne sache pas qu'elle ait été insérée jusqu'ici dans les Traités d'Algèbre à l'usage des classes actuelles de mathématiques spéciales.

Je vais en proposer une démonstration assez simple, il me semble, pour permettre de lui donner place dans l'enseignement courant.

On a pour expression de u, soit

$$u = u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{x - x_0}{h} \cdots \left(\frac{x - x_0}{h} - m + 1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2\ldots m},$$

soit

$$u = u_0 + \frac{x - x_0}{k} \delta u_0 + \frac{x - x_0}{k}\left(\frac{x - x_0}{k} - 1\right)\frac{\delta^2 u_0}{1.2} + \ldots$$
$$+ \frac{x - x_0}{k} \cdots \left(\frac{x - x_0}{k} - m + 1\right)\frac{\delta^m u_0}{1.2\ldots m}.$$

Égalons les valeurs de ces deux expressions pour

$$x = x_0 + k,$$
$$x = x_0 + 2k,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$x = x_0 + nk, \ldots,$$

nous aurons, en posant $\frac{k}{h} = z$,

$$
(1)\left\{\begin{aligned}
&\delta = z\Delta + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\Delta^3 + \ldots \\
&\qquad + \frac{z(z-1)\ldots(z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m, \\
&\frac{2}{1}\delta + \frac{2.1}{1.2}\delta^2 = 2z\Delta + \frac{2z(2z-1)}{1.2}\Delta^2 + \ldots \\
&\qquad + \frac{2z(2z-1)\ldots(2z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m, \\
&\frac{3}{1}\delta + \frac{3.2}{1.2}\delta^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3}\delta^3 = 3z\Delta + \frac{3z(3z-1)}{1.2.}\Delta^2 + \ldots \\
&\qquad + \frac{3z(3z-1)\ldots(3z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&n\delta + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta^2 + \ldots + n\delta^{n-1} + \delta^n \\
&= nz\Delta + \frac{nz(nz-1)}{1.2}\Delta^2 + \ldots + \frac{nz(nz-1)\ldots(nz-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m.
\end{aligned}\right.
$$

Mais si l'on prend

$$\theta = 1 + z\Delta + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 + \ldots + \frac{z(z-1)\ldots(z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m,$$

il est à remarquer que

$$\theta^2 = 1 + 2z\Delta + \frac{2z(2z-1)}{1.2}\Delta^2 + \ldots + \frac{2z(2z-1)\ldots(2z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m$$

pourvu que dans la multiplication de l'expression de θ par elle-même les facteurs Δ, $\Delta^2, \ldots$, Δ^m se traitent comme des puissances, sauf que

$$\Delta^{m+1} = 0, \quad \Delta^{m+2} = 0, \ldots, \quad \Delta^{2m} = 0.$$

Car, p étant entier, on a

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{1.2\ldots n}x^m + \ldots + px^{p-1} + x^p$$

et

$$(1+x)^{2p} = 1 + 2px + \frac{2p(2p-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{2p(2p-1)\ldots(2p-m+1)}{1.2\ldots m}x^m + \ldots + 2px^{2p-1} + x^{2p}.$$

Donc quand on effectue régulièrement le produit du développement de $(1+x)^p$ par lui-meme, les coefficients des puissances successives de x sont des expressions entières en p égales respectivement aux coefficients des mèmes puissances de x dans le développement de $(1+x)^p$ pour toute valeur entière de p positive. En conséquence, ces égalités subsistent pour toute valeur de p. De là, quel que soit z, la formule

$$\theta^2 = 1 + 2z\Delta + \frac{2z(2z-1)}{1.2}\Delta^2 + \ldots$$
$$+ \frac{2z(2z-1)\ldots(2z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m,$$

et pour semblables raisorts

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\theta^3 &= 1 + 3z\Delta + \frac{3z(3z-1)}{1.2}\Delta^2 + \ldots \\
&\quad + \frac{3z(3z-1)\ldots(3z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\theta^n &= 1 + nz\Delta + \frac{nz(nz-1)}{1.2}\Delta^2 + \ldots \\
&\quad + \frac{nz(nz-1)\ldots(nz-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m.
\end{aligned}\right.$$

A l'aide de ces formules, les formules (1) se transforment en

$$
(3)\left\{\begin{aligned}
&\delta = \theta - 1,\\
&\delta^2 = \theta^2 - 1 - 2\delta = \theta^2 - 1 - 2(\theta - 1)\\
&\quad = \theta^2 - 2[1 + (\theta - 1)]^2 - (\theta - 1)^2 = (\theta - 1)^2,\\
&\delta^3 = \theta^3 - 1 - 3\delta - 3\delta^2 = \theta^3 - 1 - 3(\theta - 1) - 3(\theta - 1)^2\\
&\quad = \theta^3 - [1 + (\theta - 1)]^3 + (\theta - 1)^3 = (\theta - 1)^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta^n = \theta^n - 1 - n\delta - \ldots - n\delta^{n-1}\\
&\quad = \theta^n - 1 - n(\theta - 1) - \ldots - n(\theta - 1)^{n-1}\\
&\quad = \theta^n - [1 + (\partial - 1)]^n + (\theta - 1)^n = (\theta - 1)^n.
\end{aligned}\right.
$$

C. Q. F. D.

II. Le triangle des différences

$$
\begin{array}{c}
u_0, \quad u_1, \ldots, \quad u_{m-1}, \quad u_m,\\
\Delta u_0, \ \Delta u_1, \ldots, \ \Delta^n u_{m-1},\\
\Delta^2 u_0, \ldots, \ \Delta^2 u_{m-2},\\
\ldots\ldots\\
\Delta^m u_0,
\end{array}
$$

quand on prend au rebours les termes de la ligne supérieure, se change en

$$
\begin{array}{c}
u_m, \quad u_{m-1}, \ldots, \quad u_1, \quad u_0,\\
-\Delta u_{m-1}, \ldots, \ -\Delta u_0,\\
\Delta^2 u_{m-2}, \ldots, \ \Delta^2 u_0,\\
\ldots\ldots\\
\pm \Delta^m u_0.
\end{array}
$$

Qu'on y applique alors la formule déjà considérée

$$
u = x_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \ldots
$$

$$
+ \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right) \ldots \left(\frac{x - x_0}{h} - m + 1\right) \frac{\Delta^m u_0}{1.2\ldots m},
$$

il s'ensuit l'expression connue de u :

$$u = u_m - \frac{x - x_m}{-h} \Delta u_{m-1} + \frac{x - x_m}{-h}\left(\frac{x - x_m}{-h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_{m-2}}{1.2} - \ldots$$

$$\pm \frac{x - x_m}{-h}\left(\frac{x - x_m}{-h} - 1\right) \ldots \left(\frac{x - x_m}{-h} - m + 1\right)\frac{\Delta^m u_{m-m}}{1.2 \ldots m},$$

$$u = u_m + \frac{x - x_m}{h} \Delta u_{m-1} + \frac{x - x_m}{h}\left(\frac{x - x_m}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_{m-2}}{1.2} + \ldots$$

$$+ \frac{x - x_m}{h}\left(\frac{x - x_m}{h} + 1\right) \ldots \left(\frac{x - x_m}{h} + m + 1\right)\frac{\Delta^m u_0}{1.2 \ldots m},$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$u = u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_{-1} + \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2} + \ldots$$

$$+ \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right) \ldots \left(\frac{x - x_0}{h} + m - 1\right)\frac{\Delta^m u_{-m}}{1.2 \ldots m}.$$

Pareillement :

$$u = u_0 + \frac{x - x_0}{k} \delta u_{-1} + \frac{x - x_0}{k}\left(\frac{x - x_0}{k} + 1\right)\frac{\delta^2 u_{-2}}{1.2} + \ldots$$

$$+ \frac{x - x_0}{k}\left(\frac{x - x_0}{k} + 1\right) \ldots \left(\frac{x - x_0}{k} + m - 1\right)\frac{\delta^m u_{-m}}{1.2 \ldots m}.$$

En faisant tour à tour

$$x = x_0 - k,$$

$$x = x_0 - 2k,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x = x_0 - nk,$$

on déduit de là

$$(4)\left\{\begin{aligned}
&-\delta u_{-1} = -z\Delta u_{-1} + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_{-2} - \ldots \\
&\qquad \pm \frac{z(z-1)\ldots(z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m u_{-m}, \\
&-\frac{2}{1}\delta u_{-1} + \frac{2.1}{1.2}\delta^2 u_{-2} = -2z\Delta u_{-1} + \frac{2z(2z-1)}{1.2}\Delta^2 u_{-2} - \ldots \\
&\qquad \pm \frac{2z(2z-1)\ldots(2z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m u_{-m}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&-\frac{n}{1}\delta u_{-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta^2 u_{-2} - \ldots \pm \delta^n u_{-n} \\
&\qquad = -nz\Delta u_{-1} + \frac{nz(nz-1)}{1.2}\Delta^2 u_{-2} - \ldots \\
&\qquad \pm \frac{nz(nz-1)\ldots(nz-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m u_{-m}.
\end{aligned}\right.$$

Qu'on pose

$$\varphi = 1 - z\Delta u_{-1} + \frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_{-2} - \ldots \pm \frac{z(z-1)\ldots(z-m+1)}{1.2\ldots m}\Delta^m u_{-m},$$

et qu'il soit entendu que

$$\Delta^p u_{-p} \,.\, \Delta^q u_{-q} = \Delta^{p+q} u_{-(p+q)}$$

et que

$$\Delta^{m+1} u_{-(m+1)} = 0, \quad \Delta^{m+2} u_{-(m+2)} = 0, \ldots,$$

ces formules (4) deviendront

$$
(5)\left\{\begin{array}{l}
1-\delta u_{-1}=\varphi, \\
1-2\delta u_{-1}+\delta^2 u_{-2}=\varphi^2, \\
1-3\delta u_{-1}+3\delta u_{-2}-\delta^3 u_{-3}=\varphi^3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
1-n\delta u_{-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\delta^2 u_{-2}-\ldots\pm n\delta^{n-1} u_{-(n-1)} \\
\qquad\mp\delta^n u_{-n}=\varphi^n,
\end{array}\right.
$$

d'où les suivantes :

$$
(6)\left\{\begin{array}{l}
\delta u_{-1}=(1-\varphi), \\
\delta^2 u_{-2}=\varphi^2-[1-2(1-\varphi)] \\
\qquad=\varphi^2-[1-(1-\varphi)]^2+(1-\varphi)^2=(1-\varphi)^2, \\
\delta^3 u_{-3}=-\varphi^3+[1-3(1-\varphi)+3(1-\varphi)^2] \\
\qquad=-\varphi^3+[1-(1-\varphi)]^3+(1-\varphi)^3=(1-\varphi)^3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\delta^n u_{-n}=\mp\varphi^n\pm[1-n(1-\varphi)+\ldots\pm n(1-\varphi)^{n-1}] \\
\qquad=\mp\varphi^n\pm[1-(1-\varphi)]^n+(1-\varphi)^n=(1-\varphi)^n.
\end{array}\right.
$$

La formule symbolique est ici, avec $\varphi=(1-\Delta u_{-1})^z$,

$$\delta^n u_{-n}=[1-(1-\Delta u_{-1})^z]^n.$$

Remarque. En développant les formules (3) on trouve

$$\delta u_0=z\Delta u_0+\frac{z(z-1)}{1.2}\Delta^2 u_0+\frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0$$
$$+\frac{z(z-1)\ldots(z-3)}{1.2\ldots4}\Delta^4 x_0+\frac{z\ldots(z-4)}{1\ldots5}\Delta^5 u_0+\ldots,$$

$$\delta^2 u_0=z^2\Delta^2 u_0+z^2(z-1)\Delta^3 u_0+\frac{z^2(z-1)(7z-11)}{3.4}\Delta^4 u_0$$
$$+\frac{z^2(z-1)(z-2)(3z-5)}{3.4}\Delta^5 u_0+\ldots,$$

$$\delta^3 u_0 = z^3 \Delta^3 u_0 + \frac{3z^3(z-1)}{2} \Delta^4 u_0 + \frac{z^4(z-1)(5z-7)}{4} \Delta^5 u_0 + \ldots,$$

$$\delta^4 u_0 = z^4 \Delta^4 u_0 + 2z^4(z-1)\Delta^5 u_0 + \ldots,$$

$$\delta^5 u_0 = z^5 \Delta^5 u_0 + \ldots,$$

ce qui donne, pour $z = 0,1$,

$$\delta = 0,1\,\Delta - 0,045\,\Delta^2 + 0,0285\,\Delta^3 - 0,0206625\,\Delta^4 + 0,0161167 5\,\Delta^5 - \ldots,$$

$$\delta^2 = 0,01\,\Delta^2 - 0,009\,\Delta^3 + 0,007725\,\Delta^4 - 0,0066975\,\Delta^5 + \ldots,$$

$$\delta^3 = 0,001\,\Delta^3 - 0,00135\,\Delta^4 + 0,00014625\,\Delta^5 - \ldots,$$

$$\delta^4 = 0,0001\,\Delta^4 - 0,0001,8\,\Delta^5 + \ldots,$$

$$\delta^5 = 0,00001\,\Delta^5 - \ldots.$$

D'autre part

$$\delta\, u_{-1} = z\,\Delta\, u_{-1} - \frac{z(z-1)}{1.2} \Delta^2 u_{-2} + \frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3} \Delta^3 u_{-3} - \frac{z(z-1)\ldots(z-3)}{1.2.3.4} \Delta^4 u_{-4} - \frac{z\ldots(z-4)}{1\ldots5} \Delta^5 u_{-5} - \ldots,$$

$$\delta^2 u_{-2} = z^2 \Delta^2 u_{-2} - z^2(z-1)\Delta^3 u_{-3} + \frac{z^2(z-1)(7z-11)}{3.4} \Delta^4 u_{-4} - \frac{z^2(z-1)(z-2)(3z-5)}{3.4} \Delta^5 u_{-5} + \ldots$$

$$\delta^3 u_{-3} = z^3 \Delta^3 u_{-3} - \frac{3z^3(z-1)}{2} \Delta^4 u_{-4} + \frac{z^4(z-1)(5z-7)}{4} \Delta^5 u_{-5} - \ldots$$

$$\delta^4 u_{-4} = z^4 \Delta^4 u_{-4} - 2z^4(z-1)\Delta^5 u_{-5} + \ldots,$$

$$\delta^5 u_{-5} = z^5 \Delta^5 u_{-5} - \ldots,$$

. . . .

d'où, pour $z = 0,1$,

$$\begin{aligned}
\delta\, u_{-1} &= 0,1\,\Delta u_{-1} + 0,045\,\Delta^2 u_{-2} + 0,0285\,\Delta^3 u_{-3} \\
&\qquad + 0,0206625\,\Delta^4 u_{-4} \\
&\qquad + 0,0161 1675\,\Delta^5 u_{-5} + \ldots, \\
\delta^2 u_{-2} &= 0,01\,\Delta^2 u_{-2} + 0,009\,\Delta^3 u_{-3} + 0,007725\,\Delta^4 u_{-4} \\
&\qquad + 0,0066975\,\Delta^5 u_{-5} + \ldots, \\
\delta^3 u_{-3} &= 0,001\,\Delta^3 u_{-3} + 0,00135\,\Delta^4 u_{-4} \\
&\qquad + 0,0001 4625\,\Delta^5 u_{-5} + \ldots, \\
\delta^4 u_{-4} &= 0,0001\,\Delta^4 u_{-4} + 0,0001,8\,\Delta^5 u_{-5} + \ldots, \\
\delta^5 u_{-5} &= 0,00001\,\Delta^5 u_{-5} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Note du Rédacteur. Le point de départ de ce genre de symbolisme est de Leibniz :

Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum, et de Lege homogenerum transcendentali Miscellanea Berolinensis (p. 160). Berol., 1749.

L'homogénéité dont il s'agit ici est celle de $(dx)^2$ et $d^2 x$, etc.

LIEU GÉOMÉTRIQUE

du sommet d'un angle de grandeur constante circonscrit à une courbe de la classe n;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES (*).

Cette question, du moins dans le cas où l'angle circonscrit est droit, a occupé d'éminents géomètres, et a fait

(*) Au Pirée, 20 décembre 1860.

récemment, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XVIII, p. 314), le sujet d'un article où M. George Salmon s'est proposé de rectifier les assertions de MM. Steiner et Dewulf.

Cependant M. Terquem fait suivre l'article dont il s'agit, d'une *Note* qui se termine par ces mots : « Il reste donc » encore quelque chose à éclaircir dans cette question. » Je le crois aussi ; et c'est ce qui m'a engagé à m'en occuper. Mais si j'ai réussi, comme je l'espère, à dissiper les quelques nuages qui y jetaient encore un peu d'obscurité, j'ai du moins la satisfaction d'arriver à cette conclusion que MM. Steiner, Dewulf et Terquem n'ont pas moins raison que M. Salmon, et que les dissidences de ces savants géomètres, plus apparentes que réelles, disparaissent à l'aide d'une simple remarque.

Pour mieux me faire entendre, je reprends la question de plus haut, en la traitant dans toute sa généralité. Supposons donc qu'on demande :

Quel est le degré du lieu des points de rencontre des tangentes à une courbe U *de la classe* n, *issues des points correspondants de deux divisions homographiques, données respectivement sur deux droites* L, L'?

Pour abréger le discours, nous appellerons *tangentes correspondantes* les tangentes ainsi déterminées.

On va chercher en combien de points ce lieu rencontre une droite quelconque M. Pour cela, il est nécessaire de rappeler le lemme suivant.

Lemme. Si l'on joint un point fixe P à tous les points a', b', etc., de la droite L', par des droites qui rencontrent la droite M en des points α, β, etc., les droites αa, βb, etc., qui joignent les points α, β, etc., aux points a, b, etc., de L, homologues de a', b', etc., enveloppent une conique (*Géom.*, *sup.*, n° 555).

Actuellement, supposons qu'on fasse rouler une tangente sur la courbe donnée U. Dans chacune de ses positions, cette tangente passe par un certain point a de L, et coupe M en un point α. Si l'on joint le point α au point a', homologue de a, je dis que la droite $\alpha a'$ enveloppe une courbe U' de la *classe* $2n$, c'est-à-dire une courbe à laquelle on peut mener généralement $2n$ tangentes par un point quelconque P. Et en effet, ce nombre est évidemment le même que celui des tangentes communes à la conique, dont il est question dans le lemme précédent, et à la courbe donnée U, c'est-à-dire qu'il est $2n$.

Si le côté $\alpha a'$ de l'angle variable $a\alpha a'$ touchait aussi la courbe U, le point α serait l'un x des points de M qui appartiennent au lieu cherché. Donc il existe sur M autant de ces points x que les deux courbes U et U' ont de tangentes communes, c'est-à-dire $2n \,.\, n = 2n^2$. Tel est donc enfin le degré de la courbe qu'il s'agissait de trouver.

Mais j'ajoute que parmi les diverses branches de ce lieu géométrique il y a $2n$ droites, de sorte que, si l'on fait abstraction de ces droites, la courbe n'est plus que du degré $2n(n-1)$.

En effet, les droites aa' qui joignent les points correspondants de L et L' enveloppent une conique Σ, qui a $2n$ tangentes communes avec la courbe U. Chacune de ces tangentes est une droite, suivant laquelle coïncident deux des tangentes *correspondantes* de la courbe U. Donc tous ces points satisfont à l'énoncé de la question, et par conséquent ils appartiennent au lieu cherché. C. Q. F. D.

Si les deux droites L, L' coïncident en une seule L, les résultats précédents subsistent, et les $2n$ droites qui font partie du lieu, sont les $2n$ tangentes à la courbe U issues des deux *points doubles* (réels ou imaginaires) des deux divisions homographiques tracées sur L. On voit en outre que chacun de ces deux points est, sur la courbe proprement dite du degré $2n(n-1)$, multiple de l'ordre

$n(n-1)$; car chacune des n tangentes à la courbe U, qu'on peut mener par ce point, étant considérée comme appartenant à la première série de tangentes, est coupée, en ce point même, par les $(n-1)$ autres, considérées comme appartenant à la seconde série.

Si la droite L est à l'infini et que les deux divisions homographiques soient celles que marquent sur cette droite les deux côtés d'un angle constant (voir *Géom. sup.*, n° 652, p. 462), le théorème subsiste; mais comme les points doubles de ces divisions sont alors imaginaires, les $2n$ droites le sont aussi et l'on a ce théorème :

La courbe, lieu du sommet d'un angle de grandeur constante, circonscrit à une courbe de la classe N, *est du degré* $2n(n-1)$.

Ce qui précède montre bien comment le degré $2n^2$ a dû se présenter dans l'analyse de M. Dewulf ou dans les raisonnements de M. Steiner. C'est au fond le degré de la question, et ce degré ne s'abaisse que par l'exclusion, fort naturelle d'ailleurs, de certaines droites qui précisément sont toujours imaginaires dans ce cas particulier.

Si la droite située à l'infini est tangente de la courbe U, qui est alors du genre parabolique, chacun des points de cette droite appartient $2(n-1)$ fois au lieu cherché. Car la droite de l'infini ayant une direction indéterminée peut être regardée comme rencontrant sous l'angle donné, et aussi sous le supplément de cet angle, chacune des $(n-1)$ autres tangentes parallèles entre elles qu'on peut encore mener de ce point à la courbe, en outre de la droite de l'infini qui fait la $n^{ième}$ tangente issue de ce point. Le degré apparent du lieu cherché n'est donc plus égal qu'à $2(n^2-2n+1)=2(n-1)^2$, si l'on fait abstraction de cette droite multiple.

Actuellement, si l'angle donné s'approche successivement d'être égal à 90 degrés, les points de la courbe se rapprochent l'un de l'autre deux à deux. Quand il diffère très-peu de cette valeur, la courbe se compose de deux branches très-voisines l'une de l'autre, qui se confondent enfin en une seule au moment où l'angle devient droit. La courbe est alors la superposition de deux courbes de l'ordre $n(n-1)$, ce qui a fait dire à M. Salmon que son degré dans ce cas est $n(n-1)$, puisqu'en effet il n'apparaît qu'une telle courbe.

Ceci se voit, par exemple, très-clairement si la courbe proposée U est une conique. Dans ce cas on obtient immédiatement, sur chacune des tangentes de la conique, les quatre points du lieu cherché en lui menant les quatre tangentes parallèles deux à deux sous l'angle donné et sous son supplément (*). Or il est visible qu'à mesure que l'angle s'approche de 90°, les pieds de ces quatre tangentes se rapprochent deux à deux et se confondent enfin quand l'angle devient droit. On sait que le lieu est alors devenu un cercle. Mais comme la courbe du quatrième ordre n'a pu que se transformer par cette circonstance particulière, et non pas abdiquer pour un degré inférieur, ce cercle est *double*, ainsi que M. Terquem en avait fait la remarque expresse et que M. Steiner l'avait suffisamment fait pressentir (**), et les réflexions qui précèdent ne permettent plus, ce me semble, le moindre doute à ce sujet.

Bien qu'il puisse paraître superflu de chercher dans des cas très-particuliers la vérification d'un théorème établi par des raisonnements rigoureux, néanmoins j'examine-

---

(*) Cette double direction est conforme à l'énoncé du problème qui ne précise pas et qui ne peut préciser si ce sont les côtés mêmes de l'angle ou leurs prolongements qui doivent toucher la courbe donnée.

(**) *Voir* le Mémoire de M. Steiner sur les courbes algébriques, traduit ans le *Journal de Mathématiques*, t. XX, p. 48.

rai le cas simple où la courbe de la classe n se réduit à n ovales infiniment petits, disons à n points a, b, c....

Ces points donnent lieu à $\frac{1}{2}n(n-1)$ segments terminés ab, ac, bc,..., dont chacun peut être regardé comme une ellipse infiniment aplatie. Pour chacun de ces segments, le lieu du sommet de l'angle constant circonscrit se compose des deux cercles décrits sur lui comme corde, et capables de cet angle et de son supplément (cercles qui se réduisent à un seul cercle double si l'angle devient droit). Donc le lieu se compose en totalité de $n(n-1)$ cercles, c'est-à-dire qu'il est du $2n(n-1)^{ième}$ degré.

Prenons encore un système composé d'une courbe de la classe n' et de $(n-n')$ points, système qui représente une courbe de la classe n. On trouvera encore aisément pour le degré du lieu le nombre $2n(n-1)$, si l'on se rappelle que la courbe, lieu des pieds des obliques abaissées dans un même sens de rotation sur les tangentes d'une conique, est une courbe du quatrième ordre, du genre des *lemniscates* (Chasles, *Comptes rendus*, t. XXXVII, séance du 19 septembre 1853).

Par exemple, si l'on a une conique et deux points, auquel cas $n=4$, on a : 1° une courbe du quatrième ordre comme lieu du sommet de l'angle circonscrit à la conique ; 2° deux cercles, relatifs aux deux points ; 3° deux lemniscates, relatives à la conique et à l'un des points (à cause qu'il faut considérer ici l'angle et son supplément) ; 4° enfin, deux lemniscates relatives à la conique et à l'autre point ; donc le lieu est en totalité du degré

$$4+4+8+8=2.4(4-1)=24.$$

SUR LE PROBLÈME D'OPTIQUE (p. 44) ET DEUX THÉORÈMES SUR DES TRIANGLES ET DES CONIQUES COMBINÉS;

PAR M. LE CAPITAINE FAURE

Il s'agit de trouver le lieu d'un point d'où l'on voit deux segments donnés sous le même angle.

Cette question a déjà été traitée par MM. Salmon et Chasles. Le lieu du point est une courbe du troisième ordre (*Comptes rendus*, t. XXXVII, séances des 5 et 19 septembre 1853).

Proposons-nous ce problème plus général : Étant donnés sur un plan m segments, trouver le lieu d'un point d'où l'on voit ces segments sous des angles tels, que leurs tangentes aient entre elles une *relation* quelconque.

Soient a la longueur de l'un des segments AB, φ l'angle formé par les droites qui joignent ses extrémités à un point P. Si l'on désigne par ρ et ρ' les longueurs de ces deux lignes,

$$a^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\varphi,$$

d'où l'on déduit aisément

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2a.\alpha}{\overline{pi}^2 - \frac{a^2}{4}},$$

le point i étant le milieu du segment, α la distance de ce segment au point P; $2a\alpha$ est le double de l'aire du triangle PAB.

Traçons dans le plan de la figure deux axes rectangulaires et soit

$$A = 0$$

l'équation du cercle décrit sur le segment a comme diamètre, $\alpha = 0$ sera l'équation de ce segment (*).

On aura

$$\tang \varphi = 2a \frac{\alpha}{A}.$$

Les autres segments donneront des relations analogues; ainsi pour le segment b on aurait

$$\tang \varphi' = 2b \frac{\beta}{B}, \ \ldots$$

Substituant ces valeurs dans la relation donnée de l'ordre n, on obtient le lieu du point P.

Cherchons comme cas particulier le lieu d'un point d'où l'on voit trois segments donnés sous des angles dont la somme soit un multiple de π.

La relation entre les tangentes des trois angles sera

$$\tang \varphi + \tang \varphi' + \tang \varphi'' = \tang \varphi \tang \varphi' \tang \varphi''$$

et par conséquent le lieu cherché

$$a\frac{\alpha}{A} + b\frac{\beta}{B} + c\frac{\gamma}{C} = abc . \frac{\alpha . \beta . \gamma}{A . B . C}$$

est une courbe du cinquième ordre, qui passe par les extrémités des segments et qui a deux points doubles à l'infini sur un cercle.

(*) Soient x, y les coordonnées de P, $x' y'$ les coordonnées du point i, et soit

$$mx + ny - p = 0$$

l'équation de AB; alors

$$\alpha = k(mx + ny - p),$$

k constante connue; le dénominateur de $\tang \varphi$ est égal à

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 - \frac{a^2}{4},$$

équation du cercle A, lorsqu'on égale cette expression à zéro. Tm.

Généralement le lieu d'un point d'où l'on voit m segments sous des angles dont la somme est un multiple de π est une courbe de l'ordre $2m - 1$, qui a les points à l'infini sur un cercle pour points multiples de l'ordre $m - 1$, et qui passe par les extrémités des segments.

De là on peut conclure qu'étant donné un polygone de $2m$ côtés, il existe

$$4m(m-2)+3$$

points d'où l'on voit les côtés de rang pair et les côtés de rang impair sous des angles dont la somme soit la même (*).

Il serait facile de généraliser davantage notre énoncé primitif en substituant des coniques aux segments. Soient en effet

$$A = 0$$

l'équation d'une de ces coniques,

$$A' = 0$$

l'équation du cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à cette conique. Si l'on remplace dans ces équations les coordonnées variables par celle d'un point d'où l'on voit la conique sous un angle φ, on a

$$\overline{\operatorname{tang}}^2 \varphi = a \frac{A}{A'^2},$$

(*Nouvelles Annales*, t. II, p. 112)

a étant un coefficient numérique connu.

Par exemple, le lieu du point d'où l'on voit les coniques A et B sous un même angle est

$$aAB'^2 - bBA'^2 = 0,$$

(*) Pour m segments vus sous des angles dont la somme est constante, le lieu est de l'ordre $2m$ et passe par les extrémités des segments.

(FAURE.)

courbe du sixième degré qui a pour points doubles les points à l'infini sur un cercle, elle touche de plus chaque conique aux points imaginaires où elle est coupée par le cercle qui lui correspond, etc (*).

THÉORÈME. *Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, quatre fois le produit des carrés de ses demi-axes principaux pris en signe contraire est égal au diamètre du cercle circonscrit au triangle, multiplié par le produit des distances de son foyer* F *aux côtés du triangle, puis par le produit des carrés des distances de ce foyer aux sommets du triangle et divisé par la sixième puissance de la tangente menée de ce foyer au cercle circonscrit au triangle.*

Ce théorème donne tout de suite le lieu du foyer des coniques de même aire inscrite dans un triangle : c'est une courbe du neuvième degré.

THÉORÈME. *Étant donnés une conique et un triangle conjugué à cette conique, quatre fois le produit des carrés de ses demi-axes principaux est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle, multiplié par le produit des distances de son foyer* F *aux côtés de ce triangle, puis par le produit des carrés des tangentes menées de ce foyer aux cercles décrits sur les côtés du triangle comme diamètre et divisé par la sixième puissance de la tangente menée du même foyer au cercle des neuf points relatifs au triangle.*

(*) La même question pour des surfaces du second degré mène à des aires de coniques sphériques, à des intégrales elliptiques; belle question *sérieusement* académique. Même une solution *partielle* pourrait être couronnée comme naguère le théorème Fermat. La connexion avec le problème des éclipses est évidente.

QUESTIONS.

592. Soit un cylindre circonscrit à une surface de *révolution ;* de chaque point de la ligne de contact on abaisse des perpendiculaires sur l'axe ; on obtient une surface gauche ; circonscrivons à cette surface un second cylindre ; coupant les deux cylindres par un plan, la section du second cylindre est la développée de la section du premier cylindre. (MAXIME DUNESME [*].)

593. Un cylindre étant circonscrit à une surface de révolution engendrée par une sinussoïde, la courbe de contact est une hélice dont la projection sur un méridien est aussi une sinussoïde semblable à la courbe méridienne ; le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$; la section du cylindre par un plan est une cycloïde ; opérant comme dans la question précédente, la courbe de contact sur la surface gauche est encore une hélice égale à la première hélice.

(MAXIME DUNESME.)

594. P étant le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC, les trois triangles PAB, BPC, PCA sont chacun touchés par quatre cercles ; le cercle des *neuf points* touche ces douze cercles.

(Sir W. HAMILTON.)

(*) Chef des travaux graphiques à l'Ecole Normale.

FORMULE BAROMÉTRIQUE SIMPLIFIÉE POUR DE PETITES HAUTEURS ;

D'APRÈS M. BABINET.

(*Comptes rendus*, séance du 11 février 1861, p. 221.)

Notations.

B, hauteur du baromètre réduite à zéro à la station inférieure.

T, température de l'air réduite à zéro à la station inférieure.

b et t, quantités analogues à la station supérieure.

h = hauteur cherchée.

On *suppose* que les puissances de la fraction $\frac{B-b}{B+b}$ supérieures à la première puissance sont négligeables.

$$M = \text{module} = 0,43429448.$$

On a

$$h = 18393^m \log \frac{B}{b}\left(1 + 2\,\frac{T+t}{1000}\right)$$

(LAPLACE.)

$$\frac{B}{b} = \frac{1+\dfrac{B-b}{B+b}}{1-\dfrac{B-b}{B+b}}; \quad \log\frac{B}{b} = 2M\,\frac{B-b}{B+b},$$

d'après la supposition ci-dessus.

$$2M.18393 = 15976;$$

on peut, sans erreur sensible, remplacer 15976 par

16000 ; d'où

$$h = 16000^m \frac{B - b}{B + b} \left(1 + 2 \frac{T + t}{1000}\right).$$

Ceci a quelque analogie avec les logarithmes de Léonelli, dits de Gauss.

Note du Rédacteur. Dans les *Astr. Nachr.*, t. XLIV, n° 1056, p. 369 de l'année 1856, on trouve les Tables de M. Dippe, très-commodes pour le calcul barométrique, d'après la formule générale de Laplace (*).

TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES

(voir p. 68);

PAR M. MANNHEIM (**).

J'appelle *pôle principal* un point par rapport auquel une figure est à elle-même sa transformée.

Propriétés relatives aux courbes planes.

Lorsque des cercles ont même centre radical, il en est de même de leurs transformées par rapport à un point quelconque de leur plan pris pour pôle de transformation.

Lorsqu'une courbe admet un pôle principal, il en est de même de sa transformée obtenue par rapport à un pôle quelconque pris dans son plan.

Lorsqu'une courbe a un axe, sa transformée, par rap-

(*) Martin-Christian Dippe, professeur au gymnase de Schwerin, né à Quedlimbourg, le 11 décembre 1813.

(**) Cette Note a été présentée à la Société Philomathique dans la séance du 15 décembre 1860. (*Voir* journal *l'Institut*, 19 décembre 1860.)

port à un pôle quelconque, a pour pôle principal le centre de la circonférence transformée de l'axe.

Une courbe ayant un axe peut être considérée comme ayant un pôle principal à l'infini.

Lorsqu'une courbe a un pôle principal, on peut la transformer d'une infinité de manières en une courbe ayant un axe; le lieu des pôles de transformation est une circonférence ayant son centre au pôle principal.

Propriétés relatives aux surfaces.

Lorsque des sphères ont même centre radical, il en est de même de leurs transformées par rapport à un pôle quelconque.

Lorsqu'une surface a un pôle principal, il en est de même de sa transformée par rapport à un pôle quelconque.

Lorsqu'une surface a un plan principal, sa transformée a pour pôle principal le centre de la sphère transformée de ce plan.

Une surface qui a un plan principal peut être considérée comme ayant un pôle principal à l'infini.

Lorsqu'une surface a un pôle principal, on peut la transformer d'une infinité de manières en une surface ayant un plan principal. Tous les pôles de transformation satisfaisant à cette condition sont sur une sphère.

Lorsqu'une surface est de révolution, sa transformée a un plan principal et admet une infinité de pôles principaux situés en ligne droite.

Réciproquement, lorsqu'une surface a une infinité de pôles principaux en ligne droite, on peut la transformer d'une infinité de manières en surface de révolution; les pôles de transformation satisfaisant à cette condition sont sur une circonférence située dans le plan principal que possède nécessairement la surface.

APPLICATION
de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude des anticaustiques (*);

PAR M. MANNHEIM.

Lorsque des rayons émanés d'un point sont réfléchis par une courbe, ils enveloppent après cette réflexion une *caustique par réflexion*. Jacques Bernoulli a désigné sous le nom d'*anticaustique* une certaine trajectoire orthogonale de ces rayons réfléchis. J'adopte cette expression d'anticaustique en l'étendant au cas de la réfraction. Les anticaustiques ne sont autres que *les caustiques secondaires* de M. Quételet.

Lorsque l'on considère les anticaustiques comme enveloppe de cercles dont les centres décrivent la ligne dirimante et dont les rayons sont proportionnels aux distances de leurs centres au point lumineux, elles se composent de deux parties qui correspondent à des indices de réfraction égaux et de signe contraire.

Ces deux parties peuvent être des courbes distinctes ou constituer une même courbe. Je m'occupe particulièrement de l'une ou de l'autre de ces parties en indiquant le signe de l'indice de réfraction; quant à l'enveloppe complète des cercles, je la désigne sous le nom d'*anticaustique complète*.

1. *Une courbe* M *et son anticaustique* N, *correspondant à un point lumineux* F, *et à un indice* I, *ont pour*

(*) Cette Note a été présentée à la Société Philomathique dans la séance du 22 décembre 1860. (*Voir* journal *l'Institut*, 27 décembre 1860.)

transformées, le pôle étant en F, *une courbe* N′ *et son anticaustique* M′, *le point lumineux et l'indice restant les mêmes.*

La ligne dirimante devient anticaustique et inversement; réciprocité remarquable.

2. *L'anticaustique* N *d'une courbe* M, *pour un point lumineux* F *et un indice* l, *a pour anticaustique, pour le même point lumineux et l'indice* — l, *une courbe semblable à* M. *Le point* F *est le centre de similitude et le rapport de similitude est* $\frac{l^2-1}{l^2}$ (*).

Si l'on considère l'anticaustique complète de M, elle se compose de deux branches, chacune de ces branches a une anticaustique complète; ces deux anticaustiques complètes ont une partie commune qui est la courbe semblable à M. D'après cela, on voit que l'anticaustique complète d'une anticaustique se compose toujours de deux courbes distinctes.

Comme cas particulier du théorème (2) on peut déduire le théorème connu de M. Quetelet: *La caustique secondaire du cercle est un ovale de Descartes.* En effet, l'ovale de Descartes a pour anticaustique un cercle, donc l'anticaustique du cercle est un ovale de Descartes.

3. *Lorsque le point lumineux est pôle principal de la ligne dirimante, il est aussi pôle principal de l'anticaustique complète de cette courbe, la puissance de transformation étant différente.*

Un point quelconque du plan d'un cercle est un pôle principal; d'après le théorème 3, il est aussi pôle prin-

(*) M. Bour est arrivé de son côté, par une autre méthode, au même théorème.

cipal de l'anticaustique complète du cercle correspondant à ce point, c'est-à-dire d'un ovale de Descartes.

Il existe pour les surfaces des théorèmes complétement analogues.

THÉORÈME SUR LE TÉTRAÈDRE

(voir p. 63);

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Le théorème démontré par M. Le Besgue (p. 63) est un cas particulier du suivant que j'emploie habituellement dans la géométrie algorithmique pour mesurer la distance d'un point à un plan (*).

THÉORÈME. *Si l'on désigne par* a, b, c, d *les aires des faces d'un tétraèdre* ABCD; *par* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, *les distances de ses sommets à un plan* P; *par* α, β, γ, δ *les distances d'un point* M *aux faces du tétraèdre, la distance* μ *du point* M *au plan* P *est donnée par la relation*

$$\mu = \frac{1}{3V}(a\alpha_1\alpha + b\beta_1\beta + c\gamma_1\gamma + d\delta_1\delta)$$

dans laquelle V *indique le volume du tétraèdre* ABCD.

Lorsque le point M est le centre de la sphère inscrite au tétraèdre, on a le théorème démontré par M. Le Besgue.

La vérification de notre formule est facile. Prenant le tétraèdre ABCD pour tétraèdre de *référence*, l'équation du plan P peut s'écrire sous la forme

$$a\alpha_1\alpha + b\beta_1\beta + c\gamma_1\gamma + d\delta_1\delta = 0;$$

(*) Le théorème est de M. Joseph Harcourt et non de M. Le Besgue (t. XIX, p. 439).

il est déterminé par ses distances aux sommets du tétraèdre. Il résulte de là que la distance d'un point M$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ à ce plan s'exprimera par la fonction qui forme le premier membre de l'équation précédente, divisée par une certaine quantité Q indépendante de la position du point M. Si pour déterminer Q nous donnons au point M une position particulière, s'il coïncide, par exemple, avec le sommet A du tétraèdre pour lequel

$$\alpha = \frac{3V}{a}, \quad \beta = \gamma = \delta = 0, \quad \mu = \alpha_1,$$

on trouvera

$$Q = 3V;$$

donc, etc.

Si l'on cherche la valeur de Q en fonction des distances $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, on trouve

$$\begin{aligned} Q^2 = (3V)^2 = a^2\alpha_1^2 + b^2\beta_1^2 + c^2\gamma_1^2 + d\delta_1^2 \\ - 2\sum ab\,\alpha_1\beta_1 \cos(a, b), \end{aligned}$$

en indiquant par (a, b) l'angle des faces du tétraèdre opposées aux sommets A et B, le signe $\sum$ s'étendant aux six produits analogues à celui qui est écrit.

La relation ci-dessus est celle qui existe toujours entre les distances des sommets d'un tétraèdre à un plan.

Remarque. Dans la géométrie algorithmique, on trouve de grands avantages à se donner un plan ou une droite comme nous venons de le faire. Toutes les formules fondamentales deviennent alors d'une très-grande simplicité. Bornons-nous à considérer pour le moment ce qui a lieu dans la géométrie plane.

Nous prenons le triangle ABC dont les longueurs des côtés sont a, b, c, pour triangle de référence; une droite dont les distances aux sommets ABC sont $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ aura pour équation

$$a\alpha_1\alpha + b\beta_1\beta + c\gamma_1\gamma = 0,$$

α, β, γ étant les distances d'un de ses points aux côtés du triangle de référence. Appelons cette droite la droite 1; remplaçant l'indice 1 par 2, on aura le droite 2, etc.

Posons

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = P, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = P_3,$$

et

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = P_1, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = P_2.$$

S étant l'aire du triangle de référence, S' celle du triangle formé par les droites 1, 2, 3 on a

$$S' = S\frac{P_2}{P_1 P_2 P_3}, \quad \sin(1, 2) = \frac{P_3}{2S}.$$

Soit δ la distance de deux points pris sur la droite 1 déterminés par les intersections des droites 2 et 3 avec 1, on a

$$\delta = 2S\frac{P}{P_2 P_3},$$

parce que la distance du point d'intersection des droites 2 et 3 à la droite 1 est donnée par la relation

$$h = 2S\frac{P}{P_1}.$$

Soient R' le rayon du cercle circonscrit au triangle 1, 2, 3,

r' le rayon du cercle inscrit :

$$R' = 2S^2 \frac{P}{P_1 P_2 P_3}, \quad r' = \frac{P}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

La géométrie de l'espace offre des résultats semblables, sur lesquels je pourrai revenir dans une autre occasion.

Note de Rédacteur. Il faut se rappeler que, dans la géométrie algorithmique, un point est donné *dans un plan* par ses *trois distances* aux côtés d'un triangle *fixe* dit de *référence*, et *dans l'espace* par *quatre distances* aux quatre faces d'un tétraèdre *fixe* dit de *référence*.

ÉQUATION ET PROPRIÉTÉ DE LA LOXODROMIE (FIN)

(voir p. 31);

Par M. VANNSON.

Projection de la loxodromie sur le plan de l'équateur.

Proposons-nous d'abord de résoudre la question pour une courbe quelconque dont l'équation serait

$$\varphi(xy) = 0,$$

y étant la distance polaire d'un de ses points. Nous prendrons pour axe polaire le diamètre OB passant au zéro des longitudes. Soit M la projection d'un point P de la courbe, posons

$$MO = \rho, \quad BOM = \omega,$$

nous aurons

$$x = \omega \quad \text{et} \quad \sin y = \rho \quad \text{ou} \quad y = \arcsin \rho\,;$$

l'équation de la projection sera donc

$$\varphi(\omega, \text{arc} \sin\rho) = 0.$$

Si on voulait rapporter la courbe à des coordonnées rectangles, on aurait

$$X = \sin y \cos x \quad \text{et} \quad Y = \sin y \sin x ;$$

en éliminant x et y entre ces équations et celle de la courbe, on aura celle de la projection ; appliquant ces formules à l'équation de la loxodromie

$$\text{tang}\,\frac{y}{2} = a^x,$$

on tire d'abord de cette équation :

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{a^x + a^{-x}}{2}.$$

L'équation de la projection sera donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a^{\omega} + a^{-\omega}}{2}.$$

a représentant e^{-m} est moindre que l'unité. La courbe demandée est donc une spirale logarithmique.

Problème. *Étant donnée l'équation d'une courbe sphérique quelconque, si on imagine un cône ayant pour base cette courbe, et pour sommet le centre de la sphère, ce cône coupera le cylindre droit ayant pour base l'équateur suivant une autre courbe ; on demande son équation après qu'on a développé le cylindre.*

Soient m un point de la courbe, x sa longitude, $AD = y$ sa distance polaire, nous aurons CD ou l'ordonnée du point m après le développement du cylindre

(A) $$Y = \cot y ;$$

x reste le même. Si donc entre l'équation de la courbe et l'équation (A) on élimine y, on aura l'équation demandée. Appliquant à la loxodromie, on trouve

$$\mathrm{Y} = \frac{a^{-x} - a^{x}}{2} \quad \text{ou} \quad \mathrm{Y} = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2}.$$

Si on applique à la développée, on trouve

$$\mathrm{Y} = \mathrm{C}\left(\frac{a^{x} + a^{-x}}{2}\right).$$

C'est l'équation d'une chaînette dont les ordonnées sont multipliées par un même facteur (*).

Rectification de la développée de la loxodromie.

On démontrera comme sur un plan, par des considérations d'infiniment petits, que si on passe d'un point A d'une courbe au point infiniment voisin, la différence des rayons de courbure en ces deux points est égale à l'arc correspondant de la développée. Or nous avons trouvé pour le rayon de courbure de la loxodromie la formule

$$\operatorname{tang} \mathrm{R} = \frac{\operatorname{tang} y}{\sin \varphi},$$

ce qui donne entre $d\mathrm{R}$ et dy l'équation

$$\frac{d\mathrm{R}}{\cos^2 \mathrm{R}} = \frac{dy}{\cos^2 y \sin \varphi} \quad \text{ou} \quad d\mathrm{R} = \frac{dy \cos^2 \mathrm{R}}{\cos^2 y \sin \varphi};$$

éliminant $\cos^2 \mathrm{R}$, il vient

$$(1) \qquad d\mathrm{R} = \frac{dy \sin \varphi}{\cos^2 y\,(\sin^2 \varphi + \operatorname{tang}^2 y)}.$$

(*) GUDERMANN, *Relations remarquables entre la ligne loxodromique et la caténaire sphérique* (*Crelle*, t. XI, p. 394; 1830). Dans son ouvrage sur l'analyse sphérique (1830), il considère simultanément la cycloïde et la caténaire sphériques (p. 42) et aussi les coordonnées trilitères (p. 153).

Mais en appelant y_1 la distance polaire du point de la développée correspondant à celui que nous considérons sur la loxodromie, on a trouvé

(2) $$\sin y = \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} y_1,$$

d'où

$$dy \cos y = \frac{\operatorname{tang}\varphi \, dy_1}{\cos^2 y_1}.$$

Remplaçant dans l'équation (1) dy par cette valeur, on a

$$dR = \frac{dy' \sin\varphi \operatorname{tang}\varphi}{\cos^2 y' \cos y \,(\sin^2\varphi \cos^2 y + \sin^2 y)}.$$

Éliminant y au moyen de l'équation (2), on trouve enfin

$$dR = \frac{dy \cos y'}{\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2 y_1}}.$$

Si on appelle S l'arc de la développée commençant quand la loxodromie coupe l'équateur, on aura

$$dS = -dR;$$

nous mettons *moins*, parce que R diminue quand S augmente. On aura donc

$$\frac{dS}{dy} = -\frac{\left(\frac{\cos y'}{\cos\varphi}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin y'}{\cos\varphi}\right)^2}},$$

d'où, remontant de ces dérivées égales aux fonctions primitives,

$$S = \operatorname{arc} \cos \frac{\sin y'}{\cos\varphi},$$

ou, prenant les cosinus de part et d'autre,

$$\cos S = \frac{\sin y'}{\cos \varphi}.$$

Enfin si on nomme λ la latitude du point, on aura

$$\cos S = \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi}.$$

Soit A le point de la développée à partir duquel je mesure l'arc S, AB sera égal à φ. Soient C un autre point de la courbe, CI sa latitude; si de A comme pôle avec CI pour distance polaire on décrit un cercle coupant l'équateur en D, BD représentera l'arc de la développée de A à C. Si $\lambda = \frac{\pi}{2}$, on trouve $S = \frac{\pi}{2}$, c'est la longueur totale de la développée du point A jusqu'au point asymptote. Le même calcul donne pour la longueur totale de la loxodromie $\frac{\pi}{2\cos\varphi}$, quantité d'autant plus grande que φ est plus grand, tandis que pour la développée sa longueur totale reste la même, quel que soit φ.

Rayon de courbure de la développée.

Nous emploierons la formule déjà obtenue

$$\operatorname{tang} R = \frac{(p^2 + \cos^2 y)^{\frac{3}{2}}}{\sin y\,(2p^2 + \cos^2 y) + q \cos y}$$

ou plus simplement

$$\operatorname{tang} R = \frac{S_1^3}{\sin y\,(p^2 + S_1^2) + q \cos y}.$$

Or, on a trouvé dans le problème précédent

$$dS = -\frac{dy \sin y}{\sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 y}},$$

y désignant la latitude, d'où

$$S' = -\frac{p \sin y}{\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 y}}:$$

l'équation de la développée par un déplacement de l'origine donne

$$\operatorname{tang} y = \frac{a^x + a^{-x}}{2m}, \qquad a = e^{-m};$$

d'où

$$p \text{ ou } \frac{dy}{dx} = -\frac{a^x - a^{-x}}{2}\cos^2 y;$$

or

$$(a^x - a^{-x})^2 = (a^x + a^{-x})^2 - 4 = 4(m^2 \operatorname{tang}^2 y - 1)$$
$$= 4m^2(\operatorname{tang}^2 y - \operatorname{tang}^2\varphi) = \frac{4(\cos^2\varphi - \cos^2 y)}{\cos^2 y \sin^2\varphi},$$

d'où

$$a^x - a^{-x} = -\frac{2\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 y}}{\cos y \sin\varphi}.$$

Nous choisissons *moins* parce que a^x est $< a^{-x}$, a étant moindre que l'unité. Remplaçant $a^x - a^{-x}$ par son expression dans $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$p = \frac{\cos y\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 y}}{\sin\varphi},$$

d'où

$$q \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\sin y(\cos^2\varphi - 2\cos^2 y)}{\sin\varphi\sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2 y)}}p;$$

portant ces valeurs de S' et de q dans $\operatorname{tang} R$, on obtient, toutes réductions faites,

$$\operatorname{tang} R = \frac{\sin^2 y \cos y}{\sin q}.$$

Si on prend la dérivée du numérateur, on trouve

$$\sin y\,(2 - 3\sin^2 y),$$

quantité positive tant qu'on a

$$\sin y < \sqrt{\frac{2}{3}},$$

et alors le rayon de courbure augmente; il atteint son maximum quand

$$\sin y = \sqrt{\frac{2}{3}}:$$

au delà, il va en décroissant jusqu'à o.

Pour trouver l'angle d'une courbe avec le méridien du point de contact, on a trouvé

$$\tang \varphi' = \frac{\cos y}{p} \quad \text{ou} \quad \sin \varphi' = \frac{\cos y}{\sqrt{p^2 + \cos^2 y}}.$$

Remplaçant p par sa valeur, on aura pour la courbe qui nous occupe

$$\sin \varphi' = \frac{\sin \varphi}{\sin y}.$$

La longueur de la normale N, depuis la courbe jusqu'à l'équateur, se déduit d'un triangle rectangle, et on trouve

$$\tang N = \frac{\tang y}{\sin \varphi_1} = \frac{\tang y \sin y}{\sin \varphi}.$$

Si on multiplie ce résultat par tang R, on trouve

$$\tang N \tang R = \frac{\sin^4 y}{\sin^2 \varphi}$$

ou

$$\tang N \,.\, \tang R = \left(\frac{\sin^2 y}{\sin \varphi}\right)^2.$$

(Ces formules sur la développée de la loxodromie se trouvent sans démonstration dans le numéro des *Annales* déjà cité. Elles sont extraites d'un ouvrage de M. d'Arrest.)

Perspective de la loxodromie sur le plan de l'équation, l'œil étant placé au pôle opposé (Halley).

Résolvons d'abord la question pour une courbe quelconque tracée sur la sphère. Soit

$$\varphi(x, \mathrm{Y}) = 0$$

l'équation de cette courbe, Y étant la distance polaire d'un de ses points C, dont c est la perspective sur l'équateur, on a

$$\mathrm{OC} \quad \text{ou} \quad \rho = \operatorname{tang} \frac{\mathrm{PC}}{2} = \operatorname{tang} \frac{\mathrm{Y}}{2} \quad \text{et} \quad \omega = x:$$

si entre ces deux équations et celle de la courbe on élimine x et Y, on aura l'équation de la perspective en coordonnées polaires. Si on applique à notre courbe dont l'équation est

$$\operatorname{tang} \frac{\mathrm{Y}}{2} = a^x,$$

on aura

$$\rho = a^\omega.$$

La perspective demandée est donc une spirale logarithmique dont le centre O est le point asymptote.

Note du Rédacteur. M. Grunert a publié en 1849 une *Loxodromische trigonometrie*, dont mon fils, professeur d'hydrographie à Dunkerque, a donné une traduction française en 1859. Le cas général est traité dans le Mémoire : Boymann, *De lineis loxodromicis in datis* *superficiebus*. In-4; Berlin, 1839. Et du même : Équation des lignes loxodromiques sur les surfaces du second ordre (*Archiv. de Grunert*, t. VII, 1846); Équation de la ligne loxodromique sur une surface engendrée par la révolution d'une parabole autour de la tangente au sommet (*Ibid.*, t. XIII, 1849). Boymann (Johann-Robert), professeur au gymnase de Coblentz, né à Neuss, près Dusseldorf, le 17 janvier 1815.

RÉPONSE A UNE LETTRE SUR CETTE QUESTION :

On donne le foyer F *et un point* M *d'une parabole; trouver le lieu géométrique du sommet.*

L'auteur de la lettre (*) demande quelques mots d'explication au sujet du résultat auquel conduit le calcul que voici :

« En prenant pour origine le point F, pour axe des abscisses la droite FM, et posant $FM = d$, l'équation d'une parabole dont F est le foyer, et qui passe par le point M, est

$$(1) \qquad y^2 + x^2 - (lx + my + n)^2 = 0,$$

en ayant égard aux conditions

$$(2) \qquad l^2 + m^2 = 1,$$

$$(3) \qquad d^2 - (ld + n)^2 = 0.$$

» L'axe de la parabole est représenté par

$$(4) \qquad mx - ly = 0.$$

(*) Je regrette, pour plus d'un motif, de ne pas être autorisé à faire connaître son nom.

On aura donc l'équation du lieu géométrique du sommet, en éliminant l, m, n entre les quatre relations précédentes.

» Or les équations (2) et (4) admettent la solution commune :

$$l = + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad m = + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

et si l'on remplace l, m par ces expressions fractionnaires dans l'équation (1) écrite sous cette forme :

$$\sqrt{x^2+y^2} = lx + my + n,$$

il en résulte

$$n = 0.$$

Alors, l'équation de la directrice

$$lx + my + n = 0$$

se réduit à

$$lx + my = 0,$$

et comme cette dernière équation est vérifiée par les coordonnées de l'origine, on arrive à cette conclusion que *la directrice passe par le foyer.* »

Je réponds que les équations (1), (2), (3) ne représentent plus une parabole quand $n = 0$. Car, dans ce cas, les équations (3) et (2) donnent

$$l^2 = 1 \quad \text{et} \quad m = 0,$$

et par suite l'équation (1) devient

$$y = 0.$$

C'est-à-dire que la parabole se réduit à la droite FM.

On peut encore observer que n représente la distance du foyer à la directrice, et par conséquent le demi-paramètre de la parabole. D'où il suit que $n = 0$ est précisément la condition pour que la parabole se réduise à son axe.

En prenant pour valeurs de l et de m les expressions $-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, et substituant dans

$$\sqrt{x^2+y^2} = lx + my + n,$$

il vient

$$n = 2\sqrt{x^2+y^2},$$

formule dont l'exactitude se vérifie immédiatement, puisqu'elle exprime que le demi-paramètre est le double de la distance du foyer au sommet

Pour obtenir l'équation cherchée, il ne reste plus qu'à remplacer dans l'équation (3) l et n par $\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $2\sqrt{x^2+y^2}$.

Il est à remarquer que le lieu géométrique des sommets des paraboles considérées est celui des milieux des perpendiculaires abaissées d'un point d'une circonférence sur les tangentes à la courbe, car ces paraboles ont pour directrices les tangentes à la circonférence décrite du point M comme centre avec MF pour rayon, et leurs sommets divisent en parties égales les perpendiculaires abaissées du foyer commun F sur les directrices. G.

NOTE

sur une forme de l'équation du second degré à deux variables propre à la résolution de diverses questions concernant les coniques tangentes à plusieurs droites données ;

PAR M. J. VIEILLE.

Le dernier numéro des *Annales* renferme (p. 119) une démonstration du théorème de Newton sur les coniques inscrites à un quadrilatère par M. Vannson. Cette démonstration, quoique simple, ne me paraît pas procéder assez directement des formules ordinaires de la géométrie analytique, parce qu'elle repose sur la considération d'un faisceau harmonique.

Ne serait-il pas utile de montrer aux élèves que le théorème dont il s'agit, ainsi que plusieurs autres propriétés des coniques tangentes à des droites données, peuvent se déduire aisément de l'équation

$$(1) \qquad (px + qy - 1)^2 + \lambda xy = 0.$$

Cette équation convient, comme on sait, à toute conique tangente à deux droites OA, OB, prises pour axes des coordonnées. La corde de contact AB a pour équation

$$px + qy - 1 = 0,$$

où les constantes p, q, désignent les inverses des distances OA, OB ; λ est une troisième constante arbitraire.

Si l'on veut que la conique soit de plus tangente à deux nouvelles droites dont les équations sont

$$\alpha x + \beta y = 1,$$
$$\alpha' x + \beta' y = 1;$$

on aura entre p, q et λ les deux relations

$$(2)\qquad \lambda + 4(p-\alpha)(q-\beta) = 0,$$

$$(3)\qquad \lambda + 4(p-\alpha')(q-\beta') = 0,$$

qui ne laissent plus subsister qu'une seule constante arbitraire.

Maintenant, soient x et y les coordonnées du centre C de la conique. Comme on sait que la droite OC, qui joint le centre au point de concours de deux tangentes, divise la corde de contact AB en deux parties égales, on aura

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{q}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}} = \frac{p}{q},$$

ou

$$(4)\qquad qy - px = 0.$$

Pour achever de définir le centre, il suffit d'associer à cette équation, celle qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée relative à x du premier membre de l'équation (1), soit

$$(5)\qquad \lambda y + 2p(px + qy - 1) = 0.$$

L'équation du lieu des centres résultera de l'élimination de p, q et λ entre les équations (2), (3), (4) et (5).

On retranche d'abord (3) de (2); λ disparaît ainsi que le terme en pq, et l'on a

$$(6)\qquad p(\beta'-\beta) + q(\alpha'-\alpha) + \alpha\beta - \alpha'\beta' = 0.$$

Puis, si l'on remplace dans (2) et (5), q par sa valeur $\frac{px}{y}$, et que l'on retranche l'une de l'autre les deux équations résultantes, λ disparaît encore avec le terme en p^2, et il vient

$$(7) \qquad p(2\alpha x + 2\beta y - 1) - 2\alpha\beta y = 0.$$

Il ne reste plus qu'à tirer p et q des équations (7) et (4), puis à reporter ces valeurs dans (6), et l'on a l'équation du lieu

$$2\beta\beta'(\alpha - \alpha')y + 2\alpha\alpha'(\beta - \beta')x + \alpha'\beta' - \alpha\beta = 0.$$

Elle représente une droite passant par les milieux des trois diagonales du quadrilatère circonscrit. C'est le théorème de Newton.

Corollaires.

I. — Le lieu des centres des coniques qui touchent trois droites données et l'une d'elles en un point donné A, se déduit du précédent, en regardant le triangle formé par les trois tangentes comme la limite d'un quadrilatère dont deux côtés contigus au sommet A sont amenés à faire entre eux un angle égal à deux droits. Alors on a ce théorème :

Le lieu des centres des coniques qui touchent trois droites données et l'une d'elles en un point donné A, est la droite qui passe par le milieu du côté du triangle formé par les trois tangentes sur lequel est situé le point A, et par le milieu de la ligne qui joint le point A au sommet opposé du triangle.

II. — Si l'on regarde la corde de contact AB de deux tangentes à une conique comme limite de la diagonale d'un quadrilatère circonscrit, dont deux angles ayant leurs sommets aux extrémités de cette diagonale sont devenus égaux à deux droits, en même temps que les deux autres sommets opposés sont venus se confondre en un seul, point de concours des deux tangentes considérées, on retrouve la proposition dont nous nous sommes servis plus haut, savoir que

Le lieu des centres des coniques qui touchent deux droites données en deux points donnés est la droite qui joint le point de concours des tangentes au milieu de la corde de contact. — Etc.

Proposons-nous maintenant de trouver le lieu des centres des coniques qui touchent trois droites données et passent par un point donné.

Une partie notable du calcul précédent subsiste, savoir :

Équation de la conique tangente aux deux axes des coordonnées,

$$(1) \qquad (px + qy - 1)^2 + \lambda xy = 0 ;$$

Condition de contact de la troisième droite, dont l'équation est $\alpha x + \beta y = 1$,

$$(2) \qquad \lambda + 4(p - \alpha)(q - \beta) = 0 ;$$

Équations du premier degré entre p et q,

$$(4) \qquad qy - px = 0,$$

$$(7) \qquad p(2\alpha x + 2\beta y - 1) - 2\alpha\beta y = 0,$$

dans lesquelles x et y désignent les coordonnées du centre.

Seulement, au lieu de l'équation (6) qui était également du premier degré entre p et q, on a l'équation

$$(8) \qquad (px' + qy' - 1)^2 + \lambda x'y' = 0,$$

dans laquelle x', y' désignent les cordonnées du point donné.

Si l'on remplace dans cette équation λ par la valeur tirée de (2), il vient

$$(9) \qquad (px' + qy' - 1)^2 - 4(p - \alpha)(q - \beta)x'y' = 0.$$

On tirera comme plus haut des équations (4) et (7) les valeurs de p et q, que l'on substituera dans (9) et l'on aura pour équation du lieu

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} [2\alpha\beta(x'y + y'x) - 2(\alpha x + \beta y) + 1]^2 \\ - 4\alpha\beta(1 - 2\alpha x)(1 - 2\beta y)x'y' = 0. \end{array} \right.$$

C'est l'équation d'une conique.

Le binôme caractéristique $B^2 - 4AC$ se réduit, abstraction faite d'un facteur positif, à

$$\alpha\beta x'y'(\alpha x' + \beta y' - 1);$$

il s'annule dans cinq cas, savoir :

pour $x' = 0$, ou $y' = 0$, ou $\alpha x' + \beta y' = 1$, ou $\alpha = 0$, ou $\beta = 0$,

c'est-à-dire quand le point donné, commun à toutes les coniques, coïncide avec l'un des trois points de contact; ou bien quand deux des trois tangentes sont parallèles entre elles.

Dans ces diverses hypothèses, le lieu des centres n'est plus une courbe, il se réduit à une seule droite (variété du genre parabole); et c'est ce que l'on pouvait prévoir, soit en vertu du corollaire du théorème de Newton, démontré plus haut, soit en vertu de cette propriété que le centre d'une conique est équidistant de deux tangentes parallèles.

Si nous écartons ces cas particuliers, la conique représentée par l'équation (10) appartiendra à l'un des genres ellipse ou hyperbole, selon que le produit

$$x'y'(\alpha x' + \beta y' - 1)$$

sera négatif ou positif (car on peut toujours supposer les constantes α et β positives). Il suit de là que si le point donné est dans l'intérieur du triangle formé par les tangentes, ou bien dans l'un des angles opposés par le sommet à ceux de ce triangle, la courbe lieu des centres sera une ellipse; si le point donné est dans les trois autres régions du plan, le lieu des centres sera une hyperbole.

D'après la forme de l'équation (10), on voit que les droites qui ont pour équations

$$x = \frac{1}{2\alpha}, \quad y = \frac{1}{2\beta},$$

sont des tangentes au lieu des centres; car, en faisant $x = \frac{1}{2\alpha}$ dans (10), l'équation en y a évidemment ses racines égales. Il en est de même de l'équation en x qui résulte de $y = \frac{1}{2\beta}$. Ces tangentes ne sont autres que deux des droites qui joignent les milieux des côtés du triangle formé par les trois tangentes données. Comme rien ne distingue un côté d'un autre, on a ce théorème :

Le lieu des centres des coniques qui touchent trois droites données et passent par un point donné, est inscrit au triangle que l'on obtient en joignant les milieux des côtés du triangle formé par les trois droites.

Il est à remarquer que ce triangle circonscrit au lieu des centres ne dépend en rien de la position du point donné par lequel passent toutes les coniques. Seulement les points de contact changeront avec la position de ce point.

Ainsi, toutes les coniques lieux des centres des coniques qui touchent trois droites fixes et passent en outre par un point *qui varie d'une conique à une autre* sont constamment inscrites à ce même triangle.

Il est aisé de construire le centre du lieu représenté par l'équation (10). A cet effet, on divise membre à membre les équations qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées relatives à x et à y, et l'on a

$$\frac{2\alpha x - 1}{2\beta y - 1} = \frac{\alpha x' - 1}{\beta y' - 1},$$

équation d'une droite contenant le centre du lieu. On voit qu'elle passe par les points

$$\left(\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}\right), \left(\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\beta}\right),$$

c'est-à-dire par le milieu de la ligne qui joint l'origine au point donné (x', y'), et par le milieu du segment de la tangente interceptée entre celles qui ont été prises pour axes. Comme les axes peuvent être pris de trois manières, on aura immédiatement trois droites qui se couperont *en un même point*, centre du lieu. (Nous rencontrons ici un théorème de géométrie élémentaire qu'il est superflu d'énoncer.)

Ce centre ne pourra coïncider avec le point donné, qu'autant que celui-ci sera le point d'intersection des trois médianes (ou centre de gravité) du triangle formé par les trois tangentes. Etc.

Ces exemples suffisent pour montrer le parti qu'on peut tirer de l'équation (1), pour la recherche des propriétés des coniques tangentes à plusieurs droites fixes.

Note du Rédacteur. Voir Salmon, *Conic Sections*, 3e édit., 1855.

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

(voir t. XX, p. 177);

PAR M. PAINVIN (*),
Docteur ès Sciences.

§ II. — *Polaires réciproques.*

92. Les théorèmes établis dans le chapitre second nous conduisent d'une manière très-simple aux équations des surfaces polaires pour les surfaces du second degré.

Soit

$$(1) \qquad \varphi = \sum a_{rs} x_r x_s = 0, \quad (a_{rs} = a_{sr}),$$

l'équation d'une surface du second degré; cette équation peut s'écrire

$$(2) \qquad \varphi = \frac{1}{\Delta^2} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & x_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & x_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\alpha_{sr} = \alpha_{rs}),$$

après avoir posé

$$(3) \qquad \alpha_{rs} = \frac{d\Delta}{da_{rs}};$$

Δ désignant, comme toujours, le discriminant ou le hessien de la fonction φ.

93. *On appelle* SURFACE POLAIRE *d'une surface le lieu des pôles des plans tangents à cette surface; les pôles*

(*) Painvin (L.), né à Malesherbes (Loiret) le 18 mai 1826.

de ces plans étant pris par rapport à une seconde surface quelconque, dite SURFACE DIRECTRICE.

Appliquons cette définition à la surface $\varphi = 0$.

Soit

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{4}$$

l'équation de la surface directrice.

Le plan polaire d'un point $\left(\frac{z_1}{z_4}, \frac{z_2}{z_4}, \frac{z_3}{z_4}\right)$ aura pour équation

$$X_1 \frac{dF}{dz_1} + X_2 \frac{dF}{dz_2} + X_3 \frac{dF}{dz_3} + X_4 \frac{dF}{dz_4} = 0,$$

$\frac{X_1}{X_4}, \frac{X_2}{X_4}, \frac{X_3}{X_4}$, étant les coordonnées variables.

Or ce plan, d'après la définition du lieu cherché, doit être tangent à la surface $\varphi = 0$, ce qui conduit à la relation

$$\psi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{dF}{dz_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{dF}{dz_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \frac{dF}{dz_3} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \frac{dF}{dz_4} \\ \frac{dF}{dz_1} & \frac{dF}{dz_2} & \frac{dF}{dz_3} & \frac{dF}{dz_4} & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

(chapitre II, § III, n° 35); c'est précisément l'équation du lieu que nous nous proposions de trouver.

94. Le plan

$$X_1 \frac{dF}{dz_1} + X_2 \frac{dF}{dz_2} + X_3 \frac{dF}{dz_3} + X_4 \frac{dF}{dz_4} = 0$$

est tangent à la surface $\varphi = 0$, par suite de la relation (5). Si (x_1, x_2, x_3, x_4) sont les coordonnées du point de contact de ce plan, le point (x_1, x_2, x_3, x_4) est dit *point correspondant* du point (z_1, z_2, z_3, z_4).

D'un autre côté, le plan tangent à la surface $\varphi = 0$ a aussi pour équation

$$X_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + X_3 \frac{d\varphi}{dx_3} + X_4 \frac{d\varphi}{dx_4} = 0.$$

L'identification de ces deux dernières équations conduit aux relations suivantes entre les coordonnées de deux points correspondants :

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dF}{dz_1} &= \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_1} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4;\\ \frac{dF}{dz_2} &= \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_2} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4;\\ \frac{dF}{dz_3} &= \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_3} = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4;\\ \frac{dF}{dz_4} &= \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_4} = a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4; \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(7)\qquad \left(x_1 \frac{dF}{dz_1} + x_2 \frac{dF}{dz_2} + x_3 \frac{dF}{dz_3} + x_4 \frac{dF}{dz_4}\right) = \varphi.$$

Ces dernières relations permettent d'établir une loi de réciprocité très-remarquable entre les fonctions φ et ψ.

De la dernière colonne du déterminant ψ retranchons les quatre premières multipliées respectivement par x_1, x_2, x_3, x_4, et ayons égard aux relations (6) et (7), il vient

$$\psi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ \frac{dF}{dz_1} & \frac{dF}{dz_2} & \frac{dF}{dz_3} & \frac{dF}{dz_4} & -\varphi \end{vmatrix};$$

on en conclut l'identité

$$(8) \qquad \psi = -\Delta\varphi.$$

95. Lorsqu'on prend pour *surface directrice* la surface représentée par l'équation

$$(9) \qquad F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

la polaire de

$$(10) \quad \varphi = \frac{1}{\Delta^2}\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & x_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & x_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{où } \alpha_{rs} = \frac{d\Delta}{da_{rs}},$$

a pour équation

$$(11) \qquad \psi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & z_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & z_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & z_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & z_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit, d'après la forme même des équations (10) et (11), que le lieu des pôles des plans tangents à la surface $\psi = 0$, est la première surface $\varphi = 0$.

Les deux surfaces $\varphi = 0$, $\psi = 0$, sont appelées polaires réciproques.

§ III. — *Équation aux axes. Sections circulaires.*

1°. *Équation aux axes.*

96. Nous avons vu (82) que si l'on rapporte à son centre la surface

$$\varphi = \sum a_{rs} x_r x_s = 0, \tag{1}$$

son équation prend la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 \\ + 2a_{23} x_2 x_3 + \dfrac{\Delta}{\dfrac{d\Delta}{da_{44}}} x_4^2 = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Or toute transformation de coordonnées qui ne déplacera pas l'origine, n'affectera pas le terme en x_4^2 dans l'équation (2); nous pourrons, par suite, ne considérer que la fonction suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} U_1 = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 \\ \quad + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3, \end{array}\right. \tag{3}$$

homogène par rapport aux variables x_1, x_2, x_3.

97. Effectuons maintenant la transformation

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = k_{11} y_1 + k_{12} y_2 + k_{13} y_3, \\ x_2 = k_{21} y_1 + k_{22} y_2 + k_{23} y_3, \\ x_3 = k_{31} y_1 + h_{32} y_2 + k_{33} y_3, \end{array}\right. \tag{4}$$

et supposons que les nouveaux axes y_1, y_2, y_3, soient rectangulaires; ce qu'on exprimera en écrivant l'identité

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1^2+x_2^2+x_3^2+2c_{12}x_1x_2+2c_{13}x_1x_3 \\ +2c_{23}x_2x_3=y_1^2+y_2^2+y_3^2, \end{cases}$$

dont le second membre représente la distance d'un point à l'origine dans le nouveau système d'axes, et le premier membre la distance du même point à la même origine dans le système primitif.

Les c_{rs} sont définis par les relations suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} c_{12}=c_{21}=\cos\left(\widehat{x_1,x_2}\right), \\ c_{13}=c_{31}=\cos\left(\widehat{x_1,x_3}\right), \\ c_{23}=c_{32}=\cos\left(\widehat{x_2,x_3}\right). \end{cases}$$

La substitution (4) donnera à la fonction U_1 la forme

$$(7)\qquad V_1=A_1y_1^2+A_2y_2^2+A_3y_3^2,$$

si l'on pose

$$(8)\qquad \begin{cases} A_r=k_{1r}h_{1r}+k_{2r}h_{2r}+k_{3r}h_{3r} \\ o=k_{1r}h_{1s}+k_{2r}h_{2s}+k_{3r}h_{3s}, \quad r\gtrless s, \end{cases}$$

$$(9)\qquad h_{rs}=a_{1r}k_{1s}+a_{2r}k_{2s}+a_{3r}k_{3s}.$$

La même substitution opérée dans l'identité (5) conduira aux relations :

$$(10)\qquad \begin{cases} 1=k_{1r}h'_{1r}+k_{2r}h'_{2r}+k_{3r}h'_{3r}, \\ o=k_{1r}h'_{1s}+k_{2r}h'_{2s}+k_{3r}h'_{3s}, \quad r\gtrless s, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(11)\qquad h'_{rs}=c_{1r}k_{1s}+c_{2r}k_{2s}+c_{3r}k_{3s}.$$

Nous désignerons par δ, V, P, les déterminants qui suivent :

$$(12)\quad\left\{\begin{array}{l} \delta = \dfrac{d\Delta}{da_{44}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad V = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \\ \qquad\quad \text{où} \quad a_{rs} = a_{sr}, \qquad\qquad \text{où} \quad \left\{\begin{array}{l} c_{rs} = c_{sr}, \\ c_{rr} = 1, \end{array}\right. \\ \qquad\quad P = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} \qquad k_{rs} \gtrless k_{sr}. \end{array}\right.$$

On sait que le déterminant V représente le carré du volume du parallélipipède construit sur les trois axes x_1, x_2, x_3, avec des longueurs égales à l'unité.

98. Si parmi les équations (8) on considère les trois suivantes :

$$A_1 = k_{11}h_{11} + k_{21}h_{21} + k_{31}h_{31},$$
$$o = k_{12}h_{11} + k_{22}h_{21} + k_{32}h_{31},$$
$$o = k_{13}k_{11} + k_{23}h_{21} + k_{33}h_{31},$$

qu'on les multiplie respectivement par $\dfrac{dP}{dk_{i1}}, \dfrac{dP}{dk_{i2}}, \dfrac{dP}{dk_{i3}}$, et qu'on ajoute, on arrivera à des relations ayant pour type général

$$(13)\qquad A_r\frac{dP}{dk_{sr}} = Ph_{sr}.$$

Par un calcul semblable, on déduira des équations (10)

$$(14)\qquad \frac{dP}{dk_{sr}} = Ph'_{sr}.$$

Éliminant $\dfrac{dP}{dk_{sr}}$ entre les équations (13) et (14), puis remplaçant les h_{sr}, h'_{sr} par leurs valeurs (9) et (11), il vient

$$(a_{1r} - A_s c_{1r})k_{1s} + (a_{2r} - A_s c_{2r})k_{2s} + (a_{3r} - A_s c_{3r})k_{3s} = o.$$

En posant

$$\lambda = -A_s,$$

et en donnant à r les valeurs 1, 2, 3, on obtient alors

$$\left\{\begin{array}{l}(a_{11}+\lambda c_{11})k_{1s}+(a_{21}+\lambda c_{21})k_{2s}+(a_{31}+\lambda c_{31})k_{3s}=0,\\(a_{12}+\lambda c_{12})k_{1s}+(a_{22}+\lambda c_{22})k_{2s}+(a_{32}+\lambda c_{32})k_{3s}=0,\\(a_{13}+\lambda c_{13})k_{1s}+(a_{23}+\lambda c_{23})k_{2s}+(a_{33}+\lambda c_{33})k_{3s}=0.\end{array}\right.$$

L'élimination de k_{1s}, k_{2s}, k_{3s} entre ces trois dernières relations, conduit à l'équation définitive

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda c_{11} & a_{12}+\lambda c_{12} & a_{13}+\lambda c_{13}\\ a_{21}+\lambda c_{21} & a_{22}+\lambda c_{22} & a_{23}+\lambda c_{23}\\ a_{31}+\lambda c_{31} & a_{32}+\lambda c_{32} & a_{33}+\lambda c_{33}\end{vmatrix}=0,$$

dont les trois racines seront

$$\lambda = -A_1,\quad \lambda = -A_2,\quad \lambda = -A_3.$$

Or, par suite de la transformation que nous avons effectuée, l'équation (2) de la surface est devenue

$$A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 y_3^2 + \frac{\Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}} y_4^2 = 0,$$

et les carrés de ses demi-axes ont pour valeurs

$$\frac{-\Delta}{A_1\frac{d\Delta}{da_{44}}},\quad \frac{-\Delta}{A_2\frac{d\Delta}{da_{44}}},\quad \frac{-\Delta}{A_3\frac{d\Delta}{da_{44}}}.$$

Par conséquent, si l'on désigne par R^2 le carré d'un quelconque des demi-axes de la surface, on aura

$$(16)\qquad R^2 = \frac{\Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}}\cdot\frac{1}{\lambda}.$$

L'équation (15) donnera donc les axes de la surface, pourvu qu'on ait égard à la relation (16).

On conclut immédiatement des équations (15) et (16)

$$a^2 b^2 c^2 = -\frac{V\Delta^3}{\left(\frac{d\Delta}{da_{44}}\right)^4},$$

a, b, c représentant les demi-axes de la surface.

2°. Sections circulaires.

99. Prenons l'équation générale

$$(1) \qquad \sum a_{rs} x_r x_s = 0.$$

Considérons en outre l'équation d'une sphère

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{11} x_1^2 + c_{22} x_2^2 + c_{33} x_3^2 + c_{44} x_4^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + 2c_{13} x_1 x_3 \\ + 2c_{14} x_1 x_4 + 2c_{23} x_2 x_3 + 2c_{24} x_2 x_4 + 2c_{34} x_3 x_4 = 0, \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1, \\ c_{rs} = c_{sr} = \cos.\left(\widehat{x_r, x_s}\right), \quad \text{pour} \quad r \quad \text{ou} \quad s = 1, 2, 3, \\ c_{r4} = c_{4r} = m_1 c_{r1} + m_2 c_{r2} + m_3 c_{r3}, \quad \text{pour} \quad r = 1, 2, 3, \\ c_{44} = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2c_{12} m_1 m_2 + 2c_{13} m_1 m_3 \\ \qquad + 2c_{23} m_2 m_3 - r^2; \end{array} \right.$$

$-m_1$, $-m_2$, $-m_3$ sont les coordonnées du centre de la sphère, et r est le rayon.

Soit enfin l'équation d'un plan

$$(4) \qquad p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = 0.$$

Si l'intersection de ce plan avec chacune des deux surfaces (1) et (2) donne deux courbes identiques, il est évident que ce plan coupera la surface du second degré suivant une circonférence.

Nous exprimerons que les deux sections coïncident, en écrivant que leurs projections sur un même plan coordonné sont les mêmes. Choisissons le plan des $x_2 x_3$.

Or les relations (4), (5), (6) du chap. II, § III, n^{os} 45 et 46 nous permettent d'écrire immédiatement les conditions nécessaires pour que cette coïncidence ait lieu; ces conditions seront en même temps suffisantes si le plan (4) n'est pas parallèle à l'axe des x_1.

100. Après avoir posé

$$A_{rs} = a_{rs} + \lambda c_{rs}, \tag{5}$$

nous trouverons en opérant l'identification indiquée :

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} A_{11} p_2^2 - 2A_{12} p_1 p_2 + A_{22} p_1^2 = 0, \\ A_{11} p_2 p_3 + A_{23} p_1^2 - A_{12} p_1 p_3 - A_{13} p_1 p_2 = 0; \\ A_{11} p_3^2 - 2A_{13} p_1 p_3 + A_{33} p_1^2 = 0, \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{l} A_{11} p_4^2 - 2A_{14} p_1 p_4 + A_{44} p_1^2 = 0; \\ A_{11} p_2 p_4 + A_{24} p_1^2 - A_{12} p_1 p_4 - A_{14} p_1 p_2 = 0, \\ A_{11} p_3 p_4 + A_{34} p_1^2 - A_{13} p_1 p_4 - A_{14} p_1 p_3 = 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ces équations renferment comme indéterminées les quantités $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_3}{p_1}$, $\frac{p_4}{p_1}$, λ; les coordonnées $-m_1$, $-m_2$, $-m_3$, du centre de la sphère et son rayon r.

Les trois premières déterminent $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_3}{p_1}$, et λ; les trois dernières seront toujours satisfaites en disposant convenablement des inconnues restantes.

101. **Pour effectuer le premier calcul, posons**

$$(7)\qquad D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

D ne renferme que des quantités connues et le paramètre indéterminé λ.

Des deux premières équations du groupe (6), on tire :

$$(8)\qquad \begin{cases} A_{11}\dfrac{p_2}{p_1} = A_{12} \pm \sqrt{-\dfrac{dD}{dA_{33}}}, \\ A_{11}\dfrac{p_3}{p_1} = A_{13} \pm \sqrt{-\dfrac{dD}{dA_{22}}}; \end{cases}$$

substituant les valeurs de $\dfrac{p_2}{p_1}$, $\dfrac{p_3}{p_1}$, dans la troisième équation, on trouve pour l'équation que doit vérifier λ :

$$(9)\qquad \frac{dD}{dA_{23}} = \left(\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{22}}}\right)\left(\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{33}}}\right).$$

Cette relation nous montre d'abord que les radicaux $\sqrt{-\dfrac{dD}{dA_{22}}}$, $\sqrt{-\dfrac{dD}{dA_{33}}}$ doivent être pris avec des signes tels, que leur produit ait le même signe que $\dfrac{dD}{dA_{23}}$.

En rendant rationnelle la relation (9), il vient

$$\left(\frac{dD}{dA_{23}}\right)^2 - \frac{dD}{dA_{22}}\cdot\frac{dD}{dA_{33}} = -A_{11}D = 0.$$

L'équation que doit vérifier λ sera donc

$$(10)\qquad D = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda c_{11} & a_{12}+\lambda c_{12} & a_{13}+\lambda c_{13} \\ a_{21}+\lambda c_{21} & a_{22}+\lambda c_{22} & a_{23}+\lambda c_{23} \\ a_{31}+\lambda c_{31} & a_{32}+\lambda c_{32} & a_{33}+\lambda c_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est précisément l'équation qui donne les axes dans le cas des surfaces à centre.

102. Supposant λ déterminé, et faisant usage des valeurs (8), nous trouverons que les plans des sections circulaires sont parallèles aux plans

$$(11)\ A_{11}x_1+\left(A_{12}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{33}}}\right)x_2+\left(A_{13}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{22}}}\right)x_3=0.$$

En comparant de la même manière les projections des courbes d'intersection sur les plans des $x_1\,x_3$, et des $x_1\,x_2$, on eût trouvé

$$(12)\ A_{22}x_2+\left(A_{21}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{33}}}\right)x_1+\left(A_{23}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{11}}}\right)x_3=0$$

(le produit des deux radicaux devant être de même signe que $\frac{dD}{dA_{13}}$).

$$(13)\ A_{33}x_3+\left(A_{31}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{22}}}\right)x_1+\left(A_{32}\pm\sqrt{-\frac{dD}{dA_{11}}}\right)x_2=0$$

(le produit des deux radicaux devant être de même signe que $\frac{dD}{dA_{12}}$).

103. Lorsque les surfaces ont un centre, on peut prendre la sphère concentrique à la surface. Si cette dernière est rapportée à son centre, on aura $m_1=m_2=m_3=0$; et d'après les formules (3), les c_{r4} seront nuls, et c_{44} sera égal à $-r^2$.

Si l'on fait alors passer le plan par l'origine, les deux dernières relations (6) seront satisfaites, et la quatrième nous donnera

$$(14) \qquad r^2 = \frac{\Delta}{\dfrac{d\Delta}{da_{44}}} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

Ainsi le rayon de la sphère est égal à l'un des demi-axes de la surface.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES

(voir t. XX, p. 72);

PAR M. E.-E. KUMMER.

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

§ IV. — *Foyers des rayons, leurs points milieux et leurs plans focaux.*

En mettant dans les expressions (12) et (14) (§ I) pour dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, leurs valeurs en fonction des quotients différentiels partiels ou des différentielles des variables indépendantes et pour $\varkappa$, λ, μ, leurs valeurs (§ III), on trouve pour dp et ds :

$$(1) \qquad ds = du\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathfrak{F}t + \mathcal{G}t^2},$$

$$(2) \qquad dp = \frac{du\,(\mathrm{f}' + \mathrm{g}t)(\mathcal{E} + \mathfrak{F}t) - (\mathrm{e} + \mathrm{f}t)(\mathfrak{F} + \mathcal{G}t)}{\Delta\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathfrak{F}t + \mathcal{G}t^2}};$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{dp}{ds} = \frac{(\mathrm{f}' + \mathrm{g}t)(\mathcal{E} + \mathfrak{F}t) - (\mathrm{e} + \mathrm{f}t)(\mathfrak{F} + \mathcal{G}t)}{\Delta\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathfrak{F}t + \mathcal{G})^2}}.$$

Aux valeurs de t tirées de l'équation

$$(4) \qquad (f' + gt)(\mathcal{E} + \mathcal{F}t) - (e + ft)(\mathcal{F} + \mathcal{G}t) = 0$$

correspondent deux rayons infiniment voisins du rayon de départ dont les plus courtes distances à ce rayon sont des infiniment petits d'ordre supérieur.

Nous trouvons, en développant l'équation (4),

$$(5) \quad (g\mathcal{F} - f\mathcal{G})t^2 + [g\mathcal{E} - (f + f'_1)\mathcal{F} - e\mathcal{G}]t + f'\mathcal{E} - e\mathcal{F} = 0.$$

Désignons par τ_1 et τ_2 les racines de cette équation, nous aurons

$$(6) \quad \tau_1 + \tau_2 = \frac{-g\mathcal{E} + (f - f')F + e\mathcal{G}}{g\mathcal{F} - f\mathcal{G}}, \quad \tau_1 \tau_2 = \frac{f'\mathcal{E} - e\mathcal{F}}{g\mathcal{F} - f\mathcal{G}}.$$

L'équation quadratique (5) n'a pas toujours ses racines réelles. Ces racines sont réelles ou imaginaires, selon la relation caractéristique du système de rayons dans l'espace. Il y a donc à considérer deux catégories de systèmes de rayons. Celle où tout rayon est coupé par deux rayons infiniment voisins, et celle où cette intersection n'a lieu pour aucun rayon infiniment voisin. Il existe une troisième catégorie de systèmes, c'est celle où certains rayons sont coupés par deux rayons infiniment voisins et où d'autres rayons ne sont coupés par aucun rayon infiniment voisin.

Les deux points où un rayon est coupé par deux rayons infiniment voisins seront nommés *foyers* de ce rayon. Ces points seront réels quand τ_1 et τ_2 le seront. On obtient les abscisses des foyers en mettant dans l'expression générale de l'abscisse du point d'un rayon le plus voisin d'un rayon infiniment voisin, les valeurs de τ_1 et de τ_2. Désignons les abscisses des foyers par ρ_1 et ρ_2, nous aurons

$$(7)\quad \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{-[e+(f+f')t_1+g\tau_1^2]}{\mathcal{E}+2\mathcal{F}\tau_1+\mathcal{G}\tau_1^2}, \\ \rho_2 = -\dfrac{e+(f+f')\tau_2+g\tau_2^2}{\mathcal{E}+2\mathcal{F}\tau_2+\mathcal{G}\tau_2^2}. \end{cases}$$

Ces valeurs peuvent se mettre sous la forme suivante, au moyen de l'équation (4) :

$$(8)\quad \begin{cases} \rho_1 = -\dfrac{e+f\tau_1}{\mathcal{E}+\mathcal{F}\tau_1} = -\dfrac{f'+g\tau_1}{\mathcal{F}+\mathcal{G}\tau_1}, \\ \rho_2 = -\dfrac{e+f\tau_2}{\mathcal{E}+\mathcal{F}\tau_2} = -\dfrac{f'+g\tau_2}{\mathcal{F}+\mathcal{G}\tau}. \end{cases}$$

Si entre ces équations on élimine τ_1 et τ_2, on trouve une équation quadratique dont les racines sont ρ_1 et ρ_2 :

$$(9)\quad (\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)r^2+[g\mathcal{E}-(f+f')\mathcal{F}+e\mathcal{G}]r+eg-ff'=0;$$

on a donc

$$(10)\quad \rho_1+\rho_2 = -\frac{g\mathcal{E}-(f+f')\mathcal{F}+e\mathcal{G}}{\Delta^2},\quad \rho_1\rho_2 = \frac{eg-ff'}{\Delta^2}.$$

Si l'on compare l'équation quadratique dont les racines sont ρ_1 et ρ_2 à l'équation dont les racines sont les abscisses des points limites des plus courtes distances, on trouve

$$(11)\qquad \rho_1+\rho_2 = r_1+r_2,$$

$$(12)\qquad \rho_1\rho_2 = r_1r_2+\frac{(f-f')^2}{4\Delta^2}.$$

La première de ces équations donne le théorème suivant :

Le point milieu de la distance des deux foyers d'un rayon coïncide avec le point milieu des deux points limites de ce rayon.

Nous nommerons ce point milieu commun *centre du rayon.*

Soit δ la distance du centre d'un rayon à ses foyers; on a

$$(13) \qquad d = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}.$$

Les quatre longueurs r_1, r_2, ρ_1, ρ_2, peuvent s'exprimer en fonction de m, δ et d (11) et (18) (§ II) :

$$(14) \qquad \begin{cases} r_2 = m + d, & r_1 = m + d, \\ \rho_2 = m + \delta, & \rho_1 = m - \delta; \end{cases}$$

et l'équation (12) donne

$$(15) \qquad d^2 - \delta^2 = \frac{(\mathrm{f} - \mathrm{f}')^2}{4\Delta^2}.$$

De là résulte ce théorème :

La distance de deux foyers d'un rayon n'est jamais plus grande que celle de ses points limites.

Ainsi les foyers sont toujours compris entre les points limites ou coïncident avec eux.

Nous nommerons *plans focaux* d'un rayon les plans qui passent par ce rayon et renferment aussi l'un ou l'autre des rayons infiniment voisins qui coupent le rayon donné.

Ces plans sont réels quand les foyers le sont. Leur position relative par rapport aux plans principaux est définie de la manière la plus simple par l'équation

$$r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega,$$

d'où l'on tire

$$(16) \qquad \cos^2\omega = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, \qquad \sin^2\omega = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}.$$

Si l'on fait $r = \rho_1$, ω est l'angle que fait le premier plan focal avec le premier plan principal; si l'on fait $r = \rho_2$, ω est l'angle du second plan focal avec le premier plan principal. Nommons ω_1 et ω_2 ces deux angles, $\omega_2 - \omega_1 = \gamma$ sera l'angle des deux plans focaux. On a

$$(17)\quad \begin{cases} \cos^2\omega_1 = \dfrac{r_2 - \rho_1}{r_2 - r_1}, & \sin^2\omega_1 = \dfrac{\rho_1 - r_1}{r_2 - r_1}, \\[2ex] \cos^2\omega_2 = \dfrac{r_2 - \rho_2}{r_2 - r_1}, & \sin^2\omega_2 = \dfrac{\rho_2 - r_1}{r_2 - r_1}. \end{cases}$$

Si l'on remplace dans ces formules les abscisses des foyers et des points limites par leurs valeurs en fonction de m, d et δ, on obtient

$$(18)\quad \begin{cases} \cos\omega_1 = \sin\omega_2 = \sqrt{\dfrac{d+\delta}{2d}}, \\[2ex] \cos\omega_2 = \sin\omega_1 = \sqrt{\dfrac{d-\delta}{2d}}. \end{cases}$$

Donc $\omega_1 = \frac{1}{2}\pi - \omega_2$. Et, puisque les plans principaux sont rectangulaires, l'angle du second plan focal avec le second plan principal est $\frac{1}{2}\pi - \omega_2 = \omega_1$. De là ce théorème :

Les deux plans focaux d'un rayon sont situés symétriquement par rapport à ses plans principaux, de sorte que le plan bissecteur de l'angle des plans focaux est le même que celui de l'angle des plans principaux.

Pour l'angle $\gamma = \omega_2 - \omega_1$ des plans focaux, on a

$$(19)\quad \begin{cases} \gamma = \dfrac{1}{2}\pi - 2\omega_1 = 2\omega_2 - \dfrac{1}{2}\pi, \\[2ex] \omega_1 = \dfrac{1}{4}\pi - \dfrac{1}{2}\gamma, \quad \omega_2 = \dfrac{1}{4}\pi - \dfrac{1}{2}\gamma. \end{cases}$$

Donc

$$\sin\gamma = \cos 2\omega_1 = \cos^2\omega_1 - \sin^2\omega_1,$$
$$\cos\gamma = \sin 2\omega_1 = 2\sin\omega_1\cos\omega_1,$$

d'où, d'après les équations (18),

$$\sin\gamma = \frac{\delta}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{d^2-\delta^2}}{d}.$$

SÉRIES SCHLOMILCH

(voir p. 108).

Corrections.

1° Remplacer la série par celle-ci

$$f(x) = \frac{x}{1^{1+x}} + \frac{x}{2^{1+x}} + \frac{x}{3^{1+x}} + \ldots.$$

2° L'équation fautive au bas de la page par cette identité :

$$\frac{x}{(2p)^{1+x}} - \frac{2x}{(2p)^{1+x}} = -\frac{x}{(2p)^{1+x}}.$$

3° P. 110, *lisez* $\varphi(0) = 1$.

SUR LA SOMMATION DE CERTAINS COEFFICIENTS BINOMIAUX

(voir t. XIX, p. 32);

PAR M. CATALAN (*).

I. PROBLÈME. *Dans le développement de* $(1+z)^m$, *on prend les termes de* p *en* p. *Quelle est la somme de*

(*) Né à Bruges (Belgique) le 30 mai 1814.

leurs coefficiens? (L'exposant m est supposé entier positif) (*).

Représentons par S_0, S_1, ..., S_{p-1} les sommes dont les premiers termes sont $1, \frac{m}{1}, \ldots, \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2\ldots(p-1)}$.
Soit θ une racine *primitive* de l'équation

$$(1)\qquad \theta^p - 1 = 0.$$

En remplaçant z, successivement, par $\theta, \theta^2, \ldots, \theta^p$, nous aurons, en vertu de cette équation,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} (1+\theta)^m & = S_0 + S_1\theta + \ldots + S_{p-1}\theta^{p-1}, \\ (1+\theta^2)^m & = S_0 + S_1\theta^2 + \ldots + S_{p-1}\theta^{2(p-1)}, \\ \ldots & \ldots \\ (1+\theta^{p-1})^m & = S_0 + S_1\theta^{p-1} + \ldots + S_{p-1}\theta^{(p-1)(p-1)}, \\ (1+1)^m & = S_0 + S_1 + \ldots + S_{p-1}. \end{array}\right.$$

II. Pour tirer, des équations (2), la valeur de S_k, il suffit de les ajouter membre à membre, après avoir multiplié par θ^{-k} les deux membres de la première, par θ^{-2k} les deux membres de la deuxième, etc. En effet, le coefficient de $S_{k'}$, dans l'équation résultante, est

$$\theta^{k'-k} + \theta^{2(k'-k)} + \ldots + \theta^{p(k'-k)} = 0,$$

attendu que k' et k étant inégaux, et inférieurs à p, $\theta^{k'-k}$ est une racine primitive de l'équation (1).

Par suite,

$$(3)\quad pS_k = (1+\theta)^m\theta^{-k} + (1+\theta^2)\theta^{-2k} + \ldots + (1+\theta^p)^m\theta^{-pk}.$$

(*) Un jeune géomètre, M. Haton de la Goupillière, a résolu la même question pour le cas d'une fonction quelconque. Néanmoins, à cause de la simplicité du résultat exprimé par la formule (C), j'ai cru pouvoir le faire connaître.

III. Soit maintenant

$$(4) \qquad \theta = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi;$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} 1+\theta = 2\cos\frac{1}{2}\varphi \,.\, e^{\frac{1}{2}\varphi\sqrt{-1}}, \\ 1+\theta^2 = 2\cos\frac{2}{2}\varphi \,.\, e^{\frac{2}{2}\varphi\sqrt{-1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1+\theta^p = 2\cos\frac{p}{2}\varphi \,.\, e^{\frac{p}{2}\varphi\sqrt{-1}}. \end{array}\right.$$

La formule (3) devient

$$pS_k = 2^m \left\{\begin{array}{l} \cos^m\frac{1}{2}\varphi \,.\, e^{\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}} + \cos^m\frac{2}{2}\varphi \,.\, e^{2\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}} + \ldots \\ \qquad + \cos^m\frac{p}{2}\varphi \,.\, e^{p\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi\sqrt{-1}} \end{array}\right\}.$$

Par conséquent

$$(A) \quad pS_k = 2^m \left\{\begin{array}{l} \cos^m\frac{1}{2}\varphi\cos\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi + \cos^m\frac{2}{2}\varphi\cos 2\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi + \ldots \\ \qquad + \cos^m\frac{p}{2}\varphi \,.\, \cos p\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi \end{array}\right\},$$

et

$$(B) \quad \left\{\begin{array}{l} 0 = \cos^m\frac{1}{2}\varphi\sin\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi + \cos^m\frac{2}{2}\varphi\sin 2\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi + \ldots \\ \qquad + \cos^m\frac{p}{2}\varphi\sin p\left(\frac{m}{2}-k\right)\varphi. \end{array}\right.$$

IV. Très-souvent l'évaluation de la quantité entre parenthèses, dans la formule (A), est plus compliquée que la détermination *directe* de S_k. Mais, par cela même, l'équation (A) peut être regardée comme donnant la sommation de cette quantité. Pour plus de simplicité, posons

$$m - 2k = q,$$

et rappelons-nous que

$$\varphi = \frac{2\pi}{p};$$

nous aurons

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} &\cos^m \frac{\pi}{p} \cos q \frac{\pi}{p} + \cos^m \frac{2\pi}{p} \cos 2q \frac{\pi}{p} + \ldots \\ &\qquad + \cos^m \frac{p\pi}{p} \cos pq \frac{\pi}{p} = \frac{p}{2^m} \mathrm{S}_k. \end{aligned}\right.$$

Par exemple,

$$\cos^7 \frac{\pi}{3} \cos \frac{5\pi}{3} + \cos^7 \frac{2\pi}{3} \cos \frac{10\pi}{3} + \cos^7 \pi \cos 5\pi = \frac{3}{2^7}(7 + 35 + 1).$$

V. Si $k + p$ surpasse $m + 1$, la somme S_k est composée d'un seul terme, égal à $\mathrm{C}_{m,k}$; donc alors

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned} &\cos^m \frac{\pi}{p} \cos q \frac{\pi}{p} + \cos^m \frac{2\pi}{p} \cos 2q \frac{\pi}{p} + \ldots + \cos^m \frac{p\pi}{p} \,.\, \cos pq \frac{\pi}{p} \\ &\qquad = \frac{p}{2^m} \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1 \,.\, 2 \ldots k}. \end{aligned}\right.$$

Soient, pour fixer les idées,

$$m = 13, p = 11, k = 3, q = 7:$$

$$\left\{\begin{aligned} &\cos^{13} \frac{\pi}{11} \cos \frac{7\pi}{11} + \cos^{13} \frac{2\pi}{11} \cos \frac{14\pi}{11} + \cos^{13} \frac{3\pi}{11} \cos \frac{21\pi}{11} + \ldots, \\ &\qquad + \cos^{13} \pi \cos 7\pi = \frac{11}{2^{13}} \,.\, 286. \end{aligned}\right.$$

11 janvier 1861.

SOLUTION DE LA QUESTION 479

(voir t. XVIII, p. 172);

PAR M. KESSLER,
Élève du lycée Saint-Louis;

ET M. L. VERHARNE,
Élève du lycée de Douai (classe de M. David).

$$a^n + b^n = (a+b)^n - nab(a+b)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} a^2 b^2 (a+b)^{n-4}$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} a^3 b^3 (a+b)^{n-6}$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4} a^4 b^4 (a+b)^{n-8}$$
$$- \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.2.3.4.5} a^5 b^5 (a+b)^{n-10},$$

n entier positif; on arrête la série lorsque l'exposant de $(a+b)$ devient négatif.

Il faut alterner les signes.

On vérifie aisément que cette égalité a lieu pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Je dis qu'elle a lieu dans tous les cas, et pour cela je ferai voir que si elle a lieu pour l'exposant n, elle subsiste aussi pour l'exposant $(n+1)$. Soit donc

$$a^n + b^n = (a+b)^n - nab(a+b)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2} a^2 b^2 (a+b)^{n-4}$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} a^3 b^3 (a+b)^{n-6} + \ldots$$

Je remarque qu'on a identiquement

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a^n + b^n)(a+b) - ab(a^{n-1} + b^{n-1}).$$

Or

$$(1)\left\{\begin{aligned}(a^n+b^n)(a+b)=(a+b)^{n+1}-nab(a+b)^{n-1}\\ +\frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-3}\\ -\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}a^3b^3(a+b)^{n-5}+\ldots,\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}a^{n-1}+b^{n-1}=(a+b)^{n-1}-(n-1)ab(a+b)^{n-3}\\ +\frac{(n-1)(n-4)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-5}\\ -\frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a^3b^3(a+b)^{n-7}+\ldots,\end{aligned}$$

$$(3)\left\{\begin{aligned}ab(a^{n-1}+b^{n-1})=ab(a+b)^{n-1}-(n-1)a^2b^2(a+b)^{n-3}\\ +\frac{(n-1)(n-4)}{1.2}a^3b^3(a+b)^{n-5}\\ -\frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a^4b^4(a+b)^{n-7}+\ldots.\end{aligned}\right.$$

Retranchant convenablement (3) de (1), il vient

$$\begin{aligned}a^{n+1}+b^{n+1}=(a+b)^{n+1}-(n+1)ab(a+b)^{n-1}\\ +\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-3}-\ldots.\end{aligned}$$

La loi est donc générale. C. Q. F. D.

Du reste cette proposition résulte immédiatement des formules d'Albert Girard, car a et b sont les racines de l'équation

$$z^2-(a+b)z+ab=0,$$

par suite a^n+b^n est la somme des $n^{\text{ièmes}}$ puissances de ces racines, et Waring a donné une formule qui donne immédiatement cette somme; il ne reste qu'à y supposer le degré de l'équation égal à 2. Je crois d'ailleurs que Waring a fait lui-même ce calcul.

Note du Rédacteur. C'est le terme général d'une série récurrente dont l'échelle a deux termes.

SOLUTIONS DES QUESTIONS 572 ET 575

(voir p. 112 et 113);

PAR M. KESSLER,
Élève du lycée Saint-Louis.

Question 572.

Sommer

$$4\left(\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{9.10.11}+\frac{1}{13.14.15}+\ldots\right)$$

(EULER.)

La fraction

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$$

peut représenter un terme quelconque de la série entre parenthèses.

Il faut donc trouver

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}.$$

Décomposons la fraction sous le signe en d'autres fractions rationnelles, par le procédé connu; cette fraction est égale à

$$\frac{1}{8}\frac{4}{4n+1}-\frac{1}{4}\frac{4}{4n+2}+\frac{1}{8}\frac{4}{4n+3}.$$

Or la fonction primitive de cette somme sera précisément la somme cherchée, car c'est la limite vers laquelle tend la somme de rectangles s'approchant indéfiniment de l'aire de la courbe

$$y = \frac{1}{8}\frac{4}{4x+1} - \frac{1}{4}\frac{4}{4x+2} + \frac{1}{8}\frac{4}{4x+3}.$$

Cette somme est donc

$$\frac{1}{8}l(4n+1) - \frac{1}{4}l(4x+2) + \frac{1}{8}l(4n+3) + \text{const.}$$

et l'aire est nulle pour $n = 0$, donc

$$\text{const.} = -\frac{1}{8}l\frac{3}{4};$$

et par suite

$$\sum = \frac{1}{8}l\frac{4(4n+1)(4n+3)}{3(4n+2)^2}$$

et la limite pour $n = \infty$ est $\frac{1}{8}l\frac{4}{3}$, l représentant un logarithme népérien ; donc

$$\frac{1}{2}l\frac{4}{3} = 4\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \dots\right).$$

On trouverait, de la même façon, la série

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{11.12.13} + \dots,$$

dans laquelle le terme général peut être représenté par

$$\frac{1}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)}$$

et en général la série

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{m(m+1)(m+2)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \dots,$$

dans laquelle

$$n - m - 2 = k - n - 2 \quad \text{ou} \quad n - m = k - n.$$

Le dénominateur pourrait renfermer autant de termes qu'on voudrait, et même les nombres qui s'y trouvent pourraient ne pas être consécutifs, pourvu que leur différence fût constante. Ainsi, par exemple, on trouverait facilement la somme de

$$\frac{1}{1.3.5.7.9} + \frac{1}{12.14.16.18.20} + \frac{1}{23.25.27.29.31} + \ldots,$$

dans laquelle le terme constant est

$$\frac{1}{(11n+1)(11n+2)(11n+3)(11n+4)(11n+5)}$$

et ainsi de suite.

Question 575.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$lx + my + nz = 0,$$

les équations d'une ellipse dans l'espace; les axes principaux de cette ellipse sont les racines de l'équation

$$\frac{l^2 a^2}{z^2 - a^2} + \frac{l^2 b^2}{z^2 - b^2} + \frac{l^2 c^2}{z^2 - c^2} = 0.$$

(Sedley Taylor.)

Dans l'ellipsoïde proposé, je mène le diamètre conjugué du plan

$$lx + my + nz = 0;$$

les deux axes de l'ellipse en question de ce diamètre formeront un système de trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Or on sait que la somme des carrés de ces diamètres est constante; le volume du parallélipipède dont ils sont les arêtes est aussi constant.

Soit ρ la demi-longueur du diamètre auxiliaire conjugué au plan; les équations de ce diamètre sont, comme il est facile de le voir,

$$\frac{x}{a^2 l} = \frac{y}{b^2 m} = \frac{z}{c^2 n} = \frac{\rho}{\sqrt{a^4 l^2 + b^4 m^2 + c^4 n^2}};$$

d'où, combinant avec l'équation de l'ellipsoïde,

$$\rho^2 = \frac{a^4 l^2 + b^4 m^2 + c^4 n^2}{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}.$$

Si α et β désignent les longueurs cherchées, le volume du parallélipipède sera

$$V = \alpha\beta\rho \sin\theta$$

(θ étant l'angle du diamètre auxiliaire). Or

$$\sin\theta = \frac{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)(a^4 l^2 + b^4 m^2 + c^4 n^2)}};$$

donc

$$V = \alpha\beta \sqrt{\frac{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}{l^2 + m^2 + n^2}} = abc;$$

α et β seront donc les racines de l'équation

$$z^4 - \left(a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^4 l^2 + b^4 m^2 + c^4 n^2}{a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2}\right) z^2 + \frac{(l^2 + m^2 + n^2)\, a^2 b^2 c^2}{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2} = 0$$

ou

$$z^4 - \left[\frac{a^2 l^2 (b^2 + c^2) + m^2 b^2 (a^2 + c^2) + n^2 c^2 (a^2 + b^2)}{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}\right] z^2$$
$$- \frac{(l^2 + m^2 + n^2) a^2 b^2 c^2}{a^2 l^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2} = 0,$$

$$a^2 l^2 [z^4 - (b^2 + c^2) z^2 + b^2 c^2] + b^2 m^2 [z^4 - (a^2 + c^2) z^2 + a^2 c^2]$$
$$+ c^2 n^2 [z^4 - (a^2 + b^2) z^2 + a^2 b^2] = 0,$$

$$a^2 l^2 (z^2 - b^2)(z^2 - c^2) + b^2 m^2 (z^2 - a^2)(z^2 - c^2)$$
$$+ c^2 n^2 (z^2 - a^2)(z^2 - b^2) = 0,$$

$$\frac{a^2 l^2}{z^2 - a^2} + \frac{b^2 m^2}{z^2 - b^2} + \frac{c^2 n^2}{z^2 - c^2} = 0.$$

C. Q. F. D.

Quant aux directions des axes, elles pourront être déterminées par les six équations

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$
$$l\alpha' + n\beta' + m\gamma' = 0, \quad \frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} + \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = 0, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$$

où (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont les angles de ces directions avec les axes de l'ellipsoïde. Les quatre premiers donneront les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\alpha'}{\gamma'}$, $\frac{\beta'}{\gamma'}$, et, au moyen des deux dernières, on déterminera enfin les inconnues.

Mais on peut trouver plus vite la direction du grand axe; si en effet on suppose que l'axe maximum de l'ellipsoïde soit sur l'axe des z, et qu'on pose

$$x = pz, \quad y = qz,$$

pour équations du grand axe, on aura à chercher le maximum de $\frac{1}{p^2 + q^2 + 1}$, p et q étant liés par la relation

$$lp + mq + 1 = 0,$$

ou le minimum de $(p^2 + q^2 + 1)$. La relation précédente donne

$$p = -\frac{n + mq}{l}.$$

Substituant, il vient

$$q^2(m^2 + l^2) + 2mnq + n^2 + l^2,$$

qui sera minimum pour

$$q = -\frac{mn}{m^2 + l^2},$$

et par suite

$$p = -\frac{ln}{m^2 + l^2};$$

$$\gamma^2 = \frac{m^2 + l^2}{n^2 + m^2 + l^2}, \quad \beta^2 = \frac{l^2 + n^2}{n^2 + m^2 + l^2}, \quad \alpha^2 = \frac{m^2 + n^2}{n^2 + m^2 + l^2}.$$

On obtiendra facilement encore les longueurs de deux diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné. Dans l'équation écrite plus haut, il faudrait diviser le terme constant par le sinus de cet angle.

SOLUTION DE LA QUESTION 535

(voir t. XIX, p. 306);

PAR MM. BLANCHÉ-ARRAULT, ALPH. POITRASSON,
ET MAURICE LE BARBIER DE TINAN.

Si deux polygones, 1° sont semblables, 2° ont les côtés homologues parallèles, 3° ont les intervalles compris entre les côtés homologues égaux, ces deux polygones sont circonscriptibles à des cercles.

En effet, considérons deux polygones ABCD, $abcd$, satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Menons les droites Aa, Bb, Cc, Dd; je remarque que ces droites seront évidemment les bissectrices des angles A, B,..., a, b,..., en vertu de l'égalité des intervalles égaux compris entre les côtés homologues, d'où il résulte que le point O où se rencontrent deux de ces bissectrices est également éloigné des côtés BC, AB, AE, par exemple. Si je démontre qu'une troisième bissectrice CO passe aussi par ce point O, il en résultera que le point O sera le centre des cercles inscrits dans les deux polygones. Soit donc O′ le point où Ce rencontre BO. Les triangles semblables AOB, aOb, BO′C, bO′c donnent les égalités de rapport :

$$\frac{ab}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{OB}}, \quad \frac{bc}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{O}'b}{\mathrm{OB}}.$$

Mais, les deux polygones étant semblables, on a

$$\frac{ab}{\mathrm{AB}} = \frac{bc}{\mathrm{BC}},$$

donc on doit avoir

$$\frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{O}'b}{\mathrm{OB}}$$

et par suite

$$\mathrm{O}b = \mathrm{O}'b;$$

ce qui prouve que les points O et O′ se confondent et que toutes les bissectrices passent par le même point O, qui est le centre des cercles inscrits dans les deux polygones.

SOLUTION DES QUESTIONS 531 ET 532

(voir t. XIX, p. 247 et 248);

PAR M. C. KESSLER,
Elève du lycée Saint-Louis.

Question 531.

Soient A l'aire d'un polygone régulier circonscrit à un cerle, A' l'aire d'un polygone semblable inscrit; l'aire du cercle est comprise entre A' et $A' + \frac{2}{3}(A - A')$.

Soient AB le côté du polygone régulier inscrit de n côtés, et CD le côté du polygone circonscrit de n côtés.

Soit G le point de contact de CD. Je considère la valeur du rapport

$$\frac{\text{segment AGB}}{A - A'} = \frac{\text{segment AGB}}{\text{CABD}}.$$

D'après un théorème connu, l'aire d'un segment a pour limite supérieure les $\frac{4}{3}$ du triangle isocèle y inscrit; donc

$$\frac{\text{segment AGB}}{A - A'} < \frac{4}{3}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)}{\tang\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}} = \frac{4}{3}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)}{\tang\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}.$$

Or

$$\cos\frac{\pi}{n} < \cos^2\frac{\pi}{2n},$$

et le maximum est $\frac{2}{3}$; donc

$$\frac{\text{segment AGB}}{A - A'} < \frac{2}{3}$$

ou

$$A' < \text{cercle} < A' + \frac{2}{3}(A - A'),$$

énoncé différent de celui des *Annales*. Il est facile de voir, sans s'appuyer sur le théorème que j'ai invoqué, que

$$\text{cercle} > A' + \frac{1}{2}(A - A');$$

c'est une limite inférieure plus rapprochée que A, il suffit pour cela de voir que le minimum du rapport

$$\frac{1}{2}\,\frac{x - \sin x}{\tan\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x} \quad \text{est} \quad \frac{1}{2}.$$

Cela se voit facilement.

Question 532.

Soient A l'aire d'un polygone régulier de $2n$ côtés inscrit dans un cercle, A′ l'aire d'un polygone régulier inscrit d'un nombre n de côtés. L'aire du cercle est comprise entre A′ et $A' + \left(\frac{2}{3}\right)^2 (A - A')$.

O centre du cercle;
AB côté du polygone régulier inscrit de n côtés;
AC côté du polygone régulier inscrit de $2n$ côtés;
AMC segment sous-tendu par AC.

Je considère le rapport

$$\frac{\text{segment AMC}}{A - A'} < \frac{4}{3}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\sin\frac{2\pi}{n}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)} = \frac{2}{3}\,\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}\cos^2\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)},$$

dont le maximum correspond à $n = 3$ et est $\frac{4}{9}$; donc

$$A' < \text{cercle} < A' + \frac{4}{9}(A - A'),$$

limite plus rapprochée que celle donnée par les *Annales* et conséquemment par Huygens.

La question 531, traitée par M. Dellach (p. 174), n'a aucun rapport avec celle-ci, donnée exactement par les *Nouvelles Annales,* à cette différence que ma limite est plus rapprochée, comme on le voit facilement.

SOLUTION DE LA QUESTION 497

(voir t. XVIII, p. 444);

PAR M. C. KESSLER,
Elève du lycée Saint-Louis.

Tout plan doublement tangent à la surface engendrée par une conique tournant autour d'une droite située dans son plan coupe cette surface suivant deux coniques qui, projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, ont un foyer commun au pied de cet axe. (MOUTARD.)

Je considère la conique dans une de ses positions, par un point de l'axe je mène deux tangentes à cette conique, également inclinées sur cet axe, ce qui est toujours possible, je rapporte alors la conique à ces deux tangentes prises pour axes des x et des z, ses équations seront

$$(1) \qquad xz + \lambda(ax + bz - 1)^2 = 0, \quad y = 0,$$

l'axe des y est pris perpendiculairement aux deux autres.

Je cherche l'équation de la surface engendrée.

Soient

$$z - x = k, \qquad x^2 + y^2 + z^2 + 2zx\cos\theta = \rho^2, \quad (4)$$

θ étant l'angle des deux tangentes, les équations d'un parallèle. J'élimine x, y, z entre les quatre équations précédentes ; l'équation (4) peut s'écrire

$$x^2 + z^2 - 2zx + 4zx\cos^2\frac{\theta}{2} = \rho^2$$

ou

$$zx = \frac{\rho^2 - k^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

et, par suite,

$$(z + x)^2 = (z - x)^2 + 4zx = k^2 + \frac{\rho^2 - k^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\rho^2 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

d'où l'on déduit alors

$$z = \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}}, \qquad x = \frac{k}{2} - \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{2\cos\frac{\theta}{2}},$$

et, par suite, substituant dans l'équation (1),

$$\frac{\rho^2 - k^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} + \lambda\left[\frac{a}{2}\left(k - \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{b}{2}\left(k + \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) - 1\right]^2 = 0,$$

Pour avoir l'équation de la surface, ou plutôt celle de la section par le plan doublement tangent yOx qui est ici quelconque puisque la conique a été prise dans une quelconque de ses positions, et qui est bien doublement tangent, il suffit de remplacer k par $-x$ et ρ^2 par x^2+y^2, et il vient

$$\frac{y^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} - \lambda'\left[\frac{a}{2}\left(-x - \frac{\sqrt{x^2\cos^2\frac{\theta}{2} + y^2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{b}{2}\left(-x + \frac{\sqrt{y^2 + x^2\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) - 1\right] = 0.$$

λ ne peut être positif, car on aurait la somme de deux carrés qui ne pourrait être nulle que pour certaines valeurs particulières de x, y, z ; c'est pour cette raison que j'ai posé

$$\lambda = -\lambda';$$

on voit alors que cette équation se décompose en deux autres du second degré

$$\frac{y}{2\cos\frac{\theta}{3}} + \sqrt{\lambda'}\left[+\frac{a}{2}\left(x + \frac{\sqrt{x^2\cos^2\frac{\theta}{2} + y^2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) + \frac{b}{2}\left(x - \frac{\sqrt{y^2 + x^2\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) + 1\right] = 0,$$

$$\frac{y}{2\cos\frac{\theta}{3}} - \sqrt{\lambda'}\left[+\frac{a}{2}\left(x + \frac{\sqrt{x^2\cos^2\frac{\theta}{2} + y^2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) + \frac{b}{2}\left(x - \frac{\sqrt{y^2 + x^2\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) + 1\right] = 0.$$

Projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, elles ont un foyer commun au pied de l'axe, car si l'on remplace $x\cos\frac{\theta}{2}$ par x, on a la nouvelle projection; ce qui montre que $\sqrt{x^2+y^2}$ est fonction linéaire de x et de y pour chaque conique. Le cas du tore s'en déduirait facilement

---

SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET DE NEWTON;

PAR M. E. PROUHET.

Je me propose dans cette Note d'abréger, en me servant d'une notation plus concise, les calculs au moyen des-quels M. Gerono (*) parvient à déduire la formule de Newton de celle de Lagrange.

Pour mieux fixer les idées, je me bornerai au cas où l'on donne cinq valeurs u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 d'une fonction $f(x)$ du quatrième degré, correspondant à cinq valeurs x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 de la variable. Dans la formule de Newton x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 forment une progression arithmétique qu'on peut supposer être la suite naturelle des nombres 0, 1, 2, 3, 4; car on sait ramener tous les autres cas à celui-là.

La formule de Lagrange peut s'écrire ainsi :

$$f(x) = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2 + X_3 u_3 + X_4 u_4,$$

X_0, X_1, X_2, etc., étant des fonctions du quatrième degré qui jouissent de cette propriété que chacune d'elles se réduit à l'unité quand on y substitue la valeur de x qui porte le même indice et s'annule pour toute valeur de x d'un indice différent.

Si l'on remplace, dans cette formule, u_1 par $u_0 + \Delta u_0$, u_2 par $u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0$, etc., elle devient

$$\begin{aligned} f(x) = (X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4)\, & u_0 \\ + (X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4)\, & \Delta u_0 \\ + (X_2 + 3X_3 + 6X_4)\, & \Delta^2 u_0 \\ + (X_3 + 4X_4)\, & \Delta^3 u_0 \\ + X_4\, & \Delta^4 u_0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \ldots.$$

Le coefficient de u_0 se réduit à l'unité quand on y fait $x = 0$, puisque alors $X_0 = 1$, et que X_1, X_2, X_3, X_4 s'an-

(*) *Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 317 et 358.

nulent. Il en est de même quand on fait

$$x = 1, 2, 3, 4.$$

Donc l'expression

$$X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - 1,$$

qui est du quatrième degré tout au plus, et qui s'annule pour cinq valeurs différentes de la variable, est identiquement nulle, et l'on a

$$X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1,$$

comme l'a démontré M. Gerono.

Le coefficient de Δu_0 est divisible par x, puisque X_1, X_2, X_3, X_4 s'annulent pour $x = 0$. Si l'on divise ce coefficient par x, le quotient

$$\frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4}{x},$$

qui est du troisième degré seulement, se réduit à 1 pour $x = 1, 2, 3, 4$. Donc ce quotient est constant et égal à 1. On a donc

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = x.$$

Le coefficient de $\Delta^2 u_0$ s'annule pour $x = 0$ et pour $x = 1$. Le quotient

$$\frac{X_2 + 3X_3 + 6X_4}{x(x-1)},$$

qui est du second degré, se réduit à $\frac{1}{2}$ pour les trois valeurs 2, 3, 4 de x. Donc ce quotient est égal à $\frac{1}{2}$. On a donc

$$X_2 + 3X_3 + 6X_4 = \frac{x(x-1)}{1.2}.$$

On prouverait de même que l'on a

$$X_3 + 4X_4 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3},$$

$$X_4 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4};$$

donc on a bien

$$f(x) = u_0 + \frac{x}{1}\Delta u_0 + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0,$$

ce qui est la formule de Newton.

Il est vrai que cette formule n'est démontrée que pour le cas d'une fonction du quatrième degré. Mais il est facile de s'assurer que la loi trouvée pour les coefficients de Δu_0, $\Delta^2 u_0$, etc., est générale. En effet, supposons que m soit le degré de la fonction $f(x)$, p étant un nombre moindre que m, le coefficient de $\Delta^p u_0$ sera, d'après ce qui précède,

$$X_p + (p+1)X_{p+1} + \frac{(p+2)(p+1)}{1.2}X_{p+2}$$
$$+ \frac{(p+3)(p+2)(p+1)}{1.2.3}X_{p+3} + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}X_m.$$

Ce polynôme est évidemment divisible par x, $x-1$, $x-2$, $x-p+1$, et son quotient par

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)$$

est égal à $\frac{1}{1.2.3\ldots p}$ pour $x = p,\ p+1,\ p+2, \ldots,\ m$, c'est-à-dire pour un nombre de valeurs supérieur à son degré. Donc le quotient a une valeur constante et le coefficient de $\Delta^p u_0$ est

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)}{1.2.3\ldots p}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. L'égalité identique

$$X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 1,$$

démontrée par M. Gerono pour le cas où les valeurs x_0, $x_1, \ldots, x_4$ forment une progression arithmétique, est vraie quelles que soient ces quantités, comme on le voit en répétant le raisonnement fait plus haut et qui est celui de M. Gerono. Comme toutes les parties du premier membre de cette identité sont du quatrième degré, il faudra donc qu'en faisant la réduction des termes, les coefficients de x^4, x^3, x^2, x disparaissent et que le terme tout connu se réduise à 1. De là, les identités suivantes, où pour plus de simplicité, on a remplacé x_0, x_1, etc., par des lettres sans indice :

$$\sum \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} = 0,$$

$$\sum \frac{b+c+d+e}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} = 0,$$

$$\sum \frac{bc+bd+be\ldots}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} = 0,$$

$$\sum \frac{bcd+bce+bde+cde}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} = 0,$$

$$\sum \frac{bcde}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} = 1.$$

On aura des identités analogues pour un nombre quelconque de lettres. Par exemple, dans le cas de trois quantités, on aurait

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0,$$

$$\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{a+c}{(b-a)(b-c)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}=0,$$

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 569

(voir page 111);

PAR M. ED. CORNU,
Chasseur au 10e bataillon de chasseurs à pied,

ET M. CUENOUD, DE LAUSANNE.

Soit ABD le triangle rectangle en B, si l'on décrit une circonférence sur AB comme diamètre, et soit E l'intersection de cette circonférence sur la droite AD; on a par hypothèse

$$AE = BD.$$

Or

$$\overline{AB}^2 = AD.AE,$$

d'où

$$\overline{AB}^4 = \overline{AD}^2 \times \overline{AE}^2,$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2;$$

donc

$$(1) \qquad \overline{AB}^4 = \left(\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2\right)\overline{AE}^2.$$

Posant

$$AE = x,$$

le rayon étant supposé égal à 1, l'équation (1) donne

$$x^4 + 4x^2 - 16 = 0,$$

$$x = \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}.$$

Or

$$\sqrt{5} = 2,23606797;$$

en effectuant on trouve

$$x = 1,57230.$$

La longueur d'un quadrant est

$$\frac{\pi}{2} = 1,57079$$

qui ne diffère pas de 2 millièmes de la longueur de la corde AE. C. Q. F. D.

QUESTION 572

(voir p. 112);

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE

$$L.2 = 4\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots\right);$$

PAR M. A. PRINZ,
Etudiant en mathématiques à l'Université d'Iena.

En posant généralement

$$S = \left[\frac{1}{a(a+b)(a+2b)} + \frac{1}{(a+4b)(a+5b)(a+6b)} + \ldots\right],$$

on a

$$S=\frac{1}{2b}\left[\frac{1}{a(a+b)}-\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\frac{1}{(a+4b)(a+5b)}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(a+5b)(a+6b)}+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{2b^2}\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+4b}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{a+5b}-\frac{1}{a+5b}+\frac{1}{a+6b}+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{2b^2}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+4b}+\ldots\right]$$
$$-\frac{1}{b^2}\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+5b}+\frac{1}{a+9b}+\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{2b^2}\int_0^1 (x^{a-1}+x^{a+2b-1}+x^{a+4b-1}+\ldots)\,dx$$
$$-\frac{1}{b^2}\int_0^1 (x^{a+b-1}+x^{a+5b-1}+x^{a+9b-1}+\ldots)\,dx$$

$$=\frac{1}{2b^2}\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1-x^{2b}}\,dx-\frac{1}{b^2}\int_0^1 \frac{x^{a+b-1}}{1-x^{4b}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2b^2}\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1+x^{2b})-2x^{a+b-1}}{1-x^{4b}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2b^2}\int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{a+2b-1}-2x^{a+b-1}}{1-x^{4b}}\,dx.$$

Dans le cas particulier de la question 572, $a=b=1$,

et

$$S = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1+x^2-2x}{1-x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x}{1+x+x^2+x^3}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x-1}{x^3+x^2+x+1}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+1},$$

d'où

$$S = \frac{1}{2}\text{L}.(x+1)_0^1 - \frac{1}{4}\text{L}.(x^2+1)_0^1,$$

$$S = \frac{1}{2}\text{L}2 - \frac{1}{4}\text{L}2 = \frac{1}{4}\text{L}.2.$$

Donc

$$\text{L}2 = 4.S = 4\left[\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots\right].$$

C. Q. F. D.

On peut traiter de même les cas ou l'on aurait $a = 1$, $b = 2$; $a = 2$, $b = 1$; etc.

SOLUTION DE LA QUESTION 532 (*)

(voir page 248);

PAR M. HENRI PIGEON,
Elève du lycée de Strasbourg.

Veuillez me permettre de remarquer que l'énoncé de la question 532 est inexact, Huygens dit en effet dans l'édition *s'Gravesande* que j'ai de ses œuvres :

(*) Comment concilier ceci avec la solution page 274?

Omnis circulus major (*) *est polygono æqualium laterum sibi inscripto et triente excessus quo id polygonum superat aliud inscriptum subduplo laterum numero.* (De circuli magnitudine.)

Voici de cette proposition une démonstration qui n'est à la vérité que celle de Huygens abrégée et modifiée.

Soient AB le côté du polygone régulier inscrit de n côtés, AC le côté du polygone régulier de $2n$ côtés et O le centre du cercle.

Il faut démontrer que l'on a

$$\text{secteur AOB} > \text{AOBC} + \frac{1}{3}\,\text{ABC}$$

ou

$$\text{segments (AMC} + \text{BNC)} > \frac{1}{3}\,\text{ACB},$$

ce qui se fait voir de la manière suivante.

Lemme. Si dans un segment, moindre qu'un demi-cercle, on inscrit le triangle maximum ABC et ensuite, dans les deux segments ainsi formés, les triangles maximums ADB, BEC, le triangle ABC inscrit en premier lieu sera moindre que huit fois l'un des triangles inscrits en second lieu.

On a

$$AB < 2BD;$$

d'où

$$\overline{AB}^2 < 4\overline{BD}^2;$$

abaissant sur les parallèles DE, AC la perpendiculaire BFG, on a

$$BG < 4BF,$$

(*) L'énoncé de la question 532 impliquant le contraire.

car on sait que

$$\frac{AB^2}{BD^2} = \frac{BG}{BF}.$$

En outre on a

$$AC < 2AB = 2DE,$$

d'où *componendo*

$$AC \times BG < 8DE \times BF$$

ou bien

$$ABC < 8DBE = 8ABD.$$

C. Q. F. D.

Corollaire I. Le rapport d'un segment moindre qu'un demi-cercle au triangle maximum inscrit dans ce segment est moindre que celui de 4 à 3.

Si, en effet, on inscrit les triangles maximums dans les segments formés successivement, a étant l'aire du premier, les autres seront moindres respectivement, d'après le lemme précédent, que

$$\frac{a}{8}, \quad \frac{a}{8^2}, \quad \frac{a}{8^4}, \ldots,$$

et comme le nombre des triangles correspondant à ces valeurs va toujours se doublant, il s'ensuit qu'il y en a 2 des premiers, 2^2 des seconds, 2^3 des troisièmes, 2^4 des quatrièmes, etc.

De sorte que la somme limite de tous ces triangles, laquelle somme n'est autre chose que le segment considéré, est moindre que

$$a + \frac{2}{8}a + \frac{2^2}{8^2}a + \frac{2^3}{8^3}a + \frac{2^4}{8^4}a + \ldots$$

ou moindre que

$$\frac{a}{1 - \frac{2}{8}} = \frac{4}{3}a.$$

C. Q. F. D.

Corollaire II. On a

$$AMC + ANC > \frac{1}{3} ABC.$$

De ce que

$$\text{segment AMCB} > \frac{4}{3} ABC, \text{ d'après le corollaire I},$$

il résulte que

$$ABC + AMC + BNC > ABC + \frac{1}{3} ABC,$$

d'où

$$AMC + BNC > \frac{1}{3} ABC.$$

C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 570

(voir p. 111);

Par M. C. KESSLER,
Elève du lycée Saint-Louis.

Deux ellipses homofocales sont l'une inscrite à un triangle et l'autre circonscrite au même triangle; on a la relation suivante entre les demi grands axes et l'excentricité

$$\alpha^8 - 4\alpha^6 a^2 + 6\alpha^4 a^2 c^2 - 4\alpha^2 a^2 c^4 + a^4 c^4 = 0.$$

(Mention.)

Cette relation ne me semble pas exacte.

On sait que lorsque deux coniques jouissent de la propriété qu'un triangle inscrit à l'une est en même temps circonscrit à l'autre, il existe une infinité d'autres triangles inscrits à la première conique et circonscrits à la seconde, proposition qui du reste s'applique à tout polygone (Poncelet).

Si donc je cherche la condition pour que les coniques soient telles, qu'un triangle inscrit ABC à l'une ayant un de ses sommets à l'extrémité A du grand axe $2a$ de l'ellipse extérieur, soit en même temps circonscrit à l'autre conique, j'exprimerai évidemment en même temps que les deux coniques jouissent de la même propriété pour une infinité d'autres triangles.

Si M $(x'y')$, point de l'ellipse intérieure de grand axe $2a$, est le point de contact de la tangente AB, le coefficient angulaire de cette droite est $-\frac{(\alpha^3 - c^2)x'}{\alpha^2 y'}$. Or

$$x' = \frac{\alpha^2}{a},$$

$$y' = \frac{1}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2 - c^2)\left(\alpha^2 - \frac{\alpha^4}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\sqrt{(\alpha^2 - c^2)(a^2 - \alpha^2)}.$$

Du reste

$$AQ = (a + \alpha), \quad BQ = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2};$$

Q est le point de contact du côté BC du triangle avec l'ellipse intérieure.

Le triangle rectangle ABQ qui donne

$$\overline{BQ}^2 = \overline{AQ}^2 \operatorname{tang}^2 BAQ,$$

fournira donc la relation

$$\frac{(a^2 - c^2)}{a^2}(a^2 - \alpha^2) = \pm (a + \alpha)^2 \frac{(\alpha^2 - c^2)\frac{\alpha^4}{a^2}}{\frac{\alpha_4}{a^2}(x^2 - c^2)(a^2 - \alpha^2)},$$

$$\frac{(a^2-c^2)(a^2-\alpha^2)}{a^2}=\frac{(a+\alpha)^2(\alpha^2-c^2)}{(a^2-\alpha^2)},$$

$$(a^2-c^2)(a-\alpha)^2=\alpha^2(\alpha^2-c^2),$$

relation du second degré essentiellement différente de celle qui est proposée; elle s'écrit encore

$$\alpha^2c^2+2a\alpha(a^2-c^2)-a^4=0.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 588

(voir p. 141);

PAR M. C. KESSLER,
Elève du lycée Saint-Louis.

Soient T, T′ les points de contact des deux tangentes menées à une ellipse d'un point quelconque O, et soient F, F′ les foyers de la courbe. Désignons par d, d' les deux demi-diamètres parallèles à OT, OT′, et posons

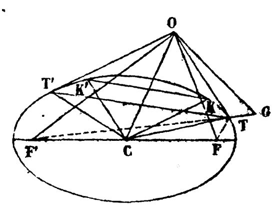
$$OT=t,\quad OT'=t',\quad FO=\rho,\quad F'O=\rho',$$

alors on aura

$$tt'+dd'=\rho\rho'.$$

(STREBOR)

Soient CK, CK′ les diamètres parallèles à OT, OT′.



Le calcul montre aisément que si l'on joint KK′, CT, CT', TT', les deux triangles CKK', CTT' ont des surfaces égales, et du reste on le voit plus rapidement en considérant l'ellipse comme la projection d'un cercle. Si l'on désigne par θ l'angle TOT', l'aire du quadrilatère TOT'C est

$$\frac{(tt' + dd')\sin\theta}{2}.$$

Je mène TF, TF' et je prolonge cette dernière ligne d'une longueur TG égale à TF; le triangle GOF' équivaut à la somme des triangles GOT, OF'T et a pour mesure $\frac{pp' \sin\theta}{2}$; or les trois triangles GOT, OF'T, COT ont même base OT, et de plus la perpendiculaire partant de C est, comme on voit, la demi-somme des perpendiculaires abaissées de F' et G sur OT; donc

$$\text{COT} = \frac{1}{2}\,\text{GOF}'$$

de même

$$\text{COT}' = \frac{1}{2}\,\text{GOF}';$$

d'où

$$\text{quadril. TOT}'\text{C} = \text{triangle F}'\text{OG}$$

ou

$$tt' + dd' = pp.$$

On voit par là aussi que

$$\text{COT} = \text{COT}'.$$

Note. M. A. Lafon, professeur à la Faculté de Nancy, vient de publier : *Gergonne, sa vie, ses travaux*, in-8 de 50 pages; Nancy. A la fin est la liste complète de tous les Mémoires de Gergonne.

SOLUTION DE LA QUESTION 4

(voir p. 100) ;

PAR M. JAUFROID,
Professeur au lycée de Nice.

---

x, y, z étant les trois côtés d'un triangle, si l'on a la relation

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3m^3,$$

trouver l'aire maximum.

La formule qui donne la surface d'un triangle en fonction des côtés, étant développée, donne

$$16s^2 = 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4.$$

Prenant pour variables indépendantes x et y, les équations

$$\frac{ds}{dx} = 0, \quad \frac{ds}{dy} = 0$$

conduisent sans difficulté aux équations

$$z(z^2 + y^2 - x^2) - x(x^2 + y^2 - z^2) = 0,$$
$$z(z^2 + x^2 - y^2) - y(x^2 + y^2 - z^2) = 0,$$

faisant en sorte que dans chaque parenthèse il y ait le trinôme $x^2 + y^2 + z^2$. Ces équations se tranforment dans les suivantes

$$[y^2 + (x + z)^2](z - x) = 0,$$
$$[x^2 + (y + z)^2](y - z) = 0,$$

qui admettent pour solution réelle

$$x = y = z,$$

et, en vertu de $x^3+y^3+z^3=3m^3$,

$$x=y=z=m,$$

et par suite

$$s=\frac{m^2\sqrt{3}}{4}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 582

(voir p. 139);

Par M. JAUFROID,

Et M. M. BLANCHÉ-ARRAULT,
Elève du lycée Louis-le-Grand.

Soit V un des foyers d'une hyperbole équilatère quelconque tangente à une ellipse donnée et concentrique avec elle. En supposant que le point de contact de ces deux courbes varie, le rectangle FV.F′V, F, F′ étant les foyers de l'ellipse, conservera une valeur constante.

Solution.

$$2xy=x'^2,$$

équation de l'hyperbole, ses asymptotes étant prises pour axes, $x'=y'$ étant les coordonnées du foyer situé dans la première région.

$$\left.\begin{array}{l} a^2\cos^2\alpha \\ +b^2\sin^2\alpha \end{array}\right| y^2+2c^2\sin\alpha\cos\alpha\, xy+\left.\begin{array}{r} a^2\sin^2\alpha \\ +b^2\cos^2\alpha \end{array}\right| x^2-a^2b^2=0,$$

équation de l'ellipse donnée, ses demi-axes étant a et b, l'asymptote axe des x faisant un angle α avec son grand axe : les coordonnées de ses foyers sont

$$\left.\begin{array}{l} x = c\cos\alpha \\ y = -c\sin\alpha \end{array}\right\} \text{pour F,}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -c\cos\alpha \\ y = c\sin\alpha \end{array}\right\} \text{pour F}'.$$

La condition de tangence des deux courbes conduit à

$$(1) \qquad 4x'^4 + 8c^2 \sin\alpha\cos\alpha\, x'^2 - 4a^2b^2 = 0,$$

ce qui détermine les foyers de l'hyperbole, et on a

$$\overline{\text{FV}}^2 . \overline{\text{F}'\text{V}}^2 = 4x'^4 + 8c^2\sin\alpha\cos\alpha\, x'^2 + c^4 = c^4 + 4a^2b^2,$$

en vertu de l'équation (1). C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION 580

(voir p. 139).

PAR M. JAUFROID.

En posant

$$u^2 = x,$$

la première des équations de M. Lamé devient

$$x^3 - 3A^2x^2 + 3A^4(1-\gamma^2)x - A^6(1 - 3\gamma^2 + 2\gamma^3) = 0;$$

le dernier terme s'annulant pour $\gamma = 1$, se décompose facilement en facteurs. Ce qui permet de découvrir facilement que les racines sont

$$x' = x'' = A^2(1-\gamma), \quad x''' = A^2(1+2\gamma).$$

On peut aussi faire disparaître le second terme, ce qui donne

$$y^3 - 3A^4\gamma^2 y - 2A^6\gamma^3 = 0;$$

on peut l'écrire de la manière suivante

$$(y^3 - A^4\gamma^2 y) - (2A^4\gamma^2 y + 2A^6\gamma^3) - 0$$

ou

$$y(y^2 - A^4\gamma^2) - 2A^4\gamma^2(y + A^2\gamma) = 0,$$

et l'on voit que $y + A^2\gamma$ est facteur, d'où

$$y = - A^2\gamma.$$

la solution s'achève facilement.

La deuxième équation proposée a-t-elle été exactement copiée (*)? non, il faut $A^4 C^2 x$

SOLUTION DE LA QUESTION 586

(voir p. 140);

PAR M. CHERPIN,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet),

ET M. F. SIACCI, DE ROME.

Géométrie descriptive. Étant données deux droites A et B dans l'espace, construire une troisième droite qui fasse avec A un angle donné α et avec B un angle β.

(DESGRANGES.)

Soient A et B ces deux droites dans l'espace. Je veux construire une droite qui fasse avec A un angle α et avec B un angle β.

Par un point M pris sur A je mène un droite MB' parallèle à B. Puis je considère MA comme l'axe d'un cône

(*) Oui (LAMÉ, p. 51). TM.

Théorie analytique de la chaleur

dont l'angle au sommet est α, et MB' comme l'axe d'un cône dont l'angle au sommet est β. Supposons d'abord que

$$\alpha + \beta > AMB.$$

Dans ce cas les deux cônes se couperont suivant deux arêtes faisant avec A et avec B' les angles demandés. Cela posé, soit MR une de ces arêtes; par un point K pris sur MB je mène une droite KR' parallèle à MR et je fais passer un plan par KB et par KR'. Ce plan coupe la droite A suivant un plan P. Je mène PP' parallèle à MR et je dis que la droite PP' est la droite cherchée. En effet, PP' est parallèle à MR; donc les angles AMR et APP' sont égaux entre eux et égaux à α. Maintenant BK est parallèle à B'M, PP' est parallèle à MR. Donc

$$PP'B = RMB' = B;$$

il y aura donc deux solutions.

Si

$$\alpha + \beta = AMB',$$

il n'y aura plus qu'une solution; si

$$\alpha + \beta < AMB',$$

il n'y aura plus de solution.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 587

(voir p. 140);

PAR M. BLANCHÉ-ARRAULT,
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet),
ET M. C. KESSLER,
Élève du lycée Saint-Louis.

Quelle est la surface engendrée par une droite assujettie à glisser sur deux droites A et B et telle, que dans chacune de ses positions l'angle qu'elle fait avec A est égal à l'angle qu'elle fait avec B.

Prenons pour axe des z la plus courte distance des deux droites, pour origine le milieu de celle-ci et pour axe des x et des y les bissectrices de l'angle des deux droites données.

Si l'on désigne par $2c$ la plus courte distance, les équations des deux droites données sont

$$(1)\qquad \begin{cases} z = c, \\ y = mx; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} z = -c, \\ y = -mx. \end{cases}$$

Une droite quelconque prise à volonté a pour équations

$$(3)\qquad \frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma}.$$

En désignant par $\alpha\beta\gamma$ les angles que fait cette droite avec les axes et par $x_1 y_1$ les coordonnées d'un point quelconque du plan des xy, si l'on veut que la droite (3) rencontre la droite (1), il suffit d'exprimer que les quatre équations de ces deux droites ont un système commun de solution, ce qui donne une équation de condition

$$A_1 = 0.$$

Si l'on exprime que la génératrice rencontre la droite (2), on aura encore une équation de condition

$$B_1 = 0.$$

Actuellement exprimons que la droite satisfait à la condition énoncée de faire avec la droite A le même angle qu'avec la droite B. Si nous désignons par α', β', α'', β'' les angles que chacune de ces droites fait avec les axes des x

et des y, nous aurons

$$\cos\alpha' = \pm \cos\alpha'',$$
$$\cos\beta' = \pm \cos\beta''.$$

Par conséquent la condition qui exprime que l'angle de la génératrice avec A est le même qu'avec B se réduit à

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' = \pm \cos\alpha \cos\alpha' \pm \cos\beta \cos\beta'.$$

Ces quatre équations se réduisent à deux. En effet, si l'on prend les deux signes $+$ dans le second membre, elle se réduit à une identité; si l'on prend les deux signes $-$, on a

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' = 0,$$

ou, remplaçant $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$ par leurs valeurs en fonction de m,

$$\cos\alpha + m\alpha\beta = 0.$$

D'ailleurs $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ est égal à l'inverse du coefficient angulaire de la projection de la droite (3) sur le plan des xy; donc cette relation exprime que cette projection et par suite la droite (3) est perpendiculaire sur la droite mx, condition qui ne peut être réalisée que pour l'axe des z. Les deux seules équations relatives à la question sont donc

$$\cos\alpha \cos\alpha' = 0 \quad \text{et} \quad \cos\alpha = 0,$$
$$\cos\beta \cos\beta' = 0 \quad \text{et} \quad \cos\beta = 0.$$

La première exprime que la génératrice se meut dans un plan perpendiculaire à l'axe des zx; donc la surface engendrée est celle d'une droite assujettie à glisser sur deux autres exactement parallèles à un plan fixe; donc le lieu est un *paraboloïde hyperbolique*. De même

$$\cos\beta = 0$$

exprime que la génératrice demeure parallèle au plan des zx; donc la surface engendrée est encore un *paraboloïde hyperbolique* ayant le plan des zx pour plan directeur. Si on voulait avoir leurs équations, il suffirait de considérer successivement les équations

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0,$$

puis de les joindre aux relations

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0,$$

ainsi qu'aux équations de la génératrice. L'élimination de x_1, y_1, $\alpha\beta\gamma$ donnera les équations des deux paraboloïdes. On trouve ainsi facilement :

$$cy = mzx \quad \text{et} \quad mcx = zy;$$

ce qui fait voir que les axes de coordonnées ox, oy, oz appartiennent à la surface, circonstance évidente à priori.

Note. M. C. Kessler donne aussi une solution géométrique fondée sur ce que la surface cherchée est engendrée par une droite glissant sur deux autres droites et restant parallèle au plan bissecteur de l'angle de ces deux droites.

MM. Martin, Maury, Cherpin, Dangin, élèves du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet), ont aussi envoyé des solutions à peu près identiques.

SOLUTION DE LA QUESTION 569

(voir p. 111);

PAR M. BLANCHÉ-ARRAULT,
Elève du lycée Louis-le-Grand,

ET MM. CORNU ET CUENOUD, DE LAUSANNE.

Étant donné un triangle rectangle ABC, sur AB, comme diamètre, on décrit une demi-circonférence qui coupe l'hypoténuse AC en un point E; si l'on a

$$AE = BC,$$

alors AE est égal au quadrant de la circonférence *à un millième près*.

Désignons par abc les trois côtés, c le côté AB et b le côté BC ou son égal AE; soit h la hauteur BE du triangle, nous avons la relation

$$bc = ah \quad \text{ou} \quad b^2c^2 = a^2h^2.$$

Comme le triangle rectangle donné est rectangle ainsi que le triangle ABE, nous avons

$$b^2c^2 = (b^2 + c^2)(b^2 - c^2)$$

ou

$$b^4 - b^2c^2 - c^4 = 0,$$

équation d'où l'on tire

$$b = \frac{c\sqrt{\sqrt{5} - 1}}{2}.$$

On sait que

$$\sqrt{5} = 2,2360679774\ldots;$$

d'où il suit que

$$\frac{\sqrt{\sqrt{s}-1}}{2} = 0,7861513\ldots.$$

Considérons la différence entre b et le quadrant du cercle, c'est-à-dire entre b et $\frac{\pi c}{4}$, il vient

$$b - \frac{\pi c}{4} = c\left(\frac{\sqrt{\sqrt{s}-1}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= c\,(0,7861513\ldots - 0,785398\ldots),$$

d'où

$$b - \frac{\pi c}{4} = c\,(0,0007532).$$

D'où l'on voit que la différence entre le côté AE ou b et le quadrant du cercle est plus petite qu'un millième.

SOLUTION DE LA QUESTION 584

(voir p. 140);

PAR M. MENTION,
Professeur.

En admettant la notion du *cercle focal*, le théorème 584 de M. Faure se démontre instantanément.

Je rappellerai d'abord que la distance du point de concours de deux tangentes à une conique aux quatre rayons vecteurs de contact est le *rayon focal* (*). La surface d'un triangle circonscrit s'exprime par $\frac{kk'k''}{p}$ (p para-

(*) *Voir* t. XVII, p. 322.

mètre, k, k', k'' les rayons focaux correspondants aux trois sommets).

Il s'agit de prouver que

$$8s = \left(-\frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right)\cdots$$

Or

$$\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{3}}} = \frac{\cos i}{p^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{\beta^{\frac{1}{3}}} = \frac{\cos i'}{p^{\frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{\gamma^{\frac{1}{3}}} = \frac{\cos i''}{p^{\frac{1}{3}}},$$

i, i', i'' étant les angles des normales relatives aux points de contact avec les rayons vecteurs.

Maintenant il est clair que

$$a = \frac{k' + k''}{\cos i}, \quad b = \frac{k + k''}{\cos i'}, \quad c = \frac{k + k'}{\cos i''}.$$

Donc

$$\frac{b}{\beta^{\frac{1}{3}}} + \frac{c}{\gamma^{\frac{1}{3}}} - \frac{a}{\alpha^{\frac{1}{3}}} = 2k, \ldots,$$

ainsi l'on retombe sur

$$S = \frac{kk'k''}{p}.$$

Je ne vois pas comment, en dehors du procédé de relations métriques qui a manifestement conduit l'auteur à ce théorème, on éviterait d'inextricables calculs, sans le cercle focal.

RELATIONS ENTRE TROIS DIAMÈTRES CONJUGUÉS D'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. HOUSEL.

Considérons la surface rapportée à son centre comme origine (ce qui ne changera rien à la généralité des résultats relatifs aux directions) et soit OM un diamètre représenté par

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

L'équation du plan diamétral qui divise en parties égales les cordes parallèles à cette droite sera

$$a(\mathrm{A}x+\mathrm{B}''y+\mathrm{B}'z)+b(\mathrm{A}'y+\mathrm{B}''x+\mathrm{B}z)$$
$$+c(\mathrm{A}''z+\mathrm{B}'x+\mathrm{B}y)=0.$$

Mais comme ce plan contient le second diamètre représenté par

$$\frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'},$$

tout se réduit à

$$a(\mathrm{A}a'+\mathrm{B}''b'+\mathrm{B}'c')+b(\mathrm{A}'b'+\mathrm{B}''a'+\mathrm{B}'c)$$
$$+c(\mathrm{A}''c'+\mathrm{B}'a'+\mathrm{B}b')=0$$

ou bien

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}aa'+\mathrm{A}'bb'+\mathrm{A}''cc'+\mathrm{B}(bc'+b'c)+\mathrm{B}'(ac'+a'c)\\ \qquad\qquad\qquad +\mathrm{B}''(ab'+a'b)=0,\end{array}\right.$$

équation symétrique.

Le troisième diamètre OM″ donnera de même

$$(2)\quad \begin{cases} Aaa'' + Abb'' + A''cc'' + B(bc'' + b''c) + B'(ac'' + a''c) \\ \qquad + B''(ab'' + a''b) = 0. \end{cases}$$

Mais si, de plus, OM′ et OM″ sont conjugués dans leur plan, MOM′ sera le plan diamétral correspondant à OM″, et nous aurons de même

$$(3)\quad \begin{cases} Aa'a'' + A'b'b'' + A''c'c'' + B(b'c'' + b''c') \\ \qquad + B'(a'c'' + a''c') \\ \qquad + B''(a'b'' + a''b') = 0. \end{cases}$$

équation dont la symétrie prouve que MOM″ est aussi le plan diamétral correspondant à OM′.

Ainsi les équations (1), (2), (3) sont nécessaires et suffisantes pour que OM, OM′, OM″ fassent un système de diamètres conjugués.

DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS D'UN PARABOLOIDE;

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Étant donnée l'équation d'une surface du second degré rapportée à des axes quelconques et même obliques, on sait trouver tous les éléments de cette surface si elle a un centre. Nous allons résoudre le même problème pour un paraboloïde, question qui n'a pas encore été, à ce que nous croyons, traitée jusqu'à présent d'une manière complète.

I. Soit

$$(1)\quad \begin{cases} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz \\ \qquad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0 \end{cases}$$

l'équation d'une surface quelconque du second degré; soient μ et ν les coefficients angulaires d'un de ses axes principaux, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} S &= \frac{A\mu + B''\nu + B'}{\mu + \nu\cos xy + \cos xz} = \frac{A'\nu + B + B''\mu}{\nu + \mu\cos xy + \cos yz} \\ &= \frac{A'' + B\nu + B'\mu}{1 + \mu\cos xz + \nu\cos yz}. \end{aligned}\right.$$

Mais, pour l'axe diamétral d'un paraboloïde, $S = 0$; donc

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &A\mu + B''\nu + B' = 0, \\ &A'\nu + B + B''\mu = 0, \\ &A'' + B\nu + B'\mu = 0. \end{aligned}\right.$$

On en tire

$$\mu = \frac{A'B' - BB''}{B''^2 - AA'}, \quad \nu = \frac{AB - B'B''}{B''^2 - AA'},$$

ainsi que la relation connue

$$AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0,$$

qui donne aussi

$$(4)\qquad (AB - B'B'')^2 = (B'^2 - AA'')(B''^2 - AA'),$$

avec deux autres relations analogues.

On en conclut que le dénominateur des valeurs de μ et de ν peut toujours être supposé différent de zéro, car l'on supposera, en changeant, s'il le faut, x en y ou en z, et réciproquement, que $B''^2 - AA'$ est celle des trois quantités $B^2 - A'A''$, $B'^2 - AA''$, $B''^2 - AA'$ qui n'est pas nulle. En effet, si toutes trois étaient nulles, l'équation (4) et les relations analogues prouvent que l'on aurait aussi

$$AB - B'B'' = 0, \quad A'B' - BB'' = 0, \quad A''B'' - BB' = 0:$$

alors on reconnaît que la surface dégénérerait en cylindre.

L'équation (4) montre en passant que ces trois quantités sont généralement de même signe, puisque le produit de deux d'entre elles est un carré.

II. Soient x', y', z' les coordonnées du sommet, le plan tangent en ce point est perpendiculaire à l'axe diamétral; on a donc

$$\frac{Ax' + B''y' + B'z' + C}{h} = \frac{A'y' + B''x' + Bz' + C'}{h'}$$
$$= \frac{A''z' + B'x' + By' + C''}{h''},$$

relations dans lesquelles

$$h = \mu + \nu \cos xy + \cos xz,$$
$$h' = \nu + \mu \cos xy + \cos yz,$$
$$h'' = 1 + \mu \cos xz + \nu \cos yz.$$

Soit ρ la valeur commune des rapports précédents, on a

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Ax' + B''y' + B'z' + C = \rho h, \\ A'y' + B''x' + Bz' + C' = \rho h', \\ A''z' + B'x' + By' + C'' = \rho h''. \end{array} \right.$$

Multiplions la première de ces égalités par μ, la seconde par ν, et ajoutons-les toutes trois, il reste

$$C\mu + C'\nu + C'' = \rho(h\mu + h'\nu + h'')$$

et

$$\rho = \frac{C\mu + C'\nu + C''}{1 + \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cos xy + 2\mu \cos xz + 2\nu \cos yz},$$

quantité connue et finie, car elle a pour dénominateur le carré de la diagonale du parallélipipède formé en prenant sur les axes des x, des y et des z les quantités μ, ν, et 1.

De plus ρ n'est jamais nul; autrement les équations (5) deviendraient celles qui donnent le centre : comme il n'y a pas de centre unique, la surface en aurait une infinité et serait un cylindre.

Comme rien n'indique encore que le point représenté par x', x', z' soit sur la surface, les équations (5) se réduisent aux deux premières, qui donnent

$$\begin{aligned} & x'(B''^2 - AA') + z'(BB'' - A'B') \\ & \qquad = \rho(B''h' - A'h) + A'C - B''C', \\ & y'(B''^2 - AA') + z'(B'B'' - AB) \\ & \qquad = \rho(B''h - Ah') + AC' - B''B. \end{aligned}$$

En divisant par $B''^2 - AA'$, qui n'est jamais nul, on a aussi

$$(6) \qquad x' - \mu z' = R, \quad y' - \nu z' = R',$$

R et R' étant connus.

III. Dans l'équation (1), remplaçant A, A', A'' par leurs valeurs tirées des équations (3), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{B'}{\mu}(x - \mu z)^2 + \frac{B}{\nu}(y - \nu z)^2 + \frac{B''}{\mu\nu}(\nu x - \mu y)^2 \\ & \qquad = 2Cx + 2C'y + 2C''z + E, \end{aligned}$$

et nous supposerons cette équation accentuée pour les coordonnées du sommet : alors les carrés qu'elle contient sont connus, car

$$\nu x' - \mu y' = R\mu - R'\nu,$$

et il reste

$$(7) \qquad Cx' + C'y' + C''z' = H,$$

égalité dont le second membre est connu et qui achève, avec les équations (6), de *déterminer le sommet par des* *relations du premier degré.* Cependant, si l'on remplace dans l'équation (7) x' et y' par leurs valeurs, le coefficient de z' sera

$$C\mu + C'\nu + C'',$$

et la surface, comme on l'a vu, dégénère en cylindre pour

$$C\mu + C'\nu + C'' = 0.$$

Cette transformation suppose μ et ν différents de zéro : si, par exemple, $\mu = 0$, les équations (3) donnent

$$B' = -B''\nu, \quad A' = -\frac{B}{\nu}, \quad A'' = -B\nu,$$

et l'équation (1) devient

$$Ax^2 + 2B''x(y - \nu z) - \frac{B}{\nu}(y - \nu z)^2$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

Alors

$$x' = R, \quad y' - \nu z' = R',$$

et il reste

$$C'y' + C''z' = H'.$$

Enfin, pour

$$\mu = 0, \quad \nu = 0,$$

les équations (3) donnent

$$B' = 0, \quad B = 0, \quad A'' = 0,$$

et l'équation (1) se réduit à

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + E = 0.$$

Ici

$$x' = R, \quad y' = R',$$

il reste donc

$$C''z' = H''.$$

IV. Pour trouver les directions des deux autres axes, il faut recourir à l'équation qui les détermine dans une surface quelconque du second degré. Comme il s'agit d'un paraboloïde, cette équation se réduit au second degré; de plus le terme indépendant, qui est

$$\begin{aligned} & A'A'' - B^2 + AA'' - B'^2 + AA' - B''^2 \\ & \quad + 2\cos xy\,(BB' - A''B'') + 2\cos xz\,(BB'' - A'B') \\ & \quad + 2\cos yz\,(B'B'' - AB), \end{aligned}$$

se transforme, si l'on observe que les équations (3), d'où l'on a déjà tiré,

$$A'B' - BB'' = \mu\,(B''^2 - AA')$$

et

$$AB - B'B'' = \nu\,(B''^2 - AA'),$$

donnent aussi

$$\begin{aligned} A''B'' - BB' &= \nu\,(A'B' - BB'') = \mu\nu\,(B''^2 - AA'), \\ B^2 - A'A'' &= \mu\,(A'B' - BB'') = \mu^2\,(B''^2 - AA'), \\ B'^2 - AA'' &= \nu\,(AB - B'B'') = \nu^2\,(B''^2 - AA'); \end{aligned}$$

cette équation devient donc

$$\begin{aligned} & S^2\,(1 - \cos^2 xy - \cos^2 xz - \cos^2 yz + 2\cos xy\cos xz\cos yz) \\ & - S\left\{\begin{array}{l} A\sin^2 yz + A'\sin^2 xz + A''\sin^2 yx \\ - 2B''(\cos xy - \cos xz\cos yz) \\ - 2B'(\cos xz - \cos xy\cos yz) \\ - 2B(\cos yz - \cos xy\cos xz) \end{array}\right\} \\ & - (B''^2 - AA')\left(\begin{array}{c} 1 + \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cos xy + 2\mu\cos xz \\ + 2\nu\cos yz \end{array}\right) = 0. \end{aligned}$$

Le terme indépendant ne peut être nul, non plus que le coefficient de S^2, qui est le volume du parallélipipède fait sur trois longueurs égales à l'unité et portées sur les axes : ainsi les racines S_1, S_2 ne seront jamais nulles ni infinies. Enfin les équations (2) nous donneront, par exemple,

$$\mu_2 = \frac{(S_2 \cos xz - B')(S_2 - A') - (S_2 \cos yz - B)(S_2 \cos xy - B'')}{(S_2 \cos xy - B'')^2 - (S_2 - A)(S_2 - A')},$$

$$\nu_2 = \frac{(S_2 \cos yz - B)(S_2 - A) - (S_2 \cos xz - B')(S_2 \cos xy - B'')}{(S_2 \cos xy - B'')^2 - (S_2 - A)(S_2 - A')}.$$

De même S_1 donnera μ_1 et ν_1 : ces valeurs sont indéterminées pour $S_1 = S_2$, quand la surface est de révolution.

V. L'équation du paraboloïde rapporté à ces nouveaux axes sera de la forme

$$Y^2 \pm M^2 X^2 = 2PZ,$$

en prenant l'axe diamétral pour celui des Z. Ce paraboloïde sera elliptique pour le signe supérieur et hyperbolique pour le signe inférieur; le premier cas aura lieu si S_1 et S_2 sont de même signe, et le second cas si ces racines sont de signe contraire. En effet, dans une surface à centre, soient R_1^2 et R_2^2 les carrés des demi-axes principaux comptés sur les directions qui correspondent à S_1 et à S_2, on a

$$R_1^2 S_1 = R_2^2 S_2 :$$

or, dans la surface d'où dérive le paraboloïde, on a

$$M^2 = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{S_1}{S_2},$$

et pour celui-ci on a toujours à la limite

$$M^2 = \frac{S_1}{S_2},$$

en admettant que S_1 corresponde à X et S_2 à Y.

Ainsi on détermine M^2 qui est toujours fini, puisque S_1 et S_2 diffèrent de zéro.

VI. Il reste à connaître P. Pour cela, transportons l'origine au sommet, sans changer la direction des coordonnées, ce qui revient à remplacer x, y et z par $x+x'$, $y+y'$ et $z+z'$: d'après les équations (5), la nouvelle équation de la surface sera

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ &\qquad + 2p(hx + h'y + h''z) = 0. \end{aligned}\right.$$

D'un point de l'axe diamétral, pris à la distance Z du sommet, menons à l'axe des Y une parallèle, pour laquelle $X = 0$, puisqu'elle est dans le plan des ZY, et qui rencontrera la surface en deux points pour lesquels Y aura des valeurs égales et de signe contraire. Pour ces valeurs

$$P = \frac{Y^2}{2Z},$$

et il faut calculer Z et Y.

Soient

$$z_1, \quad x_1 = \mu z_1 \quad \text{et} \quad y_1 = \nu z_1$$

les coordonnées de ce point pris sur l'axe diamétral ; il est clair que

$$Z = z_1 \sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cos xy + 2\mu \cos xz + 2\nu \cos yz}.$$

Les équations de la parallèle seront

$$x - x_1 = \mu_2 (z - z_1), \quad y - y_1 = \nu_2 (z - z_1),$$

d'où l'on tire

$$x = \mu z_1 + \mu_2 (z - z_1),$$
$$y = \nu z_1 + \nu_2 (z - z_1)$$

et

$$z = z_1 + (z - z_1),$$

valeurs qu'il faut substituer dans l'équation (8) en ordonnant par rapport à $z - z_1$. Du reste

$$\mathrm{Y}^2 = (z - z_1)^2 \left(\begin{array}{l} 1 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + 2\mu_2\nu_2 \cos xy \\ + 2\mu_2 \cos xz + 2\nu_2 \cos yz \end{array} \right),$$

et comme on sait que Y doit avoir deux valeurs égales et de signe contraire, il doit en être de même pour $z - z_1$; c'est-à-dire que, dans cette substitution, les termes qui contiennent $z - z_1$ à la première puissance disparaîtront d'eux-mêmes, ce qui dispense de les calculer.

Le terme en z_1^2 disparaîtra aussi, à cause des équations (3), car son coefficient sera

$$\begin{gathered} \mathrm{A}\mu^2 + \mathrm{A}'\nu^2 + \mathrm{A}'' + 2\mathrm{B}\nu + 2\mathrm{B}'\mu + 2\mathrm{B}''\mu\nu \\ = \mu(\mathrm{A}\mu + \mathrm{B}' + \mathrm{B}''\nu) + \nu(\mathrm{A}'\nu + \mathrm{B} + \mathrm{B}''\mu) + \mathrm{A}'' + \mathrm{B}\nu + \mathrm{B}'\mu = 0; \end{gathered}$$

enfin celui de z_1 est

$$2\rho(h\mu + h'\nu + h'') = 2(\mathrm{C}\mu + \mathrm{C}'\nu + \mathrm{C}''),$$

comme on l'a vu plus haut.

Le coefficient de $(z - z_1)^2$ est

$$\mathrm{A}\mu_2^2 + \mathrm{A}'\nu_2^2 + \mathrm{A}'' + 2\mathrm{B}\nu_2 + 2\mathrm{B}'\mu_2 + 2\mathrm{B}''\mu_2\nu_2,$$

et les équations (2) font voir, par un calcul analogue au précédent, que ce coefficient est égal à

$$\mathrm{S}_2(1 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + 2\mu_2\nu_2 \cos xy + 2\mu_2 \cos xz + 2\nu_2 \cos yz).$$

Il reste donc

$$\mathrm{S}_2\mathrm{Y}^2 + 2z_1(\mathrm{C}\mu + \mathrm{C}'\nu + \mathrm{C}'') = 0$$

et

$$\mathrm{Y}^2 = -\frac{2z_1(\mathrm{C}\mu + \mathrm{C}'\nu + \mathrm{C}'')}{\mathrm{S}_2};$$

ensuite

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{C}\mu + \mathrm{C}\nu + \mathrm{C}''}{\mathrm{S}_2\sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu \cos xy + 2\mu \cos xz + 2\nu \cos yz}}.$$

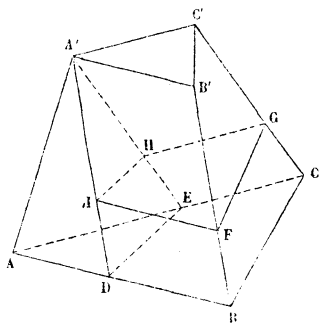
Nous ne considérons pas le signe de P, que l'on prend toujours positif, mais celui de Y^2 est important, car il montre que z_1 correspond à la partie positive de l'axe des Z, si le signe de z_1 est contraire à celui du rapport $\dfrac{C\mu + C'\nu + C''}{S_2}$.

SOLUTION DE LA QUESTION 574

(voir page 113) ;

PAR M. CUENOUD, DE LAUSANNE.

(L'énoncé renferme une faute d'impression dans la



phrase. « paraboloïde décrit par la droite B'C se mouvant, etc.; » il faut lire B'C'.)

Je pose

$$AB = c, \quad A'B' = c', \quad AC = b, \quad A'C' = b',$$
$$\text{Angle } BAC = A.$$

Il faut démontrer que l'on a

$$\left.\begin{array}{l}\text{vol. du}\\ \text{pentaèdre}\end{array}\right\} = \frac{1}{6} h \sin A \left[c\left(b + \frac{1}{2} b'\right) + c'\left(b' + \frac{1}{2} b\right)\right].$$

Les arêtes AB et A′B′ sont évidemment parallèles, ainsi que AC et A′C′, en sorte que l'angle B′A′C′ — BAC = A.

Je mène le plan A′DE parallèle aux deux directrices BB′ et CC′ du paraboloïde. Il coupe les faces ABB′A′ et ACC′A′ suivant les droites A′D et A′E respectivement parallèles à BB′ et CC′. Ce plan décompose le pentaèdre en deux parties, la pyramide triangulaire A′ADE et l'hexaèdre A′DEBCB′C′. J'évalue séparément les volumes de ces deux parties.

$$\text{vol. pyramide A}'\text{ADE} = \frac{1}{3} h.\ \text{surf ADE},$$

$$\text{Surf ADE} = \frac{1}{2}\text{AD}.\text{AE}.\sin\text{A} = \frac{1}{2}(c - c')(b - b')\sin\text{A},$$

d'où

$$(1)\quad \text{vol. pyramide AA}'\text{DE} = \frac{1}{6} h.\sin\text{A}\,(b - b')(c - c').$$

Pour calculer le volume de l'hexaèdre, je partage la hauteur h en un grand nombre de parties égales et je mène par chaque point de division un plan parallèle aux bases ABC, A′B′C′, plan qui coupe le paraboloïde suivant l'une de ses génératrices rectilignes, telle que FG, et l'hexaèdre suivant un quadrilatère tel que IFGH. En construisant sur chacune de ces sections un prisme limité à la section suivante, on aura

$$\text{vol. de l'hexaèdre} = \text{lim. somme des prismes},$$

le nombre des parties en lesquelles on divise la hauteur devenant infiniment grand.

Je désigne par θh l'une des parties de la hauteur, par n le nombre de ces parties et par a_p l'aire de la section IFGH qui passe par le $p^{ième}$ point de division de la hauteur à partir de la base supérieure.

J'ai

$$2\,a_p = \mathrm{IF}\,.\,\mathrm{GH}\sin(\mathrm{IF}\,.\,\mathrm{GH}) + \mathrm{IF}\,.\,\mathrm{IH}\sin(\mathrm{IF}\,.\,\mathrm{IH}) + \mathrm{IH}\,.\,\mathrm{HG}\sin(\mathrm{IH}\,.\,\mathrm{HG}).$$

Or

$$\mathrm{IF} = c', \quad \mathrm{GH} = b',$$
$$\sin(\mathrm{IF}\,.\,\mathrm{GH}) = \sin \mathrm{A},$$
$$\sin(\mathrm{IF}\,.\,\mathrm{IH}) = \sin \mathrm{BDE},$$
$$\sin(\mathrm{IH}\,.\,\mathrm{HG}) = \sin \mathrm{DEC},$$

d'où

$$2\,a_p = b'c'\sin \mathrm{A} + \mathrm{IH}(c'\sin \mathrm{BDE} + b'\sin \mathrm{DEC}).$$

Les triangles semblables A'IH, A'DE donnent

$$\frac{\mathrm{IH}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{A'I}}{\mathrm{A'D}} = \frac{p}{n},$$

d'où

$$\mathrm{IH} = p\,.\,\frac{\mathrm{DE}}{n},$$

et conséquemment

$$2\,a_p = b'c'\sin \mathrm{A} + p\,.\,\frac{\mathrm{DE}}{n}(c'\sin \mathrm{BDE} + b'\sin \mathrm{DEC}).$$

Le triangle ADE donne

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{DE}} = \frac{\sin \mathrm{BDE}}{\sin \mathrm{A}}$$

et

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DE}} = \frac{\sin \mathrm{DEC}}{\sin \mathrm{A}},$$

d'où

$$\mathrm{DE}\sin \mathrm{DEC} = \mathrm{AD}\sin \mathrm{A}$$

et

$$\mathrm{DE}\sin \mathrm{BDE} = \mathrm{AE}\sin \mathrm{A},$$

ou

$$\mathrm{DE}\sin \mathrm{DEC} = (c - c')\sin \mathrm{A}$$

et

$$DE.\sin BDE = (b - b')\sin A.$$

Ces valeurs étant introduites dans la valeur de a_p donnent

$$2a_p = b'c'\sin A + \frac{p}{n}[c'(b - b')\sin A + b'(c - c')\sin A]$$

ou

$$2a_p = \sin A \left\{ b'c' + \frac{p}{n}[c'(b - b') + b'(c - c')] \right\}.$$

Le volume du prisme très-mince qui a pour base a_p et pour hauteur θh est

$$\frac{1}{2}\theta h.\sin A \left\{ b'c' + \frac{p}{n}[c'(b - b') + b'(c - c')] \right\}.$$

En faisant varier p dans cette expression de 1 à n et faisant la somme des résultats obtenus, j'obtiens

$$\begin{aligned} \text{somme des prismes} &= \frac{1}{2}\theta h \,.\, \sin A \left\{ n.b'c' + \frac{n(n+1)}{2.n} \right. \\ &\qquad \left. \times [c'(b - b') + b'(c - c')] \right\} \\ &= \frac{1}{2} n.\theta h.\sin A \left\{ b'c' + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right. \\ &\qquad \left. \times [c'(b - b') + b'(c - c')] \right\}. \end{aligned}$$

Remplaçant $n.\theta h$ par h et passant à la limite, je trouve :

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \left.\begin{matrix}\text{vol. de} \\ \text{l'hexaèdre}\end{matrix}\right\} &= \frac{1}{2}h\sin A\left[b' + \frac{1}{2}(bc' - b'c' + b'c - b'c')\right] \\ &= \frac{1}{4}h.\sin A\,(bc' + b'c). \end{aligned} \right.$$

Je fais la somme des volumes (1) et (2) et je trouve

$$\left.\begin{array}{r}\text{vol. du}\\ \text{pentaèdre}\end{array}\right\} = h \sin A \left[\frac{1}{6}(b - b')(c - c') + \frac{1}{4}(bc' + b'c)\right]$$

$$= \frac{1}{6} h . \sin A \left(bc + b'c' + \frac{1}{2} bc' + \frac{1}{2} b'c\right)$$

$$= \frac{1}{6} h \sin A \left[c\left(b + \frac{1}{2} b'\right) + c'\left(b' + \frac{1}{2} b\right)\right].$$

Le résultat précédent pourrait aussi se mettre sous la forme

$$\frac{1}{6} h \sin A \left[b\left(c + \frac{1}{2} c'\right) + b'\left(c' + \frac{1}{2} c\right)\right].$$

La question 5 du *Mathematical Monthly* me paraît inexacte. En effet, si je calcule le coefficient angulaire de la tangente pour chacune des courbes, ellipse et trajectoire, j'obtiens

$$\text{pour l'ellipse.......} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{by},$$

$$\text{pour la trajectoire...} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{cxy}.$$

Désignant par V l'angle des deux tangentes en l'un des points communs aux deux courbes, j'ai

$$\text{tang V} = \frac{-\dfrac{ax}{by} + \dfrac{1}{cxy}}{1 + \dfrac{ax}{bcxy^2}} = \frac{by - acx^2y}{ax + bcxy^2} = \frac{y}{x} \times \frac{b - acx^2}{a + bcy^2}.$$

Je remplace by^2 par $1 - ax^2$, et je trouve

$$\tang V = \frac{y\,(b - acx^2)}{x.(a + c - acx^2)} = \frac{y}{x} \times \frac{b - acx^2}{b + 2c - acx^2},$$

résultat qui n'est pas égal à $\frac{x}{y}$.

On pourrait obtenir un énoncé analogue à celui reproduit dans les *Annales* en changeant l'équation

$$x = Ce^{-\frac{cy^2}{2}}$$

contre

$$x = Ce^{\frac{cy^2}{2}}$$

et en remplaçant les mots « dont la tangente est $\frac{x}{y}$ » par « dont la tangente est $-\frac{y}{x}$ ».

SOLUTION DE LA QUESTION 567

(voir page 111);

PAR M. E. MARTIN,
Elève du lycée Louis-le-Grand.

Je rappelle l'énoncé de cette question :

Quelle est la probabilité que l'angle aigu formé par deux grands cercles tracés au hasard sur une sphère soit comprise entre m degrés et n degrés?

Je suppose $m < n$. Soient AB, A′B′ les deux grands cercles de la sphère dont le centre est O, P et P′ leurs pôles; l'angle aigu des deux cercles est égal à l'angle aigu POP′. La probabilité cherchée est donc égale à la probabilité que l'angle POP$'$ est compris entre m degrés et n degrés. On peut supposer qu'un des deux pôles, le pôle P par exemple, soit pris à volonté sur la surface. La probabilité pour que le point P$'$ satisfasse à la condition demandée est égale au rapport de la zone engendrée par l'arc MN à celle de la moitié de la sphère, PM et PN étant des arcs de m et de n degrés ou

$$x = \frac{2\pi r^2 (\cos m - \cos n)}{2\pi r} = \cos m - \cos n.$$

Note. Laplace trouve $\frac{\cos m - \cos n}{90^\circ}$ (*Théorie analytique des probabilités*), ce qui semble inexact.

QUESTION.

595. Soit ABCDE un polygone funiculaire; A et E sont fixes; aux points B, C, D sont appliquées dans le plan du polygone les forces P, Q, R; le tout est en équilibre.

D'un point quelconque S dans l'intérieur du polygone on abaisse respectivement sur les côtés AB, BC, CD, DE les perpendiculaires SK, SG, SH, SI; du point K on abaisse sur la direction de P une perpendiculaire rencontrant SG en L; du point L on abaisse une perpendiculaire sur la direction de la force Q rencontrant SH en M; enfin, du point M on abaisse une perpendiculaire sur la direction de la force R, rencontrant SI en N. On a

$$\text{KL} : \text{LM} : \text{MN} :: \text{P} : \text{Q} : \text{R};$$
$$\text{SK} : \text{SL} : \text{SM} : \text{SN} :: \text{tension AB} : \text{tension BC} : \text{tension CD} : \text{tens. DE}.$$

(Jean-Baptiste CLAIRAUT.)

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE (FIN)

(voir t. XX, p. 243);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

CHAPITRE V.

APPLICATIONS.

§ I. — *Polaires réciproques de deux surfaces du second degré qui se coupent suivant deux courbes planes.*

104. La première surface ayant pour équation

$$(1) \qquad S = \mathbf{S}\, a_{rs}\, x_r\, x_s = 0, \qquad (a_{rs} = a_{sr})$$

l'équation de la seconde pourra s'écrire sous la forme

$$(2) \qquad S' = S + 2\,MN = 0;$$

M et N représentant deux plans connus,

$$(3) \qquad \begin{cases} M = m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + m_3\, x_3 + m_4\, x_4 = 0, \\ N = n_1\, x_1 + n_2\, x_2 + n_3\, x_3 + n_4\, x_4 = 0. \end{cases}$$

L'équation générale des surfaces du second degré passant par les courbes d'intersection des deux surfaces S' et S sera

$$(4) \qquad S'' = S + 2\lambda\, MN = 0,$$

λ désignant une constante indéterminée.

105. Ceci posé, cherchons les polaires réciproques des surfaces S et S', et du système des surfaces S''; nous désignerons ces réciproques respectivement par Σ, Σ', Σ''.

Si l'on représente par Δ le discriminant de la surface S, et par α_{rs} les dérivées partielles de Δ, de sorte que

$$(5)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{rs} = \alpha_{sr} = \frac{d\Delta}{da_{rs}}$$

nous aurons pour la réciproque de S (n° 95) :

$$(6)\qquad \Sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{S}\,\alpha_{rs}\,x_r\,x_s.$$

Pour obtenir la réciproque de S′, nous chercherons d'abord la réciproque de S″, et dans le résultat nous ferons $\lambda = 1$. Or la réciproque de S″ est (95) :

$$(7)\qquad \Sigma'' = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda(m_1n_1+m_1n_1) & a_{12}+\lambda(m_1n_2+m_2n_1) & a_{13}+\lambda(m_1n_3+m_3n_1) & a_{14}+\lambda(m_1n_4+m_4n_1) & x_1 \\ a_{21}+\lambda(m_2n_1+m_1n_2) & a_{22}+\lambda(m_2n_2+m_2n_2) & a_{23}+\lambda(m_2n_3+m_3n_2) & a_{24}+\lambda(m_2n_4+m_4n_2) & x_2 \\ a_{31}+\lambda(m_3n_1+m_1n_3) & a_{32}+\lambda(m_3n_2+m_2n_3) & a_{33}+\lambda(m_3n_3+m_3n_3) & a_{34}+\lambda(m_3n_4+m_4x_3) & x_3 \\ a_{41}+\lambda(m_4n_1+m_1n_4) & a_{42}+\lambda(m_4n_2+m_2n_4) & a_{43}+\lambda(m_4n_3+m_3n_4) & a_{44}+\lambda(m_4n_4+m_4n_4) & x_4 \\ x_1+0 & x_2+0 & x_3+0 & x_4+0 & 0 \end{vmatrix}$$

106. Introduisons d'abord les notations suivantes :

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0
\end{vmatrix} \\[2ex]
\beta &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\
n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0
\end{vmatrix} \\[2ex]
\gamma &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\
n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0
\end{vmatrix} \\[2ex]
D &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\
n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

N. B. $\alpha = 0$, $\beta = 0$, sont les conditions pour que les plans M ou N soient tangents à la surface $S = 0$; $D = 0$ est la condition pour que la droite intersection de ces deux plans soit aussi tangente à la surface S.

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \frac{d\gamma}{dn_1} + x_2 \frac{d\gamma}{dn_2} + x_3 \frac{d\gamma}{dn_3} + x_4 \frac{d\gamma}{dn_4}, \\
\mathrm{Q} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \frac{d\gamma}{dm_1} + x_2 \frac{d\gamma}{dm_2} + x_3 \frac{d\gamma}{dm_3} + x_4 \frac{d\gamma}{dm_4},
\end{aligned}\right.$$

P et Q représentent des plans.

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & x_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & x_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & x_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & x_4 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0
\end{vmatrix} \\[1em]
G &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & x_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & x_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & x_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & x_4 \\
n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0
\end{vmatrix} \\[1em]
E &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0
\end{vmatrix} \\[1em]
H &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 & x_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 & x_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 & x_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 & x_4 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\
n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

En appliquant la formule générale bien connue

$$P\frac{d^2P}{da_{rs}da_{r_1s_1}}=\frac{dP}{da_{rs}}\frac{dP}{da_{r_1s_1}}-\frac{dP}{da_{rs_1}}\frac{dP}{da_{r_1s}}$$

on trouve, entre ces déterminants, les relations suivantes qui nous seront d'une grande utilité :

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta\, D = \alpha\beta - \gamma^2; \\ \Delta . E = \alpha Q - \gamma P; \\ \Delta . A = \alpha\Sigma - P^2; \\ \Delta . G = \gamma\Sigma - PQ; \\ \alpha . H = DA - E^2. \end{cases}$$

On conclut de ces dernières égalités

$$(12)\qquad \Delta^2 . H = \Delta D . \Sigma - (\beta P^2 - 2\gamma PQ + \alpha Q^2).$$

Les relations (11) nous conduisent à plusieurs conséquences géométriques :

1°. Le plan E passe par l'intersection des plans P et Q.

2°. La surface A est circonscrite à la réciproque Σ suivant la courbe déterminée par le plan P.

3°. La surface B, obtenue en changeant dans A les m en n, est circonscrite à la réciproque Σ suivant la courbe déterminée par le plan Q.

4°. La surface G coupe la réciproque Σ suivant les deux courbes planes P et Q;

5°. La surface H est circonscrite à la surface A suivant la courbe déterminée par le plan E.

Etc., etc.

107. Occupons-nous maintenant de la recherche de

la réciproque Σ''. Si l'on *développe par colonnes* le déterminant (7) on obtient immédiatement

$$\Sigma'' = \Sigma - 2G\lambda - H\lambda^2. \tag{13}$$

108. En faisant $\lambda = 1$, et en ayant égard aux relations (11) et (12), on trouvera pour la réciproque Σ' de S'

$$\Delta^2 . \Sigma' = \delta^2 \Sigma + [\beta P^2 + 2(\Delta - \gamma) PQ + \alpha Q^2], \tag{14}$$

après avoir posé

$$\delta^2 = (\Delta - \gamma)^2 - \alpha\beta. \tag{15}$$

Enfin, si nous décomposons la parenthèse en facteurs du premier degré, et que nous posions

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{1}{\delta\sqrt{2\beta}}[\beta P + (\Delta - \gamma + \delta) Q], \\ \mathfrak{N} &= \frac{1}{\delta\sqrt{2\beta}}[\beta P + (\Delta - \gamma - \delta) Q], \end{aligned}\right. \tag{16}$$

nous obtiendrons définitivement pour la réciproque de S'

$$\frac{\Delta^2}{\delta^2}\Sigma' = \Sigma + 2\,\mathfrak{M} . \mathfrak{N} = 0. \tag{17}$$

Si l'on se rappelle que la réciproque de S est

$$\Sigma = 0, \tag{18}$$

nous conclurons, à l'inspection de ces deux équations, le théorème suivant :

Lorsque deux surfaces du second degré se coupent suivant deux courbes planes, leurs polaires réciproques se coupent aussi suivant deux courbes planes.

Et comme cas particulier : *Lorsque deux surfaces du second degré sont circonscrites l'une à l'autre, il en est de même de leurs polaires réciproques.*

§ II. — *Équation des cônes circonscrits à deux surfaces du second degré.*

109. Imaginons les cônes circonscrits aux deux surfaces du second degré S et S', puis cherchons le *système réciproque.* Σ et Σ' seront, par exemple, les réciproques de S et S'. Mais, chaque plan tangent *commun* aux deux surfaces S et S' *correspondra* à un point *commun* aux deux réciproques Σ et Σ'; et, puisque les plans tangents à un même cône passent par le même point, les points correspondants seront dans un même plan; donc les deux surfaces Σ et Σ' se couperont suivant deux courbes planes; par suite, les réciproques de Σ et Σ', c'est-à-dire S et S', se couperont aussi suivant deux courbes planes.

Ainsi, *deux surfaces du second degré ne peuvent avoir des cônes tangents communs qu'à la condition de se couper suivant des courbes planes.*

110. Ceci étant admis, considérons les deux surfaces

$$(1)\qquad T=\left\{\begin{array}{l}\alpha_{11}x_1^2+\alpha_{22}x_2^2+\alpha_{33}x_3^2+\alpha_{44}x_4^2+2\alpha_{12}x_1x_2\\+2\alpha_{13}x_1x_3+2\alpha_{14}x_1x_4+2\alpha_{23}x_2x_3\\+2\alpha_{24}x_2x_4+2\alpha_{34}x_3x_4\end{array}\right\}=0,$$

$$(2)\qquad T'=T-2\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}=0$$

qui se coupent suivant deux courbes planes.

Les Δ, α, β, γ, δ, α_{rs}, ont les significations déterminées par les relations (5), (8), (15) du paragraphe précédent; les plans $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ont pour équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{M}=M_1x_1+M_2x_2+M_3x_3+M_4x_4,\\ \mathfrak{N}=N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3+N_4x_4;\end{array}\right.$$

et les M_r, N_r sont définis comme il suit

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} M_r &= \frac{1}{\delta\sqrt{2\beta}}\left[\beta\frac{d\gamma}{dn_r} + (\Delta - \gamma + \delta)\frac{d\gamma}{dm_r}\right];\\ N_r &= \frac{1}{\delta\sqrt{2\beta}}\left[\beta\frac{d\gamma}{dn_r} + (\Delta - \gamma - \delta)\frac{d\gamma}{dm_r}\right].\end{aligned}\right.$$

L'équation générale des surfaces du second degré, T″, passant par l'intersection des deux surfaces T et T′, sera

$$(5)\qquad T'' = T - 2\mu\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{N} = 0.$$

111. Cherchons maintenant les polaires réciproques des surfaces T, T′, T″.

Si l'on désigne par Δ' le discriminant de la fonction T, de sorte que

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta' &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44}\end{vmatrix},\\ \alpha_{rs} &= \frac{d\Delta}{da_{rs}},\end{aligned}\right.$$

on aura, d'après les relations connues sur les *déterminants réciproques*,

$$(7)\qquad \Delta' = \Delta^3,\quad \Delta^2 a_{rs} = \frac{d\Delta'}{d\alpha_{rs}}.$$

Il nous sera facile d'avoir les réciproques des surfaces T, T′, T″; nous désignerons ces réciproques respectivement par S_1, S'_1, S''_1.

112. Nous constatons d'abord que la réciproque de la surface T, est

$$(8)\qquad S_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & x_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & x_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = -\Delta^2 S,$$

en posant

$$(9)\qquad S = \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 \\ + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{14} x_1 x_4 + 2 a_{23} x_2 x_3 \\ + 2 a_{24} x_2 x_4 + 2 a_{34} x_3 x_4 \end{array} \right\}.$$

113. Pour obtenir la réciproque S''_1 de T'', il suffira de remplacer dans les formules (7), (8), (9), (10), (11) du paragraphe précédent les quantités

$$a_{rs},\quad m_r,\quad n_r,\quad \lambda,\quad \text{et}\ \Delta$$

respectivement par

$$\alpha_{rs},\quad M_r,\quad N_r,\quad -\mu,\ \text{et}\ \Delta'.$$

J'indiquerai par les *mêmes* lettres *accentuées* α', β', γ', D', P', Q', A', E', G', H', les résultats de cette substitution.

Nous aurons ainsi

$$(10)\qquad S''_1 = S_1 + 2 G' \mu - H' \mu^2$$

pour la réciproque de T''; et, en faisant $\mu = 1$,

$$(11)\qquad S'_1 = S_1 + 2 G' - H'$$

pour la réciproque de T'.

114. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de déterminer les valeurs des quantités α', β', γ', P', Q'.

Je vais indiquer la marche du calcul pour une de ces quantités, α' par exemple. On a

$$\alpha' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & M_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & a_{23} & \alpha_{24} & M_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & M_3 \\ a_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & M_4 \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta\sqrt{2\beta}} \left\{ \beta \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \dfrac{d\gamma}{dn_1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \dfrac{d\gamma}{dn_2} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dfrac{d\gamma}{dn_3} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \dfrac{d\gamma}{dn_4} \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & 0 \end{vmatrix} + (\Delta - \gamma + \delta) \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \dfrac{d\gamma}{dm_1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \dfrac{d\gamma}{dm_2} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dfrac{d\gamma}{dm_3} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \dfrac{d\gamma}{md_4} \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

en ayant égard à la définition (4) des M_r, N_r.

Remarquons maintenant que

$$\begin{cases} \dfrac{d\gamma}{dn_r} = -(m_1\alpha_{r1} + m_2\alpha_{r2} + m_3\alpha_{r3} + m_4\alpha_{r4}), \\ \dfrac{d\gamma}{dm_r} = -(n_1\alpha_{r1} + n_2\alpha_{r2} + n_3\alpha_{r3} + n_4\alpha_{r4}). \end{cases}$$

Multiplions alors les quatre premières colonnes du déterminant, multiplicateur de β dans la valeur de α', respectivement par m_1, m_2, m_3, m_4, et ajoutons à la cinquième; opérons de la même manière sur le multiplicateur de $(\Delta - \gamma + \delta)$, en multipliant par n_1, n_2, n_3, n_4; il viendra, eu égard aux relations qui précèdent,

$$\delta\sqrt{2\beta}.\alpha' = \Delta'\left[\begin{array}{l}\beta(m_1 M_1 + m_2 M_2 + m_3 M_3 + m_4 M_4)\\ +(\Delta-\gamma+\delta)(n_1 M_1 + n_2 M_2 + n_3 M_3 + n_4 M_4)\end{array}\right].$$

En faisant intervenir les valeurs (4) des M_r, N_r et, en se rappelant la signification des quantités α, β, γ, δ, définies par les égalités (8), (9), (11) et (15) du paragraphe précédent, on trouve la première des relations suivantes (les autres s'obtiennent par des calculs tout à fait semblables) :

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l}\alpha' = \dfrac{\Delta^4}{\delta^2}(\Delta - \gamma + \delta),\\[2ex] \beta' = \dfrac{\Delta^4}{\delta^2}(\Delta - \gamma - \delta),\\[2ex] \gamma' = \dfrac{\Delta^3}{\delta^2}[\gamma(\Delta - \gamma) + \alpha\beta];\end{array}\right.$$

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l}P' = \dfrac{\Delta^3}{\delta\sqrt{2\beta}}[\beta M + (\Delta - \gamma + \delta)N],\\[2ex] Q' = \dfrac{\Delta^3}{\delta\sqrt{2\beta}}[\beta M + (\Delta - \gamma - \delta)N].\end{array}\right.$$

Les quantités M et N ont, dans ces dernières relations, la signification établie par les équations (3) du § I.

115. Nous pouvons maintenant procéder à la détermination des réciproques S'_1, S''_1, de T' et T''.

Nous avons, en effet (11),

$$S'_1 = S_1 + 2G' - H'.$$

D'un autre côté, nous avons entre G', H', ..., les relations suivantes *similaires* avec les relations (11) et (12) du précédent paragraphe :

$$(14)\quad \begin{cases} \Delta'.\, D' = \alpha'\beta' - \gamma'^2, \\ \Delta'.\, G' = \gamma'\, S_1 - P'Q', \\ \Delta'^2.\, H' = \Delta' D'.\, S_1 - (\beta' P'^2 - 2\gamma' P' Q' + \alpha' Q'^2). \end{cases}$$

En substituant à G', H' ces valeurs, nous conclurons

$$(15)\quad \Delta'^2.S'_1 = [(\Delta'+\gamma')^2 - \alpha'\beta']S_1 + [\beta' P'^2 - 2(\Delta'+\gamma')P'Q' + \alpha' Q'^2].$$

Enfin, si l'on a égard aux relations (7), (12) et (13), il vient définitivement

$$(16)\quad \frac{\delta^2}{\Delta^4} S'_1 = -(S + 2MN).$$

116. Ainsi, en résumé, la réciproque S_1 de T (1) sera

$$(17)\quad S_1 = -\Delta^2 S;$$

et la réciproque S'_1 de T' (2) sera

$$(18)\quad S'_1 = -\frac{\Delta^4}{\delta^2} \cdot S'.$$

Dans ces relations, S représente le premier membre de l'équation générale (9) d'une surface du second degré; et S' est définie par l'égalité

$$(19)\quad S' = S + 2MN.$$

117. Considérons actuellement le système des surfaces S''_1 (10), réciproques des surfaces T'', savoir :

$$(20)\quad S''_1 = S_1 + 2G'\mu - H'\mu^2.$$

On obtiendra l'enveloppe de ces surfaces, en éliminant

μ entre $S''_1 = 0$ et $\frac{dS''_1}{d\mu} = 0$; on trouve ainsi

$$G'^2 + H'S_1 = 0.$$

En remplaçant H′ par sa valeur déduite de l'identité (11), et G′ par sa valeur déduite de la seconde des équations (14); puis ayant égard aux relations (15) du § I, (7), (12), (13), (17) et (18) du § II, on trouve enfin, après quelques réductions, pour l'équation de l'enveloppe des surfaces S''_1,

$$(21)\quad [2(\Delta-\gamma)S+\beta M^2+2(\Delta-\gamma)MN+\alpha N^2]^2=4\delta^2 SS'.$$

118. La forme de l'équation (21) nous montre que l'enveloppe des surfaces S''_1 touche les deux surfaces S et S′; ce qui devait être.

Remarquons qu'en passant du système T, T′, T″, au système réciproque, les plans *correspondants* des points *communs* aux surfaces T et T′ seront tangents *communs* aux surfaces réciproques S, S′, S''_1; donc les réciproques S, S′, S''_1 seront tangentes à l'enveloppe de ces plans. Or les surfaces T et T′ se coupent suivant des courbes planes; par suite, les plans polaires, correspondant aux points de chaque courbe plane, passeront par un même point et formeront un cône. D'un autre côté, le système réciproque S''_1 est toujours tangent à la surface (21), et comme il est tangent aux cônes enveloppés par les plans polaires, il en résulte que l'*équation* (21) est l'équation *des cônes circonscrits aux deux surfaces* S *et* S′; car l'intersection de deux surfaces S''_1, infiniment voisines, lesquelles sont toujours tangentes à ces cônes, doit se trouver en même temps et sur les cônes et sur l'enveloppe.

119. Dégageant tous ces résultats de calcul, nous pourrons nous résumer ainsi :

Si l'on a deux surfaces du second degré se coupant suivant des courbes planes,

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} S = \mathbf{S}\, a_{rs}\, x_r\, x_s = 0, \\ S' = S + 2MN = 0, \end{cases}$$

où

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} M = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4, \\ N = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4, \end{cases}$$

l'équation du couple des cônes circonscrits à ces deux surfaces sera

$$\text{(III)} \quad [2(\Delta - \gamma) S + \beta M^2 + 2(\Delta - \gamma) MN + \alpha N^2]^2 = 4\delta^2 SS'.$$

Dans cette dernière équation, Δ *désigne le discriminant de la fonction* S, *et on a posé, en outre,*

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \beta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} \\ \gamma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \delta^2 = (\Delta - \gamma)^2 - \alpha\beta. \end{cases}$$

120. La forme de l'équation (III) nous montre que les deux cônes sont effectivement tangents aux surfaces S et S'; et nous voyons de plus que les *quatre* courbes de contact sont sur la surface du second degré

$$\text{(V)} \qquad \Phi = 2(\Delta - \gamma) S + \beta M^2 + 2(\Delta - \gamma) MN + \alpha N^2.$$

Cette surface Φ coupe aussi les deux surfaces S et S' suivant deux courbes planes,

$$\left.\begin{array}{l}
\text{la surface S, suivant les plans} \\
\left\{\begin{array}{ll} \beta M + (\Delta - \gamma + \delta) N = 0 & (1) \\ \beta M + (\Delta - \gamma - \delta) N = 0 & (3) \end{array}\right. \\
\text{la surface S}', \text{ suivant les plans} \\
\left\{\begin{array}{ll} \beta M - (\Delta - \gamma - \delta) N = 0 & (2) \\ \beta M - (\Delta - \gamma + \delta) N = 0 & (4) \end{array}\right.
\end{array}\right\} \text{plans I.}$$

Les quatre plans (1), (2), (3), (4), qui se coupent suivant la droite (M, N), forment un *faisceau harmonique*.

121. En remplaçant dans l'équation (III) S' par sa valeur identique $S + 2MN$, on parvient aisément à la mettre sous la forme :

$$[2\alpha\beta S + \beta(\Delta - \gamma) M^2 + 2\alpha\beta MN + \alpha(\Delta - \gamma) N^2]^2 = \delta^2(\beta M^2 - \alpha N^2)^2,$$

et nous arrivons ainsi à séparer les équations des deux cônes.

Les équations des deux cônes C *et* C' *circonscrits aux deux surfaces* S *et* S' *seront donc*

$$\text{(VI)} \quad \left\{\begin{array}{l}
C = 2\alpha\beta S + \beta(\Delta - \gamma + \delta) M^2 + 2\alpha\beta MN \\
\qquad + \alpha(\Delta - \gamma - \delta) N^2 = 0, \\
C' = 2\alpha\beta S + \beta(\Delta - \gamma - \delta) M^2 + 2\alpha\beta MN \\
\qquad + \alpha(\Delta - \gamma + \delta) N^2 = 0.
\end{array}\right.$$

On constate tout de suite que ces deux cônes se coupent eux-mêmes suivant deux courbes planes, dont les plans ont pour équations

$$\text{(VII)} \quad \left\{\begin{array}{l}
\sqrt{\beta} M + \sqrt{\alpha} N = 0, \\
\sqrt{\beta} M - \sqrt{\alpha} N = 0.
\end{array}\right.$$

Ces deux plans, conjointement avec les deux plans M et N, forment encore un *faisceau harmonique.*

122. Les équations (VI) des deux cônes peuvent s'écrire :

$$(\text{VIII})\quad\begin{cases} C = 2\alpha\beta S + \dfrac{\beta}{\Delta-\gamma+\delta}[(\Delta-\gamma+\delta)M+\alpha N]^2, \\ C' = 2\alpha\beta S + \dfrac{\beta}{\Delta-\gamma-\delta}[(\Delta-\gamma-\delta)M+\alpha N]^2, \end{cases}$$

ou bien encore, en remplaçant S par $(S' - 2MN)$,

$$(\text{IX})\quad\begin{cases} C = 2\alpha\beta S' + \dfrac{\beta}{\Delta-\gamma+\delta}[(\Delta-\gamma+\delta)M-\alpha N]^2, \\ C' = 2\alpha\beta S' + \dfrac{\beta}{\Delta-\gamma-\delta}[(\Delta-\gamma-\delta)M-\alpha N]^2. \end{cases}$$

On vérifie alors que les cônes C et C′ sont tangents aux deux surfaces S et S′, et l'on voit en outre que

les plans de contact du cône C sont : $\begin{cases} \text{avec } S, & (\Delta-\gamma+\delta)M+\alpha N = 0, \\ \text{avec } S', & (\Delta-\gamma+\delta)M-\alpha N = 0; \end{cases}$

les plans de contact du cône C′ sont : $\begin{cases} \text{avec } S, & (\Delta-\gamma-\delta)M+\alpha N = 0, \\ \text{avec } S', & (\Delta-\gamma-\delta)M-\alpha N = 0. \end{cases}$

Remarquons que ces derniers plans, eu égard à la relation (IV), coïncident avec les plans I.

Nous avons ainsi ce théorème remarquable :

La surface Φ (V) *contient les quatre courbes de contact des cônes* C *et* C′ *avec les surfaces* S *et* S′; *et, de plus, ce sont les courbes suivant lesquelles elle coupe les deux surfaces* S *et* S′.

123. Enfin par la droite (M, N) passent les deux *fais-*

ceaux harmoniques,

1° des *plans* suivant lesquels se coupent les deux surfaces S et S′, et les deux cônes C et C′ :

$$\left\{\begin{array}{c} M = o, \\ M\sqrt{\beta} - N\sqrt{\alpha} = o, \\ N = o, \\ M\sqrt{\beta} + N\sqrt{\alpha} = o; \end{array}\right.$$

II° des *plans* des courbes de contact des deux cônes, lesquelles sont aussi les intersections de surface Φ avec les surfaces S et S′ :

$$\left\{\begin{array}{l} \beta M + (\Delta - \gamma + \delta) N = o, \\ \beta M - (\Delta - \gamma - \delta) N = o, \\ \beta M + (\Delta - \gamma - \delta) N = o, \\ \beta M - (\Delta - \gamma + \delta) N = o. \end{array}\right.$$

124. La discussion et l'interprétation des cas particuliers où l'on aurait $\alpha = o$, ou $\beta = o$, etc., ne saurait présenter de difficultés ; je ne m'y arrêterai pas.

§ III. — *Équation générale des surfaces réglées circonscrites à deux surfaces du second degré.*

125. Considérons la surface du second degré

$$(1) \qquad \varphi = \sum a_{rs} x_r x_s = o,$$

et la droite D,

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = o, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = o. \end{array}\right.$$

Pour que cette droite soit tangente à la surface φ, il faut et il suffit (chap. II, § I, n° 36) que

$$
(3)\qquad \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\
n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0
\end{vmatrix} = 0.
$$

Si l'on multiplie les quatre premières lignes de ce déterminant par x_1, x_2, x_3, x_4, et qu'on ajoute les trois premières à la quatrième, en ayant égard aux relations (2); puis qu'on opère de la même manière sur les quatre premières colonnes du déterminant ainsi obtenu, l'équation (3) sera transformée en la suivante :

$$
(4)\qquad \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dfrac{d\varphi}{dx_1} & m_1 & n_2 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dfrac{d\varphi}{dx_2} & m_2 & n_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dfrac{d\varphi}{dx_3} & m_3 & n_3 \\
\dfrac{d\varphi}{dx_1} & \dfrac{d\varphi}{dx_2} & \dfrac{d\varphi}{dx_3} & 4\varphi & 0 & 0 \\
m_1 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\
n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix} = 0.
$$

Or, si maintenant on pose

$$
\begin{cases}
m_3 n_2 - m_2 n_3 = \lambda_1, \\
m_1 n_3 - m_3 n_1 = \lambda_2, \\
m_2 n_1 - m_1 n_2 = \lambda_3,
\end{cases}
$$

puis

$$(5)\qquad R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \frac{d\varphi}{dx_3} \\ \frac{d\varphi}{dx_1} & \frac{d\varphi}{dx_2} & \frac{d\varphi}{dx_3} & 4\varphi \end{vmatrix}$$

et qu'on développe l'équation (4), on obtient définitivement

$$(6)\left\{\begin{aligned} &\lambda_1^2 \frac{d^2R}{da_{22}da_{33}} + \lambda_2^2 \frac{d^2R}{da_{33}da_{11}} + \lambda_3^2 \frac{d^2R}{da_{11}da_{22}} \\ &- 2\lambda_1\lambda_2 \frac{d^2R}{da_{12}da_{33}} - 2\lambda_1\lambda_3 \frac{d^2R}{da_{13}da_{22}} - 2\lambda_2\lambda_3 \frac{d^2R}{da_{23}da_{11}} \end{aligned}\right\} = 0$$

C'est l'équation que doivent vérifier les coordonnées d'un point quelconque de toute droite tangente à la surface φ.

126. Si nous imaginons une seconde surface

$$(7)\qquad \psi = \sum b_{rs} x_r x_s = 0,$$

et que la droite D soit aussi tangente à cette surface, les coordonnées d'un quelconque de ses points devront encore vérifier l'équation

$$(8)\left\{\begin{aligned} &\lambda_1^2 \frac{d^2S}{db_{22}db_{33}} + \lambda_2^2 \frac{d^2S}{db_{33}db_{11}} + \lambda_3^2 \frac{d^2S}{db_{11}da_{22}} \\ &- 2\lambda_1\lambda_2 \frac{d^2S}{db_{12}db_{33}} - 2\lambda_1\lambda_3 \frac{d^2S}{db_{13}db_{22}} - 2\lambda_2\lambda_3 \frac{d^2S}{db_{23}db_{11}} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Dans cette dernière équation, on a représenté par S le déterminant

$$
(9) \qquad S = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dfrac{d\psi}{dx_1} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dfrac{d\psi}{dx_2} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dfrac{d\psi}{dx_3} \\ \dfrac{d\psi}{dx_1} & \dfrac{d\psi}{dx_2} & \dfrac{d\psi}{dx_3} & 4\psi \end{vmatrix}
$$

127. Si, entre les deux équations (6) et (8), on élimine λ_1, et qu'on désigne par la lettre λ le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$, on aura, pour l'équation générale des surfaces réglées circonscrites aux deux surfaces φ et ψ, une équation de la forme

$$T^2 = 4UV,$$

dans laquelle

$$\left\{ \begin{aligned} U &= A\lambda + B, \\ T &= A'\lambda^2 + 2B'\lambda + C', \\ V &= A''\lambda^3 + B''\lambda^2 + C''\lambda + D'', \end{aligned} \right.$$

λ représentant une constante indéterminée, et les lettres A, B, A', B', C', A'', B'', C'', D'' des fonctions homogènes du quatrième degré des coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point quelconque de la surface réglée.

Il serait facile, en adoptant la même marche, de former l'équation de la surface réglée circonscrite à trois surfaces du second degré.

SUR LA QUESTION 317

(voir t. XV, p. 52);

PAR M. CREMONA,
Professeur à Bologne.

Voici l'énoncé de la question :

On donne sur un plan, 1° une conique S; 2° cinq points m, a, b, c, o, dont l'un, m, est pris sur le périmètre de la conique. On propose de mener par le point o une transversale qui coupe la conique en deux points (réels ou imaginaires) p, q situés avec les quatre m, a, b, c sur une même conique. Démontrer qu'il existe, en général, deux solutions. (DE JONQUIÈRES.)

Je conçois le faisceau F(K) des coniques circonscrites au tétragone $mabc$; toute conique K de ce faisceau rencontrera S en trois points p, q, r (outre m). Quelle courbe est enveloppée par les côtés des triangles analogues à pqr? Pour répondre à cette question, j'observe que chaque point p de la conique S donne lieu à une seule conique du faisceau F(K), passant par p; donc ce point détermine un seul triangle analogue à pqr; c'est-à-dire on peut mener par tout point de S deux tangentes seulement à la courbe enveloppe cherchée. Donc cette courbe est de la seconde classe, ou bien une conique C.

La question proposée est résolue par les tangentes de C, menées par le point o.

Parmi les coniques du faisceau F(K) il y en a trois, dont chacune est le système de deux droites; ce sont les couples de côtés opposés du tétragone $mabc$, c'est-à-dire bc, am; ca, bm; ab, cm. Il s'ensuit que bc, ca, ab sont des tangentes de l'enveloppe C. Ainsi nous avons ce théorème:

Toute conique circonscrite à un triangle donné et passant par un point fixe d'une conique donnée coupe celle-ci en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle circonscrit à une conique fixe, inscrite au triangle donné.

Soient S et C deux coniques telles, qu'un triangle pqr inscrit dans S soit circonscrit à C. On sait, d'après un théorème très-connu de M. Poncelet, que tout point de S est le sommet d'un triangle inscrit dans S et circonscrit à C. Soit abc un triangle circonscrit à C, mais dont les sommets n'appartiennent pas à S. On sait encore que, si deux triangles sont circonscrits à une même conique, ils sont inscrits dans une autre conique; donc les points p, q, r, a, b, c appartiennent à une conique K. Cette conique K rencontrera S en un point m (outre p, q, r). Maintenant, en vertu du théorème démontré ci-devant, toute conique circonscrite au tétragone $abcm$ détermine un triangle inscrit dans S et circonscrit à une conique fixe C', inscrite en abc. Mais, parmi les coniques circonscrites au tétragone $abcm$, il y a K; donc C' coïncide avec C, et par conséquent :

On donne sur un plan : 1° deux coniques S et C telles, que tout point de S est le sommet d'un triangle pqr inscrit en S et circonscrit à C; 2° un triangle fixe abc circonscrit à C, mais dont les sommets n'appartiennent pas à S. Un triangle quelconque pqr et le triangle abc sont inscrits dans une même conique K.

Toutes les coniques K, *circonscrites à* abc *et aux divers triangles* pqr *passent par un même point fixe de* S.

NOTE SUR LES COURBES RARPORTÉES A DES COORDONNÉES POLAIRES;

PAR M. E. PROUHET.

Quand une courbe du second degré est rapportée à des coordonnées polaires, son équation est généralement du second degré par rapport au rayon vecteur ρ. Mais si l'on prend un foyer pour pôle, l'équation se décompose en deux autres du premier degré, dont chacune représente la courbe tout entière.

Ce fait remarquable tient à un théorème général que nous allons démontrer.

Soit

$$f(x,y)=0 \tag{1}$$

l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées rectilignes et rectangulaires. Supposons que la fonction $f(x,y)$ soit entière et rationnelle et qu'elle ne puisse se décomposer en facteurs rationnels en x et y. Si l'on prend l'origine pour pôle et l'axe des x pour axe polaire, la même courbe sera encore représentée par l'équation

$$f(\rho\cos\omega,\rho\sin\omega)=0. \tag{2}$$

Admettons que le premier membre de cette équation puisse se décomposer en deux facteurs rationnels, en sorte que l'on ait

$$f(\rho\cos\omega,\ \rho\sin\omega)=\varphi(\rho,\omega)\,\psi(\rho,\omega).$$

La fonction $\varphi(\rho,\omega)$ pourra se mettre sous la forme

$$M\rho+N\cos\omega+P\sin\omega+Q,$$

M, N, P, Q étant des fonctions de ρ^2, $\sin^2\omega$, $\cos^2\omega$, $\rho\sin\omega$, $\rho\cos\omega$, ou de quelques-unes de ces quantités. C'est ce dont on s'assure facilement en remarquant qu'un terme de $\varphi(\rho,\omega)$ est de la forme

$$A\rho^m \cos^n\omega \sin^p\omega,$$

et en faisant toutes les hypothèses possibles sur les exposants m, n, p suivant que chacun de ces exposants sera pair ou impair. En outre, on verra par cet examen que M, N, P, Q sont des fonctions entières ou des fonctions contenant ρ^2 seulement en dénominateur.

Cela posé, on peut écrire

$$\varphi(\rho,\omega) = M\rho + N\cos\omega + P\sin\omega + Q$$
$$= \frac{M\rho^2 + N\rho\cos\omega + P\rho\sin\omega}{\rho} + Q,$$

ou bien

(3) $$\varphi(\rho,\omega) = \frac{R}{\rho} + Q,$$

R étant une fonction de ρ^2, $\cos^2\omega$, etc., ou simplement de $\rho\cos\omega$, $\rho\sin\omega$, car

$$\rho^2 = (\rho\cos\omega)^2 + (\rho\sin\omega)^2, \quad \cos^2\omega = \frac{(\rho\cos\omega)^2}{\rho^2}, \ldots$$

On aura de même

(4) $$\psi(\rho,\omega) = \frac{R'}{\rho} + Q'$$

et par conséquent

$$f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega) = \left(\frac{R}{\rho} + Q\right)\left(\frac{R'}{\rho} + Q'\right).$$

Le second membre développé donne

$$\frac{RR'}{\rho^2} + \frac{RQ' + QR'}{\rho} + QQ'$$

et pour que cette expression soit une fonction de $\rho\cos\omega$ et de $\rho\sin\omega$, comme le premier membre, il faut évidemment que l'on ait

$$RQ' + QR' = o$$

d'où

$$\frac{Q'}{Q} = -\frac{R'}{R} = \lambda,$$

d'où résulte

$$(5) \qquad f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega) = \lambda\left(\frac{R}{\rho} + Q\right)\left(-\frac{R}{\rho} + Q\right).$$

λ ne peut être qu'une constante, ou une constante multipliée par une puissance de ρ^2 : car il en était autrement, comme λ est une fonction de $\rho\cos\omega$ et de $\rho\sin\omega$, ainsi que le produit des derniers facteurs du second membre, il en résulterait que $f(x, y)$ pourrait se décomposer en deux facteurs rationnels, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Maintenant l'équation $f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega) = o$ se réduit aux deux suivantes

$$(6) \qquad \frac{R}{\rho} + Q = o,$$

$$(7) \qquad \frac{R}{\rho} - Q = o,$$

qui représentent la même courbe, car R et Q ne changeant pas quand on change ρ en $-\rho$ et ω en $\omega + \pi$, il arrivera que si les coordonnées ρ, ω d'un point M satisfont à l'équation (6), les coordonnées $-\rho, \omega + \pi$, qui conviennent au même point M, satisferont à l'équation (7). Par conséquent, chacune de ces équations représente toute la courbe si l'on admet pour ρ des valeurs négatives et n'en représente, en général, qu'une partie si l'on répète les valeurs négatives du rayon vecteur.

Nous disons, *en général*, parce que si l'équation (6) ne donnait pour ρ que des valeurs positives, l'équation (7) ne donnerait pour ρ que des valeurs négatives. Alors l'équation (6) représenterait toute la courbe. Exemple :

$$(\rho + \sin\omega - 1)(\rho + \sin\omega + 1) = 0.$$

Dans ce qui précède, nous avons supposé R, R′, Q, Q′ différents de zéro. Si quelques-unes de ces fonctions étaient nulles, il y aurait lieu de faire une discussion qui ne présenterait aucune difficulté. Disons seulement qu'un des cas de cette discussion donnerait une exception au théorème général, quand le pôle est pris sur la courbe même. Dans ce cas l'un des facteurs de $f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)$ est une puissance de ρ et ce facteur, égalé à zéro, ne représente que le pôle.

P.-S. M. Terquem m'ayant demandé si le résultat trouvé dans cette Note pouvait s'étendre aux surfaces, j'ai reconnu qu'on pouvait répondre affirmativement à cette question.

En effet, soit

$$f(x, y, z) = 0$$

une équation algébrique, entière et irréductible. Posons

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad z = \rho\sin\varphi\sin\theta,$$

ce qui revient à rapporter la surface représentée par l'équation précédente à un système de coordonnées polaires. Par une marche analogue à celle que nous avons suivie, on trouvera que si la fonction transformée peut se décomposer en deux facteurs rationnels $f_1(\rho, \varphi, \theta)$, $f_2(\rho, \varphi, \theta)$, on aura nécessairement

$$f_1(\rho, \varphi, \theta) = \frac{R}{\rho} + Q, \quad f_2(\rho, \varphi, \theta) = -\frac{R}{\rho} + Q,$$

R et Q étant des fonctions de $\rho\cos\varphi$, $\rho\sin\varphi\cos\theta$, etc., ou de x, y, z. Exemple :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ex + fy + gz + h)^2 = 0.$$

En coordonnées polaires, cette équation se décompose en deux, dont chacune représente toute la surface.

Plus généralement, si une fonction d'un nombre quelconque de variables se décompose en facteurs rationnels à l'aide de la transformation

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi, \\ y &= \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ z &= \rho\sin\varphi\sin\theta\cos\psi, \\ u &= \rho\sin\varphi\sin\theta\sin\psi\cos\xi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

elle sera le produit de $\frac{R}{\rho} + Q$ par $-\frac{R}{\rho} + Q$, R et Q étant des fonctions de x, y, z, u.

SUR UNE ESPÈCE PARTICULIÈRE DE SURFACE GAUCHE DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. DESGRANGES.

Cette surface S est engendrée par une droite L qui se meut en s'appuyant sur deux droites données A et B, de telle sorte que la distance $\overline{pp'}$ des deux points p, p' où L coupe A et B reste constante.

Soit $pp' = D$.

Je me propose d'étudier d'abord cette surface par les seuls procédés de la géométrie, ou, pour parler plus exactement, indépendamment de son équation.

Je prends pour plan horizontal un plan parallèle aux deux directrices A et B, et passant par l'une de ces directrices.

lm située dans le plan horizontal sera une des deux directrices, ou A.

Nota. La projection de la deuxième directrice B. J'appelle m la distance de B au plan horizontal, θ l'angle des deux directrices.

Soit ab la projection horizontale d'une génératrice quelconque, et Δ l'angle que cette projection fait avec la directrice lm.

La distance $\overline{cd}$ des points c et d où ab rencontre les projections des deux directrices, est une constante $=\sqrt{D^2-m^2}$ que j'appelle k.

Toutes les génératrices font avec le plan horizontal un angle constant dont la tangente $=\frac{m}{k}$.

Donc la surface a un cône directeur (cône droit à base circulaire et dont l'axe est vertical).

Si l'on fait mouvoir la droite ab, son point d restant toujours sur nt, projection de B, et son point C sur lm ou A, on aura toutes les projections de la génératrice de S.

Or on sait que dans ce mouvement tous les points de ab décrivent des ellipses dont le centre est O (*).

Donc toutes les sections horizontales de la surface sont des ellipses qui ont toutes leur centre sur la plus courte

(*) L'équation de ces ellipses, en prenant lm pour axe des x, O pour l'origine et désignant par c la distance du point décrivant au point c de ab, c pouvant être positif ou négatif, est

$$c^2x^2+[k^2\cot^2\theta+(c-k)^2]y^2-2ck\cot\theta.xy=c^2(c-k)^2.$$

sur la plus courte distance prolongée des deux directrices.

La surface S a donc un axe qui coïncide avec cette plus courte distance.

A l'infini l'ellipse devient un cercle; pour $z=m$, elle se confond avec B; pour $z=0$, elle se confond avec A; pour $z=\frac{m}{2}$, les deux axes de l'ellipse sont sur les deux bissectrices de l'angle des deux directrices A et B.

La génératrice quelconque (ab) (*) de S est une des deux génératrices principales du paraboloïde gauche R, qui a pour directrices A et B, et dont le plan directeur P a cette même génératrice pour ligne de plus grande pente.

(Les horizontales de ce plan sont perpendiculaires à (ab) et à ab et la droite $\overline{fcg}$ perpendiculaire à ab au point C est sa trace horizontale.)

Or aux points c et d, R et S ont bien évidemment même plan tangent; il est d'ailleurs facile de voir que le plan P est tangent à la fois aux deux surfaces R et S à l'infini : les deux surfaces S et R sont donc tangentes l'une à l'autre tout le long de (ab).

Donc S est l'enveloppe du paraboloïde R qui a pour directrices constantes A et B, et dont le plan directeur variable P fait un angle constant $\tang = \frac{m}{k}$ avec le plan horizontal.

La projection ab de la génératrice a pour enveloppe une certaine courbe C (je donnerai plus bas le moyen de la construire géométriquement). Cette courbe est la projection de la ligne de striction de la surface S.

(*) J'entends par génératrices principales d'un paraboloïde les deux génératrices qui passent par le sommet.

J'entends par (ab) la ligne qui a pour projection ab; par (a) le point qui a pour projection a.

La ligne de striction est décrite par le sommet du paraboloïde R.

Le cylindre vertical qui a pour trace la courbe C, est tangent à S suivant la ligne de striction.

Quand l'angle A de *ab* avec *lm* est droit, le plan tangent à la surface est le même tout le long de *ab*, sauf au point (d) (où la génératrice (ab) coupe B), point de striction pour lequel le plan tangent est vertical, et a *ab* pour trace horizontale (*).

On voit bien qu'il y a quatre génératrices pour lesquelles cela a lieu.

Quand les deux directrices A et B font un angle droit, qu'on a $\theta = 90^\circ$, la projection horizontale de la ligne de striction est une courbe du sixième degré bien connue dont l'équation est (**)

$$y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}};$$

les deux autres projections sont

$$k^2 z^3 = m^3 x^2 \quad \text{et} \quad k^2 (z - m)^3 m^3 y^2.$$

Dans ce cas particulier de $\theta = 90^\circ$, toutes les courbes horizontales de la surface S sont des ellipses dont les axes coïncident avec les x et les y. De $z = 0$ à $z = m$ la somme de ces axes $= k$; pour $z >$ ou < 0, la différence de ces axes $= K$; pour $z = \frac{m}{2}$, on a un cercle $R = \frac{m}{2}$ qui par-

---

(*) Un point quelconque α de *ab* décrit une ellipse; quand *ab* vient à prendre une position telle que l'angle $bcm = 90^\circ$, il est bien évident que l'ordonnée $c\alpha$ est un maximum; donc en α la tangente à l'ellipse est parallèle à *lm*. Donc, etc. (Charles Dupin, *Développements de Géométrie.*)

(**) On sait que c'est là l'équation de l'enveloppe de toutes les droites dont la partie interceptée entre les axes des x et y est constante $= k$.

Et aussi de toutes les ellipses $A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2$ pour lesquelles on a $A + B = K$.

tage la surface en deux nappes évidemment superposables, etc.

On remarque quelque chose d'analogue dans le paraboloïde gauche isocèle.

L'équation de la surface S, dans le cas où l'angle θ est quelconque, est

$$(z-m)^2(k^2z^2-m^2x^2)=(myz-m^2x\cot\theta)^2.$$

Si l'on suppose $\theta = 90°$, elle se réduit à

$$\text{(A)}\qquad k^2z^2(z-m)^2-m^2y^2z^2-(z-m)^2m^2x^2=0.$$

Dans ce cas particulier, l'équation du paraboloïde R qui a pour directrices constantes les deux droites A et B, et dont le plan directeur variable P fait avec le plan horizontal un angle constant dont la tangente

$$\frac{m}{\sqrt{a^2-m^2}}=\frac{m}{k}$$

est

$$\text{(B)}\qquad mayz=m(m-z)x+k(m-z)z\sqrt{1+a^2},$$

a étant la cotangente de l'angle que la trace horizontale du plan directeur P fait avec les x.

Si l'on suppose que a prenne toutes les valeurs possibles et que l'on cherche l'équation de la surface enveloppe de tous les paraboloïdes que représente (B), on retombe sur l'équation (A).

Le calcul ne présente aucune difficulté : mais dans le cas général l'équation du paraboloïde R est du quatrième degré en a, et il n'est pas facile d'éliminer a entre cette équation et sa dérivée.

Note du Rédacteur. La courbe C a été étudiée dans les *Nouvelles Annales* par Joachimsthal (t. VI, p. 260 et 263) et par M. Bouteiller.

SOLUTION DE LA QUESTION 503

(voir t. XIX, p. 44 et 81);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Répétiteur à Lyon (institution de M. Poncin).

1. Soit à résoudre l'équation

$$(1)\quad a^4(a^4-1)^4(x^2+14x+1)^3=(a^8+14a^4+1)^3 x(x-1)^4.$$

Aucune des racines n'étant nulle, on peut diviser par x^3

$$a^4(a^4-1)^4\left(x+\frac{1}{x}+14\right)^3$$

$$=(a^8+14a^4+1)^3\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}-4x-4\cdot\frac{1}{x}+4\right);$$

posant

$$x+\frac{1}{x}=z,\qquad z=u+2,$$

on a

$$a^4(a^4-1)^4(z+14)^3=(a^8+14a^4+1)^3(z-2)^2,$$
$$a^4(a^4-1)^4(u+16)^3=(a^8+14a^4+1)^3 u^2,$$

et comme on a identiquement

$$(a^8+14a^4+1)^3=[(a^4-1)^2+16a^4]^3$$

l'équation en u devient

$$a^4(a^4-1)^4u^3-\left.\begin{array}{l}(a^4-1)^6\\ -768a^8(a^4-1)^3\\ -4096a^{12}\end{array}\right|\begin{array}{l}u^2+768a^4(a^4-1)^4u\\ \quad+4096a^4(a^4-1)^4=0.\\ \end{array}$$

$2a^4$ étant une des racines de la proposée, une des valeurs de z est $u^4 + \frac{1}{a^4}$; la valeur correspondante de u est $a^4 - 2 + \frac{1}{a^4}$ ou $\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2$ ou $\frac{(a^4-1)^2}{a^4}$ le premier membre de l'équation en u est donc divisible par

$$a^4 u - (a^4 - 1)^2$$

la division s'effectue rapidement, grâce à la forme du premier membre, et l'équation (1) est ramenée aux suivantes :

$$(2) \qquad a^4 u - (a^4 - 1)^2 = 0,$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (a^4-1)^4 u^2 - 256 a^4 [3(a^4-1)^2 + 16 a^4] u \\ \qquad - 4096 a^4 (a^4-1)^2 = 0, \end{array} \right.$$

$$x = \frac{u + 2 \pm \sqrt{u^2 + 4u}}{2};$$

or l'équation (3) donne

$$u = 64 a^2 \frac{[6a^2(a^4-1)^2 + 32a^6] \pm (a^4+1)[a^8 + 14a^4 + 1]}{(a^4-1)^4}$$

$$= \pm 64 a^2 \frac{(a^2 \pm 1)^6}{(a^4-1)^4},$$

en prenant à la fois les signes supérieurs ou les signes inférieurs (2). Les équations (2) et (3) donnent ainsi les valeurs suivantes de u :

$$u = \frac{(a^4-1)^2}{a^4},$$

$$u = +64 a^2 \frac{(a^2+1)^2}{(a^2-1)^4},$$

$$u = -64 a^2 \frac{(a^2-1)^2}{(a^2+1)^4}.$$

3. Prenons la première valeur de u :

$$u=\frac{(a^4-1)^2}{a^4},\qquad u+2=\frac{a^8+1}{a^4},$$

$$u+4=\frac{(a^4+1)^2}{a^4},\quad \pm\sqrt{u^3+4u}=\pm\frac{a^8-1}{a^4};$$

$$(4)\qquad x=\frac{1}{2}\frac{(a^8+1)\pm(a^8-1)}{a^4}.$$

Prenons la deuxième valeur de u:

$$u=64a^2\frac{(u^2+1)^2}{(a^2-1)^4},$$

$$u+2=\frac{2a^8+56a^6+70a^4+56a^2+2}{(a^2-1)^4}$$

$$=\frac{(a+1)^8+(a-1)^8}{(a^2-1)^4},$$

$$u+4=4\frac{(a^4+6a^2+1)^2}{(a^2-1)^4}\pm\sqrt{u^2+4u}$$

$$=\pm\frac{16a^7+112a^5+112a^3+16a}{(a^2-1)^4}$$

$$=\pm\frac{(a+1)^8-(a-1)^8}{(a^2-1)^4},$$

$$(5)\quad x=\frac{1}{2}\frac{[(a+1)^8+(a-1)^8]\pm[(a+1)^8-(a-1)^8]}{(a^2-1)^4}.$$

Prenons la troisième valeur de u :

$$u=-64a^2\frac{(a^2-1)^2}{(a^2+1)^4},$$

$$u+2=\frac{2a^8-56a^6+70a^4-56a^2+2}{(a^2+1)^4}$$

$$=\frac{(a+\sqrt{-1})^8+(a-\sqrt{-1})^8}{(a^2+1)^4},$$

$$u + 4 = 4\,\frac{(a^4 - 6a^2 + 1)^2}{(a^2+1)^4} \pm \sqrt{u^2 + 4u}$$

$$= \pm\,\frac{(16a^7 - 112a^5 + 112a^3 - 16a)\sqrt{-1}}{(a^2+1)^4}$$

$$= \frac{(a + \sqrt{-1})^8 - (a - \sqrt{-1})^8}{(a^2+1)^4},$$

$$(6)\quad x = \frac{1}{2}\,\frac{\left[(a+\sqrt{-1})^8 + (a-\sqrt{-1})^8\right] \pm \left[(a+\sqrt{-1})^8 - (a-\sqrt{-1})^8\right]}{(a^2+1)^4}.$$

4. Donc, en vertu des formules (4) (5) (6), les racines de

$$a^4(a^4 - 1)^4(x^3 + 14x + 1)^3 = (a^8 + 14a^4 + 1)^3 x (x - 1)^4$$

sont

$$a^4, \qquad \frac{1}{a^4}, \qquad \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^4,$$

$$\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^4, \quad \left(\frac{a+\sqrt{-1}}{a-\sqrt{-1}}\right)^4, \quad \left(\frac{a-\sqrt{-1}}{a+\sqrt{-1}}\right)^4.$$

FORMULE BAROMÉTRIQUE DE M. BABINET;

PAR M. CUENOUD, DE LAUSANNE.

Il m'a paru intéressant de chercher à obtenir la formule de Babinet par une voie élémentaire, en introduisant dans la loi de décroissance des densités de l'air avec la hauteur une approximation analogue à celle que M. Babinet introduit numériquement dans la formule de Laplace. J'ai trouvé qu'il suffisait pour cela d'admettre que la densité moyenne d'une colonne d'air était la moyenne arithmétique entre les densités extrêmes, ou, en d'autres termes, que les hauteurs croissant en progression arithmétique, les densités décroissent en progression *arithmétique*. On conçoit que, entre certaines limites, les résultats fournis par cette loi ne doivent pas s'écarter beaucoup de ceux que fournit la loi réelle que l'on peut énoncer ainsi : La densité décroît en progression *géométrique* quand la hauteur croît en progression arithmétique.

En désignant par D et d les densités de l'air aux stations inférieure et supérieure (densités prises par rapport à l'eau), la densité moyenne d'une colonne d'air comprise entre ces deux stations serait, dans l'hypothèse ci-dessus,

$$\frac{1}{2}(D + d).$$

En considérant une colonne d'air de 1 décimètre carré de section, le poids en kilogrammes d'une hauteur de h mètres de cette colonne serait

$$10\,h + \frac{1}{2}(D + d).$$

Le poids de cette colonne, augmenté de la pression à la partie supérieure, doit donner la pression à la partie inférieure. On a donc, en désignant par B et b les hauteurs barométriques correspondantes respectivement à D et d, et par m la densité du mercure :

$$10\,m\,b + 10\,h + \frac{1}{2}(D + d) = 10\,m\,B,$$

d'où

$$h = \frac{2m(B - b)}{D + d}.$$

Or, d'après la loi de Mariotte, la densité de l'air est proportionnelle à la pression ou à la hauteur barométrique qui mesure cette pression, en sorte que l'on a

$$\frac{D}{d} = \frac{B}{b} \quad \text{d'où} \quad \frac{D + d}{D} = \frac{B + b}{B}$$

ou

$$D + d = (B + b)\frac{D}{B},$$

et

$$h = \frac{2m(B - b)}{B + b} \times \frac{B}{D}.$$

Le rapport $\frac{B}{D}$ est indépendant de l'altitude de la station à laquelle on mesure B; on peut donc calculer la valeur *constante* de ce rapport en prenant les valeurs qu'ont B et D au niveau de la mer, soit

$$B = 0^m,76, \ d = 0,001293;$$

du reste,

$$m = 13,596,$$

en sorte que la formule précédente devient

$$h = \frac{0^m,76 \times 2 \times 13.596}{0,001293} \times \frac{B - b}{B + b}.$$

La valeur du coefficient numérique est 15983^m, nombre compris entre 15976 que fournit la formule de Laplace transformée, et 16000 adopté par M. Babinet.

En introduisant le terme relatif à la température, on obtiendrait la formule

$$h = 16000^m \left[1 - \frac{2(T + t)}{1000}\right] \frac{B - b}{B + b}.$$

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES

(voir t. XX, p. 255);

PAR M. E.-E. KUMMER.

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

§ V. — *Des surfaces qui dépendent d'un système de rayons.*

Les cinq points que nous avons déterminés sur chaque rayon, savoir les deux points limites des plus courtes distances, les deux foyers et le centre, ont pour lieux géométriques cinq surfaces quand on considère tous les rayons d'un système. Ces cinq surfaces sont liées au système d'une manière très-intime. Les deux surfaces, lieux géométriques des points limites, se présentent habituellement sous la forme analytique d'une seule surface, en ce sens qu'elles sont représentés par un même équation. Par suite, elles peuvent être considérées comme deux nappes d'une même surface. Cependant, comme il est quelquefois nécessaire de les distinguer l'une de l'autre, nous les désignerons dans la suite par les lettres F_1 et F_2. *Ces deux surfaces partagent l'espace en deux régions; l'une d'elles, comprise entre les deux surfaces, renferme toutes les plus courtes distances de deux rayons infiniment voisins; l'autre, située en dehors des deux surfaces, ne renferme aucune de ces plus courtes distances.*

Si l'on passe d'un rayon au rayon infiniment voisin dont la plus courte distance au premier se trouve sur la surface F_1, de ce second rayon à un troisième rayon infiniment voisin dont la plus courte distance au second se trouve encore sur F_1, et ainsi de suite, l'ensemble de tous ces rayons forme une surface réglée O_1. La courbe d'intersection a de O_1 avec F_1 est la courbe de O_1 qui jouit de cette propriété que les plus courtes distances de deux génératrices consécutives forment précisément les éléments de cette courbe. C'est la courbe de striction. O_1 coupe aussi F_2 suivant une courbe b_2. Si l'on opère de la même manière sur F_2, on obtient une surface réglée O_2 dont la ligne de striction est la courbe d'intersection a_2 de O_2 et de F_2. O_2 coupe aussi F_1 suivant une certaine courbe b_1.

Tout ce que nous venons de dire subsiste quel que soit le rayon du système que l'on prend pour point de départ; il existe donc une série de surfaces réglées O_1 dont les lignes de striction forment une série de courbes a_1 tracées sur F_1 et qui coupent aussi F_2 suivant une série de courbes b_2. On a de même une série de surfaces réglées O_2 dont les courbes de striction a_2 se trouvent sur F_2 et qui coupent F_1 suivant une série de courbes b_1.

Désignons par x', y', z' les coordonnées du premier des points limites sur le rayon issu du point x, y, z, on a

$$x' = x + r_1 \xi, \quad y' = y + r_1 \eta, \quad z' = z + r_1 \zeta.$$

Ce sont les équations de la surface F_1 en ce sens que les coordonnées de chacun des points de cette surface sont des fonctions de deux variables indépendantes. De même

$$x' = x + r_2 \xi, \quad y' = y + r_2 \eta, \quad z' = z = r_2 \zeta,$$

sont les équations de F_2.

Pour avoir les équations des séries de surfaces O_1 et O_2, il faut intégrer les équations différentielles

$$\frac{dv}{du} = t_1, \quad \frac{dv}{du} = t_2.$$

Les équations que l'on obtient renferment chacune une constante arbitraire. Si, entre l'une de ces équations et les deux équations

$$\frac{x' - x}{\xi} = \frac{y' - y}{\eta} = \frac{z' - z}{\zeta},$$

on élimine les variables u et v, on obtiendra une équation en $x'y'z'$ qui contiendra une constante arbitraire et représentera l'une ou l'autre des séries de surfaces réglées O_1, O_2 suivant que l'on aura employé l'une ou l'autre des équations données par les intégrales. Les deux séries de courbes a_1 et b_1 sur F_1, ou a_2 et b_2 sur F_2 seront représentées par les trois équations de F_1 ou F_2 et l'une ou l'autre des équations données par les intégrales.

Les deux surfaces sur lesquelles se trouvent les foyers d'un système se nomment *surfaces focales du système*. Nous les désignerons par Φ_1 et Φ_2. Ces surfaces n'ont de points réels sur un rayon que si les foyers de ce rayon sont réels ou si les racines τ_1 et τ_2 de l'équation quadratique (5), § 4, ont des valeurs réelles.

Si l'on passe d'un rayon au rayon infiniment voisin qui coupe le premier en un point situé sur Φ_1, de ce second rayon à un point troisième qui coupe le second en un point situé sur Φ_1 et ainsi de suite, on obtient une série de rayons telle, que chacun d'eux coupe le précédent en un point de Φ_1. Cette série de rayons forme donc une surface développable Ω_1, dont l'arête de rebroussement α_1 s'y trouve sur Φ_1 et qui coupe Φ_2 suivant une certaine courbe β_2. Comme nous sommes partis d'un rayon quelconque, il est clair qu'il existe une série de surfaces développables Ω_1, dont les arêtes de rebroussement forment une série de courbes α_1 tracées sur Φ_1, et qui déterminent sur Φ_2 une série de courbes β_2. De la même manière, les rayons issus des foyers situés sur Φ_2 forment une seconde série de surfaces développables Ω_2 dont les arêtes de rebroussement α_2 sont tracées sur Φ_2 et qui coupent Φ_1 suivant une série de courbes β_1. On a donc le théorème suivant :

Tout système de rayons à foyers réels peut être considéré de deux manières différentes, comme appartenant à une série de surfaces développables telles, que le lieu géométrique de leurs arêtes de rebroussement est l'ensemble des deux surfaces focales.

Toutes les génératrices de Ω_1 sont tangentes aux arêtes de rebroussement α_1, les arêtes de rebroussement se trouvent toutes sur Φ_1, donc les rayons du système sont tangents à Φ_1. On verrait de même qu'ils sont tous tangents à Φ_2. Donc

Tous les rayons d'un système qui ont des foyers réels sont des tangentes communes aux deux surfaces focales.

On peut aussi énoncer le théorème suivant comme conséquence du précédent :

Tout système de rayons à foyers réels peut être considéré comme le système des tangentes communes aux deux surfaces focales, ou comme le système des tangentes doubles d'une surface.

Pour déterminer complétement un système, on peut aussi ne se donner qu'une de ses surfaces focales Φ_1, par exemple, pourvu que l'on se donne en même temps la série de courbes α_1 de cette surface; il en résulte que

Tout système de rayons à surfaces focales réelles peut *être considéré comme le système des tangentes à une série de courbes tracées sur une surface.*

Comme tous les rayons situés sur une surface développable Ω_1 sont tangents à Φ_2, la courbe β_2 est la courbe de contact des deux surfaces. De même, toute surface développable Ω_2 est tangente à Φ_1 ou l'enveloppe suivant une certaine courbe. Donc

Chacune des deux surfaces focales d'un système est enveloppée par une des séries de surfaces développables qui renferment tous les rayons du système.

D'après un théorème connu, les génératrices rectilignes d'une surface développable qui enveloppe une autre surface suivant une certaine courbe, sont les tangentes conjuguées des tangentes à cette courbe. Donc

Les deux séries de courbes déterminées par les deux séries de surfaces développables sur les surfaces focales d'un système se coupent sur chacune de ses surfaces suivant des directions conjuguées.

Si les deux surfaces focales Φ_1 et Φ_2 se coupent, toute tangente à la courbe d'intersection est un des rayons du système, et par suite une tangente à l'une des courbes α_1. La courbe d'intersection et α_1 ont donc une tangente commune, les points de contact coïncident; la courbe α_1 est donc tangente à la courbe d'intersection. Ceci est vrai, quelle que soit la tangente à la courbe d'intersection que l'on considère. Donc toutes les courbes de la série α_1 sont tangentes à la courbe d'intersection $\Phi_1\,\Phi_2$. Il en est de même pour toutes les courbes de la série α_2. Donc

La courbe d'intersection des deux surfaces focales est la courbe enveloppe ou la courbe limite de toutes les arêtes de rebroussement situées sur les deux surfaces *focales et appartenant aux deux surfaces développables qui renferment tout le système de rayons.*

On obtient les équations des surfaces focales, comme on a obtenu plus haut celles des surfaces des points limites, au moyen des abscisses ρ_1 et ρ_2 des foyers; on a

$$x' = x + \rho_1 \xi, \quad y' = y + \rho_1 \eta, \quad z' = z + \rho_1 \zeta$$

et

$$x' = x + \rho_2 \xi, \quad y' = y + \rho_2 \eta, \quad z' = z + \rho_2 \zeta.$$

On obtient les deux séries de surfaces développables, les séries de courbes α_1, β_1 de Φ_1, α_2, β_2 de Φ_2 par l'intégration des équations différentielles

$$\frac{dv}{du} = \tau_1, \quad \frac{dv}{du} = \tau_2,$$

absolument comme cela se fait pour les surfaces O_1 et O_2 et les systèmes de courbures a_1 et b_1 de F_1, a_2 et b_2 de F_2.

Considérons enfin la surface lieu géométrique des centres d'un système de rayons. Nommons cette surface *surface centrale*. Cette surface est importante en ce sens qu'on peut considérer tous les rayons du système comme issus de ses points. Si l'on mesure les abscisses des points des rayons à partir de la surface centrale, on aura

$$r_1 = -r_2, \quad \rho_1 = -\rho_2, \quad g\mathcal{E} - (f+f')\mathcal{F} + e\mathcal{G} = 0.$$

Ces équations permettent de faire des simplifications importantes.

On obtient les équations de la surface centrale au moyen de l'expression de l'abscisse des autres

$$m = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{g\mathcal{E} - (f+f')\mathcal{F} + e\mathcal{G}}{2\Delta^2};$$

on a

$$x' = x + m\xi, \quad y' = y + m\eta, \quad z' = z + m\zeta.$$

Toutes ces surfaces, les surfaces des points limites, les surfaces focales et la surface centrale, qui sont intimement liées au système de rayons, peuvent dans certains cas particuliers se réduire à des courbes ou à des points. Certaines de ces surfaces peuvent aussi s'éloigner à l'infini, ou se réunir entre elles de manière à s'appliquer l'une sur l'autre. Le système des normales à une surface pour lequel les surfaces des points limites et les surfaces focales deviennent identiques peut être considéré comme appartenant à ces systèmes particuliers qui sont, pour ainsi dire, des systèmes limites. Le système de rayons pour lesquels $\Delta = o$ et par suite $A = o$, $B = o$, $E = o$ et qui doit être exclu de l'étude générale, parce que les valeurs de ξ, η, ζ sont indéterminées, mérite une mention spéciale. Pour ces systèmes particuliers, les surfaces des points limites et la surface centrale passent à l'infini, et, des deux surfaces focales, l'une passe à l'infini, tandis que l'autre reste déterminée et à distance finie. Des deux séries de surfaces développables qui renferment tous les rayons d'un tel système, l'une, celle dont les arêtes de rebroussement sont à l'infini, ne renferme que des surfaces cylindriques. Un pareil système peut être défini géométriquement de la manière suivante : le système de toutes les tangentes à une surface qui sont parallèles aux tangentes à une courbe donnée.

(*La suite prochainement.*)

SOLUTION DE LA QUESTION 572 ET DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. GARCET

(voir t. XIX, p. 32) ;

PAR M. DELLAC,
Professeur à Amiens (*).

La question que nous allons résoudre est celle-ci :

Connaissant la somme d'une série ordonnée par rapport aux puissances ascendantes d'une variable x, trouver la somme d'une quelconque des séries que l'on obtient en prenant les termes de n en n.

La série donnée peut s'ecrire

$$(1)\quad F(x) = \sum [A^{pn}x + B^{pn+1}x + C^{pn+2}x + \ldots + L^{(p+1)n-1}x].$$

Je désignerai par S_0 la somme des termes dans lesquels l'exposant de x est multiple de n, par S_1 la sómme de ceux où cet exposant est égal à un multiple de $n+1$; de même pour S_2, S_3,..., S_{n-1}.

Désignons par $\alpha, \beta, \gamma,\ldots, \omega$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité dont la formule générale est

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Dans l'équation (1), je remplace x successivement par αx, βx, γx,..., ωx et j'ai

$$\begin{aligned}
M_0 + iN_0 &= S_0 + S_1\alpha + S_2\alpha^2 + \ldots + S_{n-1}\alpha^{n-1},\\
M_1 + iN_1 &= S_0 + S_1\beta + S_2\beta^2 + \ldots + S_{n-1}\beta^{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
M_{n-1} + iN_{n-1} &= S_0 + S_1\omega + S_2\omega^2 + \ldots + S_{n-1}\omega^{n-1}.
\end{aligned}$$

(*) A changé de résidence. TM.

J'ajoute toutes ces égalités membre à membre en remarquant que

$$\alpha^p + \beta^p + \ldots + \omega^p = 0,$$

toutes les fois que p n'est pas multiple de n. Dans le second membre, il ne reste que des quantités réelles; il doit donc en être de même dans le premier; et c'est ce qu'il était facile de prévoir, puisque les racines α, β,..., ω étant conjuguées deux à deux ou réelles, donnent des résultats conjugués ou réels. Donc

$$S_0 = \frac{M_0 + M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1}}{n}.$$

Pour avoir S_1, multiplions la première des égalités précédentes par α^{n-1}, la deuxième par β^{n-1}, et ainsi de suite, puis ajoutons. On obtient

$$S_1 = \frac{M'_0 + M'_1 + M'_2 + \ldots + M'_{n-1}}{n},$$

en posant

$$M'_h + iN'_h = (M_h + iN_h)\left(\cos\frac{2h\pi}{n} + i\sin\frac{2h\pi}{n}\right)^{n-1};$$

d'où

$$M'_h = M_h\cos\frac{2(n-1)h\pi}{n} - N_h\sin\frac{2(n-1)h\pi}{n}.$$

On trouvera de même

$$S_2 = \frac{M''_0 + M''_1 + \ldots + M''_{n-1}}{n},$$

en posant

$$M''_h = M_h\cos\frac{2(n-2)h\pi}{n} - N_h\sin\frac{2(n-2)h\pi}{n},$$

et en général

$$S_p = \frac{M_0^{(p)} + M_1^{(p)} + M_2^{(p)} + \ldots + M_{n-1}^{(p)}}{n},$$

en posant

$$M_h^{(p)} = M_h \cos \frac{2(n-p)h\pi}{n} - N_h \sin \frac{2(n-p)h\pi}{n}.$$

Dans la série S_0 les exposants de x croîtront de n unités d'un terme à l'autre; mais si l'on pose $y = x^n$, on aura une nouvelle série ayant les mêmes coefficients et dans laquelle les exposants de la variable croîtront seulement d'une unité. On fera de même pour $\frac{S_1}{x}$, $\frac{S_2}{x^2}$,....

Tout ce qui précède s'applique aussi aux suites limitées, par exemple au binôme de Newton.

Si la série proposée reste convergente pour $x = 1$, elle le sera aussi pour $x = \alpha$, car le module de α est l'unité. On pourra donc remplacer x dans l'équation (1) successivement par les racines α, β, γ,..., ω, ce qui revient à faire $x = 1$ dans les résultats déjà obtenus.

Pour avoir des séries auxquelles nous puissions appliquer la théorie précédente, partons de celle-ci

$$-\log(1-x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots.$$

Multipliant par dx et intégrant, il vient

$$(1-x)\log(1-x) + x = \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \ldots;$$

multipliant par dx et intégrant

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x}{4}(3x-2) - \frac{1}{2}(1-x^2)\log(1-x) \\ &\qquad = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Les intégrations se font aisément dans le premier membre si l'on pose

$$1 - x = y.$$

Dans cette série (2), prenons les coefficients de quatre en quatre. Pour

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = -1$$

on a

$$\frac{1}{4} = S_0 + S_1 + S_2 + S_3,$$

$$\frac{5}{4} - 2\log 2 = S_0 - S_1 + S_2 - S_3,$$

d'où

$$S_0 + S_2 = \frac{3}{4} - \log 2,$$

$$S_1 + S_3 = \log 2 - \frac{1}{2}.$$

Faisons maintenant $x = -i = -\sqrt{-1}$. Le second membre devient

$$S_0 - S_2 + i(S_3 - S_1),$$

et voyons ce que devient le premier.

Supposons qu'on ait à chercher $\log(1 - x)$, x étant imaginaire. On posera

$$1 - x = 1 - a - bi = e^{u - vi} = e^u(\cos v - i \sin v),$$

d'où

$$1 - a = e^u \cos v, \qquad b = e^u \sin v,$$

$$e^u = \sqrt{(1 + x)^2 + b^2}, \qquad u = \frac{1}{2}\log[(1 - a)^2 + b^2],$$

$$\operatorname{tang} v = \frac{b}{1 - a}, \qquad v = \varphi + k\pi,$$

en posant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{1-a};$$

de sorte que

$$\log(1-x) = u - i(\varphi + k\pi).$$

Ce logarithme est en général indéterminé. Mais dans la question qui nous occupe, l'indétermination est levée par cette considération que le second membre de l'équation (2) est une série qui n'est convergente que dans le cercle décrit de l'origine comme centre et avec un rayon égal à l'unité (voir *Fonctions doublement périodiques* de Briot). Par conséquent la variable ne peut pas sortir de ce cercle, et par suite ne peut pas tourner autour du point singulier $a = +1$, $b = 0$. Or on sait que dans le logarithme de $1 - x$, k ne passe d'une valeur à une autre que lorsque la variable indépendante x tourne autour du point $a = 1$, $b = 0$; et comme dans notre question elle ne peut pas le faire, k aura toujours la même valeur quel que soit x. Or pour $x = 0$, k est nul; il est donc nul pour toute valeur de x, et l'on a

$$\log(1-x) = u - \varphi i.$$

Si

$$x = -i, \quad a = 0, \quad b = 1,$$

par suite

$$u = \frac{1}{2}\log 2, \quad \operatorname{tang}\varphi = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

et on obtient

$$\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} + i\,\frac{1-\log 2}{2} = S_0 - S_2 + i(S_3 - S_1),$$

d'où

$$S_0 - S_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}, \quad S_3 - S_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2.$$

Combinant ces deux équations avec les précédentes, on obtient

$$S_3 = \frac{1}{4}\log 2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots,$$

$$S_0 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{10.11.12} + \ldots,$$

$$S_1 = \frac{3}{4}\log 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{7.8.9} + \frac{1}{11.12.13} + \ldots,$$

$$S_2 = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{8.9.10} + \frac{1}{12.13.14} + \ldots.$$

La première de ces relations démontre la question 572.

En opérant de la même manière, on obtiendra les coefficients de la série pris de trois en trois :

$$S_0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}\log 3 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{7.8.9} + \ldots,$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{8.9.10} + \ldots,$$

$$S_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots.$$

Si l'on veut prendre les termes de trois en trois en conservant la variable x, on trouvera, après tout calcul fait,

$$S_0 = \frac{\varphi}{2\sqrt{3}}(2x + x^2) - \frac{1}{6}\left(1 + x - \frac{x^2}{2}\right)\log(1 + x + x^2)$$
$$- \frac{1}{6}(1 - x)^2 \log(1 - x),$$

$$S_1 = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}(1 - x)^2 \log(1 - x)$$
$$+ \frac{1}{12}(1 + 4x + x^2)\log(1 + x + x^2) + \frac{\varphi}{2\sqrt{3}}(1 - x^2),$$

$$S_2 = \frac{3x^2}{4} - \frac{1}{6}(1-x^2)^2 \log(1-x)$$
$$+ \frac{1}{12}(1-2x-2x^2)\log(1+x+x^2) - \frac{\varphi}{2\sqrt{3}}(1+2x),$$

en posant

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{x\sqrt{3}}{x+2}.$$

Ainsi on a

$$S_0 = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^6}{4.5.6} + \frac{x^9}{7.8.9} + \ldots$$

Si l'on veut que la série ne renferme que des puissances successives, on posera

$$x^3 = y, \quad x = y^{\frac{1}{3}},$$

et alors

$$S_0 = \frac{y}{1.2.3} + \frac{y^2}{4.5.6} + \frac{y^3}{7.8.9} + \ldots$$

avec

$$S_0 = \frac{\varphi}{2\sqrt{3}}\left(2y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$$
$$- \frac{1}{6}\left(1 + y^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}\right)\log\left(1 + y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)$$
$$- \frac{1}{6}\left(1 - y^{\frac{1}{3}}\right)^2 \log\left(1 - y^{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{y^{\frac{1}{3}} + 2}.$$

Pour $y = \frac{1}{8}$, on obtient

$$\frac{5\varphi}{8\sqrt{3}} - \frac{11}{48}\log 7 + \frac{1}{2}\log 2$$

$$= \frac{1}{1.2.3}\,\frac{1}{8} + \frac{1}{4.5.6}\,\frac{1}{8^2} + \frac{1}{7.8.9}\,\frac{1}{8^3} + \ldots,$$

$$\tang\varphi = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

Appliquons encore la théorie précédente au binôme de Newton, et comptons les coefficients binomiaux pris de trois en trois.

On a

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots.$$

Si l'on y fait $x = 1$, on obtient

$$2^m = S_0 + S_1 + S_2;$$

pour $x = \alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, on a

$$(1+mx) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m = \left(\cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}\right)^m$$

$$= \cos\frac{2m\pi}{6} + i\sin\frac{2m\pi}{6},$$

et par suite

$$\cos\frac{2m\pi}{6} = S_0 - \frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2}S_2,$$

$$\sin\frac{2m\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}(S_1 - S_2).$$

De là résultent

$$S_0 = \frac{2m + 2\cos\frac{2m\pi}{6}}{3},$$

$$S_1 = \frac{2^m + \sqrt{3}\sin\frac{2m\pi}{6} - \cos\frac{2m\pi}{6}}{3},$$

$$S_2 = \frac{2^m - \sqrt{3}\sin\frac{2m\pi}{6} - \cos\frac{2m\pi}{6}}{3}.$$

Ces formules conviennent à toutes les valeurs positives de m, mais elles ne conviennent pas aux valeurs négatives, car le binôme n'est pas convergent pour $x = 1$ lorsque m est négatif.

Dans le cas de m entier et positif, on distinguera six cas et on obtiendra

$$m = 6n, \qquad S_0 - 1 = S_1 = S_2 = \frac{2^m - 1}{3},$$

$$m = 6n + 1, \qquad S_0 = S_1 = S_2 + 1 = \frac{2^m + 1}{3},$$

$$m = 6n + 2, \qquad S_0 = S_1 - 1 = S_2 = \frac{2^m - 1}{3},$$

$$m = 6n + 3, \qquad S_0 + 1 = S_1 = S_2 = \frac{2^m + 1}{3},$$

$$m = 6n + 4, \qquad S_0 = S_1 = S_2 - 1 = \frac{2^m - 1}{3},$$

$$m = 6n + 5, \qquad S_0 = S_1 + 1 = S_2 = \frac{2^m + 1}{3}.$$

On voit qu'il y a toujours égalité à l'unité près entre les trois sommes S_0, S_1, S_2.

Ainsi se trouve démontré le théorème du capitaine Garcet, 1860, p. 32.

On pourrait de même prendre les coefficients de quatre en quatre et retrouver les formules de la page 9 (1861) et page 147. (Dans ces dernières, on a mis S_2 au lieu de S_3 et réciproquement.)

SOLUTION DE LA QUESTION 571

(voir p. 112);

PAR M. DELLAC.

Il faut trouver

$$z = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^p + y^p}{p^2}$$

sachant que

$$x + y = 1.$$

Cette dernière relation donne

$$\frac{dy}{dx} = -1,$$

donc

$$\frac{dz}{dx} = \sum \frac{x^{p-1} - y^{p-1}}{p} = \frac{1}{x}\sum \frac{x^p}{p} - \frac{1}{y}\sum \frac{y^p}{p}$$

ou bien

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\log(1 - x) - \frac{1}{y}\log(1 - y),$$

ou bien encore

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\log y - \frac{1}{y}\log x.$$

Le second membre est une différentielle exacte, celle de $-\log x . \log y$: intégrant de part et d'autre, il vient

$$z = C - \log x . \log y.$$

Pour $x = 1$ et par suite $y = 0$, le premier membre devient

$$\sum \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(résultat connu)},$$

tandis que la seconde se réduit à C, car $\log x . \log(1 - x)$ devient nul pour $x = 1$: donc

$$C = \frac{\pi^2}{6},$$

et l'on a

$$z = \frac{\pi^2}{6} - \log x . \log y.$$

C. Q. F. D.

GRAND CONCOURS DE 1861

(voir t. XIX, p. 322).

COMPOSITION DU MERCREDI 10 JUILLET 1861.

CLASSE DE RHÉTORIQUE. — SCIENCES.

Mécanique.

Première question. Pompes aspirantes et élévatoires, pompes aspirantes et foulantes. Causes de perte de travail moteur inhérentes aux pompes.

Deuxième question. Un corps est lancé avec une vitesse de 100 mètres à la seconde dans une direction inclinée de 45° avec l'horizon. On demande de calculer la hauteur à laquelle il arrivera, le temps qu'il mettra à revenir toucher le sol et l'amplitude du jet.

COMPOSITIONS DU JEUDI 11 JUILLET 1861.

CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Mathématiques. (Prix d'honneur.)

Un ellipsoïde étant donné, trouver le lieu des centres des sections planes dont l'aire est égale à une constante donnée.

CLASSE DE LOGIQUE. — SCIENCES.

Histoire naturelle.

1° Structure de l'œil et ses principales modifications dans la série animale.

2° Structure de l'ovule et de la graine.

CLASSE DE RHÉTORIQUE. — SCIENCES.

Mathématiques.

Première question. Une planète traversant aujourd'hui l'horizon d'un certain lieu en même temps qu'une certaine étoile, est-il possible que le même phénomène se reproduise tous les quatre ans à la même date de l'année? Quelles sont les conditions que doivent remplir, pour qu'il en soit ainsi, le plan de l'orbite de la planète, la latitude du lieu où se fait l'observation et la distance de la planète au Soleil?

La coïncidence des passages des deux astres à l'horizon aura-t-elle lieu seulement aux époques mentionnées dans l'énoncé? Connaît-on une planète pour laquelle les conditions trouvées nécessaires dans la réponse à la question précédente soient effectivement remplies (*)?

Deuxième question. Résoudre l'équation

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \text{cosin}\, x + \cos 2x.$$

COMPOSITION DU SAMEDI 13 JUILLET 1861.

CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Physique.

Première question. Dans une balance électrique de torsion, on fixe deux boules conductrices de petite dimension, A et B, de telle sorte que leurs centres soient sur la circonférence que décrit le centre de la boule mobile C et à 30° de distance l'une de l'autre. L'une d'elles, A, est au point même où se fixerait la boule C si le fil n'avait aucune tension. Par conséquent, C s'applique contre A lorsque toutes deux sont à l'état naturel, et la distance angulaire comprise entre B et C est un peu moindre que 30°.

Ceci posé, on donne aux trois boules de l'électricité de même nom. C est chassée à une certaine distance angulaire, x, de A. On mesure x et l'on abandonne l'expérience à elle-même. Au bout de cinq minutes x est devenue x'. Dans quelle proportion faudrait-il alors faire varier le fil de torsion pour que, toutes choses restant d'ailleurs les mêmes, x' devienne x''?

On sait que, dans les conditions où se fait l'expérience, la répulsion électrique, qui s'exerce entre deux boules maintenues à une distance angulaire fixe l'une de l'autre,

(*) Question retirée.

est en chaque minute la vingtième partie de la force répulsive moyenne qui a lieu pendant cette minute.

Deuxième question. De la condensation électrique.

COMPOSITION DU SAMEDI 27 JUILLET 1861.

CLASSE DE SECONDE — SCIENCES.

Histoire naturelle.

Première question. Du système nerveux dans les divers embranchements du règne animal.

Deuxième question. Des divers combustibles minéraux et de leur position géologique.

N.-B. La classe de rhétorique (sciences) composera de nouveau en mathématiques le jeudi 1er août, le problème donné le vendredi 12 juillet étant impossible à résoudre. Il paraît que ce problème aurait été, par erreur, remis dans l'enveloppe des sujets destinés au concours, après avoir été rejeté par le professeur chargé du choix de ces sujets.

AVIS

aux Candidats à l'Ecole Polytechnique dans les départements.

On s'est avisé de publier à Paris, par voie lithographique, toutes les questions, et l'on attribue aux examinateurs des propositions d'une fausseté flagrante, par exemple, *Démontrer que toute série dont les termes vont en décroissant est convergente, etc.* On ne saurait trop prémunir les élèves contre cette spéculation mercantile. (*Communiqué.*)

ÉCOLES DU GOUVERNEMENT.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1861.

COMPOSITIONS DU JEUDI 18 JUILLET 1861.

(Le matin.)

Mathématiques.

Reconnaître les diverses surfaces que peut représenter l'équation

$$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1,$$

et démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour obtenir une surface de révolution est

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0,$$

en supposant les axes coordonnés rectangulaires.

(Le soir.)

Dessin.

Une académie d'après l'antique.

Lavis à l'encre de Chine.

Faire le lavis à l'encre de Chine d'une surface cylindrique de 10 centimètres de diamètre sur 15 centimètres de hauteur. Ce cylindre devra se détacher sur un fond formé d'une teinte plate grise, il reposera sur un socle dont la surface plane sera indiquée par une teinte plate d'une très-faible intensité.

Le modèle de cette surface cylindrique pourra être fait à teintes fondues ou adoucies, ou bien à teintes plates superposées.

On admettra que le rayon de lumière a pour projections horizontale et verticale des lignes inclinées à 45° sur la ligne de terre. Le cadre limitant le dessin aura 24 centimètres de haut sur 18 centimètres de large.

COMPOSITION DU SAMEDI 20 JUILLET 1861.

Epure de géométrie descriptive.

Intersection d'une surface de révolution par un plan.

La surface sera engendrée par la révolution d'une ellipse autour d'une droite située dans son plan, et parallèle à son petit axe. Le croquis ci-contre indique comment cette surface doit être représentée. Les longueurs cotées sont exprimées en millimètres.

Les traces p et p' du plan sécant sont parallèles à la ligne de terre; leurs distances à cette droite sont indiquées sur la figure.

On construira les projections de la courbe d'intersection, en ayant soin de distinguer, par la ponctuation, les parties vues des parties cachées, suivant les règles ordinaires. On déterminera ensuite les projections d'une tangente à l'intersection.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE DE SAINT-CYR EN 1861.

COMPOSITIONS DU MERCREDI 17 JUILLET 1861.

(Le matin.)

Mathématiques.

On donne dans un triangle :

$$\log a = 0,8497568,$$
$$\log b = 0,6948976,$$
$$\text{angle } c = 67^\circ 51' 48'',4.$$

Déterminer les autres éléments du triangle ainsi que la surface.

Pour vérification, calculer directement l'angle A.

Tracé géométrique.

Echelle $= \frac{1}{25}$.

Construire le plan, l'élévation et la coupe du système des deux parallélipipèdes rectangles A, B, compris entre les trois plans horizontaux *abc*, *dfg*, *hik*; *abc* est le plan horizontal de projection.

Les corps ont un axe de symétrie commun *xy*, intersection de deux plans verticaux dont l'un est parallèle au plan de l'élévation. Les distances successives des plans horizontaux désignés sont les hauteurs respectives des corps; les horizontales *bc*, *fg*, *ik* sont parallèles au plan de l'élévation; par conséquent les arêtes *ab*, *df*, *hi* lui sont perpendiculaires.

La coupe sera faite par un plan vertical passant par l'axe de symétrie, et faisant avec celui de l'élévation un angle de 60°.

mn est une cavité demi-cylindrique circulaire dont l'axe, situé dans le plan *hik*, est parallèle aux arêtes *bc*, *fg*, *hi*.

DIMENSIONS EN MÈTRES :

A.

$bc = 3^{\mathrm{m}},7,$

$ab = 1,1,$

Hauteur $= 0,35.$

B.

$ik = 2^{\mathrm{m}},8,$

$hi = 0,8,$

Hauteur $= 1,0,$

Diamètre de $mn = 0,6.$

(Le soir)

Dessin.

Un homme lançant une pierre.

NOTE.

L'anonyme qui a résolu la question (p. 384), outre l'équation en S, emploie encore, comme second procédé, la décomposition en carrés

$$(ab - c^3)(ax + bz + cy)^2 + [y(ab - c^2) - z(bc - a^2)]^2$$
$$+ az^2(3abc - a^3 - b^3 - c^3) = a(ab - c^2);$$

il discute cette équation et parvient aux mêmes résultats que par le premier procédé. La plupart des élèves se sont servis, mal à propos, du second procédé.

SOLUTION DE LA QUESTION D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1861

(voir page 380);

PAR M. H. L,
Elève du lycée Napoléon (classe de M. Vacquant),

UN ANONYME, DE STRASBOURG,

ET M. DARBOUG,
Élève du lycée de Montpellier.

L'équation en S relative aux surfaces proposées se forme facilement et l'on trouve

$$S^3 - AS^2 - B^2S + AB^2 = 0$$

ou

$$A = a + b + c,$$

$$B^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc.$$

Le terme constant

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

est évidemment égal à AB^2.

D'après un théorème connu, B^2 est une quantité toujours positive s'annulant pour $a = b = c$.

Supposons

$$a + b + c > 0;$$

l'équation S a deux variations et par suite deux racines positives; donc la surface est un hyperboloïde à une nappe

$$a + b + c < 0.$$

L'équation en S a une seule variation, donc une seule racine positive, et la surface est un hyperboloïde à deux nappes.

Si

$$a + b + c = 0,$$

l'équation en S devient

$$S(S^2 - B^2) = 0.$$

La surface est un cylindre hyperbolique.

Si

$$a = b = c,$$

on a deux plans parallèles

$$x + y + z = \pm 1.$$

Enfin si

$$\left.\begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{avec} \quad c \gtrless 0,$$

on a un hyperboloïde

à une nappe si..... $b > 0$,
à deux nappes si... $b < 0$.

En dernier lieu, si l'un des paramètres devient infini, on a un *cône*.

Remarque. Si l'on représente par a, b, c les coordonnées d'un point de l'espace, le plan

$$x + y + z = 0$$

et la droite

$$x = y = z$$

séparent très-élégamment les points correspondants aux divers genres de surfaces.

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE).

I

Par un point A *d'une ellipse donnée on mène deux cordes rectangulaires*, AB, AC, *mais d'ailleurs quelconques : démontrer que l'hypoténuse* BC *du triangle rectangle* ABC *passe par un point fixe; et trouver le lieu géométrique de ce point, quand le sommet* A *de l'angle droit* BAC *change de position sur l'ellipse.*

La première de ces deux questions n'est pas nouvelle; M. Terquem en a donné une solution des plus simples (t. II, p. 186), et M. Beynac a depuis ajouté d'utiles remarques à cette solution (t. XVIII, p. 85). Si, en revenant encore sur la proposition dont il s'agit, je modifie la démonstration qui en a été donnée, c'est afin de comprendre dans un seul calcul les deux questions proposées.

Je prends pour axes des coordonnées les axes a, b de l'ellipse, et je nomme α, β les coordonnées x, y du point A.

La courbe sera représentée par

$$a^2(y^2-\beta^2)+b^2(x^2-\alpha^2)=0,$$

équation qu'on peut écrire ainsi

$$a^2(y-\beta)(y+\beta)+b^2(x-\alpha)(x+\alpha)=0,$$

et, en observant que

$$y+\beta=(y-\beta)+2\beta,\quad x+\alpha=(x-\alpha)+2\alpha,$$

on aura pour l'équation de l'ellipse

$$(1)\quad a^2(y-\beta)^2+b^2(x-\alpha)^2+2[a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha)]=0;$$

la fonction du premier degré $a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha)$, égalée à zéro, donne l'équation de la tangente à l'ellipse au point A.

Le système des deux droites rectangulaires AB, AC, a pour équation

$$(2)\qquad (y-\beta)^2+k(y-\beta)(x-\alpha)-(x-\alpha)^2=0,$$

k désignant un coefficient qui varie lorsqu'on fait tourner autour du point A le système des deux droites rectangulaires.

L'équation générale des lignes du second degré, passant par les points communs aux lignes (1) et (2), est

$$(3)\quad \begin{aligned}&(a^2+\lambda)(y-\beta)^2+(b^2-\lambda)(x-\alpha)^2+k\lambda(y-\beta)(x-\alpha)\\&+2[a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha)]=0.\end{aligned}$$

On peut disposer de l'indéterminée λ de manière que l'équation (3) représente deux droites dont l'une soit la tangente

$$a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha)=0.$$

Il suffit, pour cela, de donner à λ une valeur qui rende la fonction homogène

$$(a^2+\lambda)(y-\beta)^2+(b^2-\lambda)(x-\alpha)^2+k\lambda(y-\beta)(x-\alpha)$$

exactement divisible par

$$a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha).$$

Or, le quotient ne peut être qu'une fonction homogène du premier degré par rapport à $y-\beta$, $x-\alpha$, dont les deux termes s'obtiennent en divisant respectivement

$(a^2+\lambda)(y-\beta)^2$, et $(b^2-\lambda)(x-\alpha)^2$ par $a^2\beta(y-\beta)$ et $b^2\alpha(x-\alpha)$; ce quotient sera donc

$$\left(\frac{a^2+\lambda}{a^2\beta}\right)(y-\beta)+\left(\frac{b^2-\lambda}{b^2\alpha}\right)(x-\alpha).$$

En le multipliant par le diviseur $a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha)$, et égalant le produit au dividende, on a évidemment

$$k\lambda=\left(\frac{a^2+\lambda}{a^2\beta}\right)b^2\alpha+\left(\frac{b^2-\lambda}{b^2\alpha}\right)a^2\beta,$$

équation du premier degré dont la résolution fera connaître la valeur de λ en fonction de k.

En disposant ainsi de l'indéterminée λ, le premier membre de l'équation (3) devient le produit des facteurs

$$a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha),$$

et

$$\left(\frac{a^2+\lambda}{a^2\beta}\right)(y-\beta)+\left(\frac{b^2-\lambda}{b^2\alpha}\right)(x-\alpha)+2;$$

il en résulte que la droite BC a pour équation

$$\left(\frac{a^2+\lambda}{a^2\beta}\right)(y-\beta)+\left(\frac{b^2-\lambda}{b^2\alpha}\right)(x-\alpha)+2=0.$$

Et comme cette équation est vérifiée, quelle que soit la valeur de λ, par

$$y-\beta=\frac{-2a^2\beta}{a^2+b^2},\quad \text{et} \quad x-\alpha=\frac{-2b^2\alpha}{a^2+b^2},$$

on voit que la droite BC passe par un point fixe dont les coordonnées sont

$$y=\beta-\frac{2a^2\beta}{a^2+b^2}=-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\beta;$$
$$x=\alpha-\frac{2b^2\alpha}{a^2+b^2}=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\alpha.$$

C'est ce que nous voulions d'abord démontrer.

Si l'on suppose maintenant que le point A change de position sur l'ellipse, les coordonnées α, β varieront, et il faudra pour déterminer le lieu géométrique du point dont les coordonnées sont

$$y = -\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)\beta, \quad x = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)\alpha,$$

éliminer β et α entre ces deux dernières équations et l'équation

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2 b^2.$$

L'élimination donne immédiatement

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2,$$

équation qui représente une ellipse de même centre que l'ellipse donnée, semblable et semblablement placée. On peut remarquer que le lieu géométrique déterminé par l'équation obtenue est celui des points qui divisent les diamètres de l'ellipse donnée, dans le rapport des carrés des deux axes de cette ellipse. G.

II

Déterminer le lieu géométrique des centres des cônes de révolution qui passent par la parabole représentée par $z = 0$, $y^2 = 2px$. (Coordonnées rectangulaires.)

L'équation générale des cônes du second degré passant par la parabole $z = 0$, $y^2 = 2px$ est

$$(1) \quad [\beta(z-\gamma) - \gamma(y-\beta)]^2 - 2p(z-\gamma)[\alpha(z-\gamma) - \gamma(x-\alpha)] = 0;$$

α, β, γ sont trois coefficients variables qui représentent les coordonnées du centre, γ ne peut être nul; c'est ce qu'on trouve par l'application d'une méthode connue.

Pour que le cône soit de révolution, il faut, comme on sait, qu'en nommant λ un coefficient différent de zéro, l'équation

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{r}[\beta(z-\gamma)-\gamma(y-\beta)]^2-2p(z-\gamma)[\alpha(z-\gamma)-\gamma(x-\alpha)] \\ +\lambda[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-r^2]\end{array}\right\}=0$$

donne deux plans parallèles équidistants du centre (α, β, γ). Ce qui exige que les trois dérivées de l'équation (2) représentent le même plan.

Ces trois équations dérivées sont :

$$(3)\qquad p\gamma(z-\gamma)+\lambda(x-\alpha)=0,$$

$$(4)\qquad \beta\gamma(z-\gamma)-(\lambda+\gamma^2)(y-\beta)=0,$$

$$(5)\qquad (\beta^2-2p\alpha+\lambda)(z-\gamma)-\beta\gamma(y-\beta)+p\gamma(x-\alpha)=0.$$

Le coefficient λ n'étant pas nul, l'équation (3) contient x qui n'entre pas dans l'équation (4), il faut donc que cette dernière soit vérifiée elle-même, autrement elle appartiendrait à un plan différent de celui que représente l'équation (3). Ainsi, on a

$$\lambda+\gamma^2=0, \quad \beta\gamma=0,$$

d'où

$$\beta=0, \quad \lambda=-\gamma^2.$$

Ces valeurs de β et λ réduisent l'équation (5) à

$$-(\gamma^2+2p\alpha)(z-\gamma)+p\gamma(x-\alpha)=0.$$

On en tire

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\frac{p\gamma}{\gamma^2+2p\alpha}.$$

L'équation (3) donne

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\frac{-\lambda}{p\gamma}=\frac{\gamma^2}{p\gamma}=\frac{\gamma}{p}.$$

Donc,

$$\frac{\gamma}{p} = \frac{p\gamma}{\gamma^2 + 2p\alpha};$$

$$\gamma^2 + 2p\alpha = p^2,$$

$$\gamma^2 = p^2 - 2p\alpha.$$

Par conséquent, les équations du lieu géométrique cherché sont

$$\beta = 0, \quad \gamma^2 = p^2 - 2p\alpha.$$

On voit que ce lieu est une parabole située dans le plan des zx; elle a le même paramètre que la parabole donnée $z = 0$, $y^2 = 2px$. Son sommet coïncide avec le foyer de la parabole donnée; mais elle est dirigée en sens contraire. G. (*La suite prochainement.*)

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).

Quel est le plus grand quadrilatère que l'on puisse former avec quatre côtés donnés a, b, c, d?

Soit ABCD l'un des quadrilatères que l'on peut former en prenant pour côtés consécutifs a, b, c, d. Supposons $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. En nommant S l'aire de ce quadrilatère, on aura

$$(1) \qquad S = \frac{1}{2}(ad\sin A + bc\sin C).$$

En outre

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C, \quad \text{et} \quad \overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A,$$

donc

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos C;$$

d'où

$$2\,ad\cos A - 2\,bc\cos C = a^2 + d^2 - b^2 - c^2;$$

$$\cos A - \left(\frac{bc}{ad}\right)\cos C = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,.\,ad}.$$

Si l'on pose

$$\frac{bc}{ad} = h \quad \text{et} \quad \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,ad} = k,$$

l'équation précédente deviendra

$$(2) \qquad \cos A - h\cos C = k.$$

D'autre part, l'équation (1) donne

$$(3) \qquad \sin A + h\sin C = \frac{2.S}{ad}.$$

Élevant au carré les équations (2) et (3) et additionnant, il vient

$$1 + h^2 - 2\,h\,(\cos A\cos C - \sin A\sin C) = k^2 + \frac{4\,S^2}{a^2\,d^2},$$

ou

$$1 + h^2 - 2\,h\cos(A + C) = k^2 + \frac{4\,S^2}{a^2\,d^2};$$

et par conséquent

$$(4) \qquad S = \frac{ad}{2}\sqrt{1 + h^2 - 2\,h\,.\cos(A + C) - k^2}.$$

L'équation (4) montre que la plus grande valeur de S correpond à

$$\cos(A + C) = -1,$$

égalité qui donne

$$A + C = 180^\circ.$$

Il en faut conclure que *le plus grand des quadrilatères* *que l'on puisse former avec quatre côtés donnés a, b, c, d, est le quadrilatère inscriptible dans un cercle.*

En remplaçant cos $(A+C)$ par -1, l'équation (4) devient

$$S=\frac{ad}{2}\sqrt{(h+1)^2-k^2}=\frac{ad}{2}\sqrt{(h+1+k)(h+1-k)}$$

ou, parce que $h=\dfrac{bc}{ad}$ et $k=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2\,ad}$,

$$S=\frac{ad}{2}\frac{\sqrt{(2bc+2ad+a^2+d^2-b^2-c^2)(2bc+2ad-a^2-d^2+b^2+c^2)}}{2.ad},$$

équation qui donne successivement

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]};$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+d+b-c)(a+d+c-b)(b+c+a-d)(b+c+d-a)}.$$

Si l'on désigne par $2p$ la somme des quatre droites données, on aura pour l'expression du maximum de S, $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. G.

NOTE SUR LA QUESTION 572;

PAR M. ANGE LE TAUNÉAC.

Le principe invoqué à la fin de la page 266 peut être énoncé en ces termes :

« Si le terme général d'une série, u_n, a la forme $f'(n)$, » la somme S_n des n premiers termes sera donnée par la

» formule

$$S_n = f(n) + \text{const.} »$$

On aurait, par exemple,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = l(3) - 1,$$

résultat évidemment absurde.

Il n'est pas étonnant, d'après ces prémisses, que la valeur indiquée (p. 267) pour la limite de la somme des termes de la série

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{7.8.9} + \ldots$$

soit inexacte; cette valeur est $\frac{1}{4} l 2$, comme le trouve M. Prinz (p. 286).

Du reste, la série d'Euler peut être sommée par le procédé suivant, très-connu, et applicable à une foule de cas.

Soit

$$y = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^7}{5.6.7} + \frac{x^{11}}{9.10.11} + \ldots,$$

x étant supposé compris entre $+1$ et -1.

Prenant les dérivées des deux membres, on obtient

$$y''' = 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$y''' = \frac{1}{1 - x^4}.$$

De là on conclut successivement :

$$y'' = \frac{1}{4} l(1 + x) - \frac{1}{4} l(1 - x) + \frac{1}{2} \text{arc tang}\, x,$$

$$y' = \frac{1}{4}(1+x)\,l(1+x) + \frac{1}{4}(1-x)\,l(1-x)$$

$$- \frac{1}{4}\,l(1+x^2) + \frac{1}{2}\,x \text{ arc tang } x,$$

$$y = \frac{1}{8}(1+x)^2\,l(1+x) - \frac{1}{8}(1-x)^2\,l(1-x) - \frac{1}{4}\,x\,l(1+x^2)$$

$$- \frac{1}{4}(1-x^2) \text{ arc tang } x.$$

Si, dans cette dernière formule, on suppose $x = 1$, on trouve

$$y = \frac{1}{4}\,l\,2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots.$$

En combinant les relations précédentes, on en obtient d'autres; par exemple celle-ci, que je propose aux jeunes lecteurs des *Annales :*

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{3.5.9} + \frac{1}{4.7.13} + \frac{1}{5.7.17} + \ldots.$$

(3 juillet 1861.)

NOTE SUR LES SURFACES RÉGLÉES;

PAR M. DESGRANGES.

Je suppose bien que les génératrices singulières le long desquelles le plan tangent à une surface gauche reste constant, sauf ou en un seul point qui est le point central ou point de striction, ou bien en deux points qui sont alors situés à l'infini.

Je suppose bien, dis-je, que ces génératrices ont été remarquées il y a longtemps. Car je vois dans les programmes de l'Ecole Polytechnique (1853), qu'il est question du cas où « *deux génératices infiniment voisines* » *d'une surface gauche sont dans le même plan.* » Or quand cela arrive, le plan tangent est bien évidemment le même tout le long de la génératrice.

Cependant je remarque que ni dans l'analyse appliquée de M. Leroy (1854), ni dans la géométrie descriptive (1855), il n'est question de ces générations exceptionnelles.

Il serait pourtant bien singulier qu'on ne les eût jamais remarquées dans le conoïde droit, dont on fait depuis environ trente ans l'épure à l'Ecole Polytechnique et où elles sont bien apparentes.

Ces génératrices *peuvent*, il me semble, être en nombre égal au degré de l'équation de la surface.

Et il n'est pas difficile d'imaginer un conoïde où le nombre de ces génératrices serait infini, quoique toujours infiniment petit par rapport à la totalité des génératrices.

Note du Rédacteur. Le révérend Salmon paraît être le premier qui ait donné une bonne et générale classification des courbes gauches de tout degré et à l'aide d'intersection de surfaces (*Camb. and Dublin Math. Journ.*, t. V, 1850). Entre deux courbes *isomères* (*) il y a quelquefois des différences essentielles ; exemple : par une courbe du quatrième degré, intersection de deux surfaces du deuxième degré, on peut faire passer une infinité de surfaces du deuxième degré. Il n'en est pas ainsi de la courbe isomère qu'on obtient par l'intersection d'un hyperboloïde à une nappe avec une surface du troisième degré ayant deux droites non dans un même plan en commun avec l'hyperboloïde ; cette dernière surface est la seule du deuxième degré qui passe par la courbe et pas d'autres. M. Stei-

(*) μοιρα, degré.

ner a rencontré cette courbe dans son célèbre Mémoire sur les surfaces du troisième degré (*Crelle*, LIII, 1857.)

M. Cremona vient de publier sur cette même courbe un opuscule d'où est extrait ce qui précède ; le savant professeur démontre géométriquement plusieurs belles propriétés. *Intorno alla curva gobba del quart' ordine*, etc., de 8 p. in-8°. Bologna, 1861.

THÉORÈME
sur l'élévation à une puissance d'une certaine progression géométrique ;

PAR M. GARCET,
Capitaine du génie, à Marseille.

Si l'on développe suivant les puissances de x

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{p-2})^n,$$

p et n étant deux entiers positifs, et qu'on additionne les coefficients de q en q (pourvu que q ne dépasse pas p), toutes ces sommes sont égales à $\frac{(p-1)^n}{q}$ à l'unité près.

C'est-à-dire que si q divise $(p-1)^n$, toutes ces sommes sont égales à $\frac{(p-1)^n}{q}$ exactement ; et si q ne divise pas $(p-1)^n$, les unes sont égales à la partie entière de ce quotient et les autres à cette partie entière augmentée d'une unité. Ainsi comme exemple $(1+x+x^2)^7$ est

$$x^{14} + 7x^{13} + 28x^{12} + 77x^{11} + 161x^{10} + 266x^9 + 357x^8 + 393x^7 \\ + 357x^6 + 266x^5 + 161x^4 + 77x^3 + 28x^2 + 7x + 1.$$

Si l'on compte les termes de quatre en quatre on a d'abord

$$\begin{aligned} 1 + 161 + 357 + 28 &= 547, \\ 7 + 266 + 266 + 7 &= 546, \\ 28 + 357 + 161 + 1 &= 547, \\ 77 + 393 + 77 &= 547. \end{aligned}$$

c'est-à-dire toujours $\frac{3^7}{4}$ (quotient par excès ou par défaut).

Mais en outre si l'on compte de trois en trois, on a

$$\begin{aligned} 1 + 77 + 357 + 266 + 28 &= 729, \\ 7 + 161 + 393 + 161 + 7 &= 729, \\ 28 + 266 + 357 + 77 + 1 &= 729, \end{aligned}$$

c'est-à-dire toujours $\frac{3^7}{3}$.

Si on les compte de deux en deux, on a encore

$$\begin{aligned} 1 + 28 + 161 + 357 + 357 + 161 + 28 + 1 &= 1094, \\ 7 + 77 + 266 + 393 + 266 + 77 + 7 &= 1093, \end{aligned}$$

toujours $\frac{3^7}{2}$ à une unité près.

Pour le cas du binôme $(1+x)^n$, on trouve le théorème de trois en trois que je donnai l'an passé (t. XIX, p. 32), ainsi que l'égalité connue des sommes de coefficients de rang pair et de rang impair.

QUESTIONS.

596. Un polygone d'un nombre pair de côtés étant inscrit à une conique, si l'on mène par son centre des parallèles à chaque côté du polygone, de manière à former un parallélogramme en chacun de ses sommets, la somme des inverses des parallélogrammes de rang pair est égale à la somme des inverses des parallélogrammes de rang impair.

(FAURE.)

597. Si l'on prend les polaires des points milieux des côtes d'un triangle, relativement à une conique *quelconque* inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle qui a une surface constante. (FAURE.)

598. Pour quelle longitude du soleil le temps que son disque met en à traverser le méridien est-il un maximum ou un minimum?

599. Deux tétraèdres de volume V et V' étant polaires réciproques relativement à une surface du second degré dont les demi-axes principaux sont a, b, c, si l'on désigne par V_1, V_2, V_3, V_4 les volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le centre de la surface aux sommets de V, on a la relation

$$\left(\frac{abc}{6}\right)^2 = V'\frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^3}.$$

Lorsque $V = V'$ on a le théorème de M. Painvin (*Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 294).

Il existe une relation analogue entre les volumes de deux tétraèdres corrélatifs. (FAURE.)

600. Soient ABCD, MNPQ deux quadrilatères, l'un

inscrit, l'autre circonscrit à une même conique, et tels que les sommets du premier soient les points de contact du second. Démontrer que le lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère ABCD est tangent au lieu des centres des coniques inscrites au quadrilatère MNPQ.

(GROS.)

601. Le produit $(p+2)(p+3)\ldots(p+q)$ est divisible par $2.3\ldots q$ lorsque $p+1$ est premier avec q. Dans le cas contraire, il n'est pas divisible.

Par exemple,

$$\frac{17.18.19.20.21.22.23.24}{2.3.4.5.6.7.8.9} = 17.19.11.23$$

et

$$\frac{16.17.18.19.20.21.22.23}{2.3.4.5.6.7.8.9} = \frac{16.17.19.11.23}{24}$$

$= \frac{2}{3}.17.19.11.23$, nombre fractionnaire. (CATALAN.)

602. Si tous les éléments d'un plan attirent un point en raison inverse du *cube* de la distance, l'attraction totale est en raison inverse de la distance du point au plan.

(BOURGET.)

603. Si l'on désigne par $E(a, b)$ la circonférence d'une ellipse dont les axes sont $2a$, $2b$, et si l'on pose

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

on a

$$E(a, b) = E\left(\frac{a+c}{2a+b}a, \frac{a-c}{2a+b}a\right) + E\left(\frac{a+b}{2a+b}b, \frac{2\sqrt{ab}}{2a+b}b\right).$$

(PROUHET.)

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS D'EXAMEN (ECOLE POLYTECHNIQUE)

(voir p. 386).

III.

Quand l'équation F(x, y, z) = o *du second degré représente un paraboloïde hyperbolique, l'équation homogène que l'on obtient en égalant à zéro l'assemblage des termes du second degré de* F(x, y, z), *représente le système de deux plans directeurs de ce paraboloïde.*

Par la transformation des coordonnées, l'équation

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

se réduit à

$$p^2 x^2 - p'^2 y^2 - qz = 0. \tag{2}$$

Et, dans ce nouveau système, l'équation

$$p^2 x^2 - p'^2 y^2 = 0$$

détermine deux plans directeurs.

En revenant aux coordonnées primitives, l'équation (2) devient

$$\begin{aligned} p^2(\alpha + ax + by + cz)^2 - p'^2(\beta + a'x + b'y + c'z)^2 \\ - q(\gamma + a''x + b''y + c''z) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\left\{ \begin{aligned} p^2(ax + by + cz)^2 - p'^2(a'x + b'y + c'z)^2 \\ + Cx + C'y + C''z + D = 0. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Et, l'équation

$$p^2 x^2 - p'^2 y^2 = 0$$

est remplacée par

$$(4)\; p^2(\alpha + ax + by + cz)^2 - p'^2(\beta + a'x + b'y + c'z)^2 = 0.$$

Or, les équations du second degré (1) et (3), représentant la même surface rapportée aux mêmes coordonnées, ne peuvent différer que par un facteur indépendant des variables x, y, z; donc les termes du second degré de $F(x, y, z)$ sont, à ce facteur près,

$$p^2(ax + by + cz)^2 - p'^2(a'x + b'y + c'z)^2.$$

De plus l'équation

$$p^2(ax + by + cz)^2 - p'^2(a'x + b'y + c'z)^2 = 0$$

donne deux plans respectivement parallèles aux plans déterminés par l'équation (4), et ces derniers sont des plans directeurs; par conséquent la proposition est démontrée.

IV.

Trouver l'équation générale des paraboloïdes hyperboliques ayant pour plans directeurs deux plans donnés p, p' *et dont une génératrice rectiligne soit la droite donnée* α *parallèle au plan* p.

Par α je conduis un plan p'' parallèle à p; il coupera p' suivant une droite α'. Je prends pour axes des x et des y les droites α, α', et pour axe des z une droite quelconque, autre que α', et menée dans le plan p' par l'intersection des droites α, α'. Les équations des plans p' et p'' seront

$$x = 0, \quad z = 0,$$

et la droite α sera représentée par les deux équations

$$y = 0, \quad z = 0.$$

Il en résulte que l'équation générale des paraboloïdes hyperboliques ayant pour plans directeurs p, p'' ou p, p' est

$$xz + Cx + C'y + C''z + D = 0 \quad (\text{p. } 401),$$

C, C′, C″, D désignant des coefficients ou paramètres arbitraires.

Pour que la droite $y = 0$, $z = 0$ soit une génératrice de ces paraboloïdes, il faut que C et D soient nuls ; donc l'équation cherchée est

$$xz + C'y + C''z = 0.$$

V.

Lorsqu'une équation $F(x) = 0$ *à coefficients commensurables admet pour racine le nombre irrationnel* $\sqrt[m]{a}$, *le premier membre* $F(x)$ *de l'équation est nécessairement divisible par* $x^m - a$, *en supposant toutefois qu'aucune puissance de* $\sqrt[m]{a}$, *de degré moindre que* m, *ne soit commensurable* (*).

Remarquons d'abord que le produit de deux racines imaginaires conjuguées de $x^m - a = 0$ est un nombre invariable égal à α^2, en désignant par α la valeur arithmétique du radical $\sqrt[m]{a}$. Car les racines de $x^m - a = 0$ s'obtiennent en multipliant par α celles de $x^m - 1 = 0$, et l'on sait que le produit de deux racines imaginaires con-

(*) Je n'affirme pas que ce soit exactement l'énoncé d'une question d'examen ; c'est seulement l'interprétation d'un énoncé assez obscur qui m'a été remis. Plusieurs questions de ce genre ont été, je crois, proposées dans les examens publics par le célèbre auteur de la *Philosophie positive*. Elles s'appelaient alors questions de *spontanéité*. Depuis, elles ont changé de nom : on les nomme aujourd'hui questions d'*intelligence*.

juguées de cette dernière équation est toujours égal à $+1$.

Il en résulte que si aucune puissance de α de degré moindre que m n'est commensurable, le binôme $x^m - a$ n'admettra aucun diviseur à coefficients rationnels autre que $x^m - a$.

En effet soit, s'il est possible, $x^n + \ldots + r$ un diviseur de $x^m - a$, à coefficients rationnels et d'un degré moindre que m. Le produit de deux racines imaginaires conjuguées de l'équation

$$x^n + \ldots + r = 0$$

sera égal à α^2; ses racines réelles ne peuvent être que $\pm \alpha$: donc le produit $\pm r$ de toutes ses racines aura pour valeur absolue α^n. D'après cela, on voit que si le diviseur $x^n + \ldots + r$ avait ses coefficients commensurables, α^n serait rationnel, contrairement à ce qu'on a supposé, puisque n représente un nombre moindre que m.

Il est maintenant facile d'établir la proposition énoncée.

Car les équations

$$F(x) = 0, \quad x^m - a = 0$$

ayant leurs coefficients rationnels et une racine commune α, les polynômes $F(x)$ et $x^m - a$ admettent nécessairement un plus grand commun diviseur, fonction de x, dont les coefficients sont de même rationnels. Mais on vient de voir que $x^m - a$ n'a pas d'autre diviseur à coefficients rationnels que $x^m - a$; donc le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $x^m - a$ est $x^m - a$, et, par conséquent, $F(x)$ est exactement divisible par $x^m - a$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

VI.

Propriétés des diamètres conjugués de l'ellipsoïde.

Ces propriétés ont déjà donné lieu à plusieurs articles dans les *Nouvelles Annales*. Mon savant collaborateur, M. Terquem, les a déduites de formules générales, extraites d'un Mémoire de Lagrange (t. I, p. 387 et 497); on peut, sans trop s'écarter du *Programme officiel*, les déduire des formules dont la connaissance est exigée pour l'admission à l'École Polytechnique; c'est ce que je me propose de faire voir ici.

Dans les calculs suivants, les coordonnées sont supposées rectangulaires; a, b, c représentent les demi-axes de l'ellipsoïde; a', b', c' les demi-diamètres conjugués d'un système quelconque; (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) les coordonnées des points auxquels a', b', c' rencontrent la surface de l'ellipsoïde rapporté à ses axes.

1. Les équations de la droite a' sont

$$x = \frac{x_1}{z_1} z,$$

$$y = \frac{y_1}{z_1} z.$$

Par conséquent l'équation du plan diamétral conjugué de a' est

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} = 0.$$

La droite b' appartient à ce plan; donc

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 0. \tag{1}$$

Il est clair qu'on a de même

$$(2)\qquad \frac{x_1 x_3}{a^2} + \frac{y_1 y_3}{b^2} + \frac{z_1 z_3}{c^2} = 0,$$

$$(3)\qquad \frac{x_2 x_3}{a^2} + \frac{y_2 y_3}{b^2} + \frac{z_2 z_3}{c^2} = 0,$$

et, de plus,

$$(4)\qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1,$$

$$(5)\qquad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1,$$

$$(6)\qquad \frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1.$$

L'équation (4) montre que $\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{b}, \frac{z_1}{c}$ sont les *cosinus* des angles α, β, γ qu'une droite forme avec les axes des coordonnées. On peut, par la même raison, considérer $\frac{x_2}{a}, \frac{y_2}{b}, \frac{z_2}{c}, \frac{x_3}{a}, \frac{y_3}{b}, \frac{z_3}{c}$ comme les *cosinus* des angles α', β', γ', α'', β'', γ'' formés avec les axes par deux autres droites. Ces trois droites sont rectangulaires, puisque les équations (1), (2), (3) donnent

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$

$$\cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \cos\gamma\cos\gamma'' = 0,$$

$$\cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma'' = 0.$$

Il en résulte

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1,$$

$$\cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' = 1,$$

$$\cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1,$$

d'où

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2, \tag{7}$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = b^2, \tag{8}$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2. \tag{9}$$

C'est-à-dire que :

Les sommes des carrés des projections de trois diamètres conjugués a', b', c' *sur les axes de l'ellipsoïde sont respectivement égales aux carrés de ces axes.*

Et conséquemment :

La somme des carrés de trois diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des axes de l'ellipsoïde.

2. Les trois droites (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ étant rectangulaires, on a

$$\cos\alpha \cos\beta + \cos\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha'' \cos\beta'' = 0$$

ou

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0, \tag{10}$$

et de même

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0, \tag{11}$$

$$y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = 0. \tag{12}$$

Au moyen de ces trois relations, nous allons démontrer que :

La somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur une droite quelconque est égale à la somme des carrés des projections des axes sur cette droite.

En effet, soient l, m, n les cosinus des angles que font les axes des coordonnées x, y, z, avec la droite considérée, et p, p', p'' les projections de a', b', c' sur la droite (l, m, n). Comme a' est la résultante du contour formé par les coordonnées x_1, y_1, z_1, le principe relatif à la projection de la résultante donne

$$p^2 = (lx_1 + my_1 + nz_1)^2,$$

on a de même

$$p'^2 = (lx_2 + my_2 + nz_2)^2,$$
$$p''^2 = (lx_3 + my_3 + nz_3)^2.$$

Additionnant ces trois équations, en ayant égard aux relations (10), (11), (12), il vient

$$p^2 + p'^2 + p''^2 = l^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + m^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + n^2 (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$$

ou

$$p^2 + p'^2 + p''^2 = (la)^2 + (mb)^2 + (nc)^2.$$

Ce qui démontre la proposition énoncée.

3. De l'équation

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos 6 \cos 6' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0,$$

on tire d'abord

$$(\cos\alpha \cos\alpha' + \cos 6 \cos 6')^2$$
$$= \cos^2\gamma \cos^2\gamma' = (1 - \cos^2\alpha - \cos^2 6)(1 - \cos^2\alpha' - \cos^2 6').$$

Puis, développant et réduisant,

$$(\cos\alpha \cos 6' - \cos 6 \cos\alpha')^2$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2 6 + \cos^2\alpha' + \cos^2 6' - 1 = 1 - \cos^2\gamma - \cos^2\gamma'$$

ou

$$(\cos\alpha \cos 6' - \cos 6 \cos\alpha')^2 = \cos^2\gamma''.$$

Cette dernière équation devient, en substituant aux *co-*

sinus leurs valeurs $\frac{x_1}{a}$, $\frac{y_2}{b}$, etc.,

$$\left(\frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{ab}\right)^2 = \frac{z_3^2}{c^2};$$

d'où

$$(13) \qquad [x_1 y_2 - y_1 x_2]^2 = a^2 b^2 c^2 \frac{z_3^2}{c^4}.$$

Et semblablement on a

$$(14) \qquad [x_1 z_2 - z_1 x_2]^2 = a^2 b^2 c^2 \frac{y_3^2}{b^4},$$

$$(15) \qquad [y_1 z_2 - z_1 y_2]^2 = a^2 b^2 c^2 \frac{x_3^2}{a^4}.$$

Les égalités précédentes (13), (14), (15) vont nous servir à établir cette proposition :

Le parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués a′, b′, c′ *de l'ellipsoïde est équivalent au parallélipipède des axes de cette surface.*

Je prends pour base du parallélipipède des diamètres conjugués le parallélogramme construit sur a' et b'. En nommant s la surface de ce parallélogramme et θ l'angle des droites a', b', on aura

$$s = a' b' \sin\theta.$$

Mais les droites a', b' ont pour équations

$$x = \frac{x_1}{z_1} z, \quad y = \frac{y_1}{z_1} z; \quad x = \frac{x_2}{z_2} z, \quad y = \frac{y_2}{z_2} z;$$

donc

$$\cos\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

il en résulte

$$\sin^2\theta = \frac{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2}{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}.$$

Et par suite

$$s^2 = (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2,$$

égalité qui revient à

$$s^2 = (x_1y_2-y_1x_2)^2+(x_1z_2-z_1x_2)^2+(y_1z_2-z_1y_2)^2$$

comme il est facile de s'en assurer.

Les relations (13), (14), (15) réduisent cette dernière expression de s^2 à

$$s^2 = a^2b^2c^2\left[\frac{x_3^2}{a^4}+\frac{y_3^2}{b^4}+\frac{z_3^2}{c^4}\right].$$

D'autre part, la hauteur h du parallélipipède considéré étant la distance du point (x_3, y_3, z_3) au plan

$$\frac{xx_3}{a^2}+\frac{yy_3}{b^2}+\frac{zz_3}{c^2}=0,$$

on a, d'après une formule connue,

$$h^2 = \frac{1}{\frac{x_3^2}{a^4}+\frac{y_3^2}{b^4}+\frac{z_3^2}{c^4}}.$$

De là

$$s^2h^2 = a^2b^2c^2.$$

Ou, en désignant par v le volume du parallélipipède,

$$v = abc.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

4. Actuellement, je désigne par ω l'angle que le plan

des coordonnées x, y fait avec le plan des diamètres conjugués a', b' et qui a pour équation

$$\frac{xx_3}{a^2}+\frac{yy_3}{b^2}+\frac{zz_3}{c^2}=0.$$

La valeur de $\cos\omega$ sera déterminée par l'égalité

$$\cos^2\omega=\frac{\frac{z_3^2}{c^4}}{\frac{x_3^2}{a^4}+\frac{y_3^2}{b^4}+\frac{z_3^2}{c^4}},$$

ou

$$\cos^2\omega=h^2\,\frac{z_3^2}{c^4},$$

puisque

$$h^2=\frac{1}{\frac{x_3^2}{a^4}+\frac{y_3^2}{b^4}+\frac{z_3^2}{c^4}}.$$

L'équation

$$\cos^2\omega=h^2\,\frac{z_3^2}{c^4}$$

donne successivement

$$s^2\cos^2\omega=s^2h^2\,\frac{z_3^2}{c^4}=a^2b^2c^2\,\frac{z_3^2}{c^4}=a^2b^2\,\frac{z_3^2}{c^2}$$

ou

$$(s\cos\omega)^2=(ab)^2\,\frac{z_3^2}{c^2}.$$

Mais le produit $s.\cos\omega$ est la projection du parallélogramme s sur le plan des coordonnées xy; on a donc, en désignant par P cette projection,

$$P^2=(ab)^2\,\frac{z_3^2}{c^2}.$$

Si s', s'' représentent les parallélogrammes construits sur les diamètres conjugués a', c' et b', c', et P', P'' les projections de s', s'' sur le plan des x, y, il est clair qu'on aura de même

$$P'^2 = (ab)^2 \frac{y_3^2}{c^2}, \quad P''^2 = (ab)^2 \frac{x_3^2}{c^2},$$

et, par suite,

$$P^2 + P'^2 + P''^2 = (ab)^2 \left(\frac{z_3^2 + y_3^2 + x_3^2}{c^2} \right) = (ab)^2.$$

Ainsi, *la somme des carrés des projections sur le plan des* xy *des parallélogrammes construits sur trois diamètres conjugués quelconques est égale au carré du rectangle des deux axes qui appartiennent à ce plan.*

Et comme le même principe s'applique évidemment aux projections sur les deux autres plans des coordonnées, il en faut conclure que :

La somme des carrés des parallélogrammes construits sur trois diamètres conjugués quelconques de l'ellipsoïde est une quantité constante et égale à la somme des carrés des rectangles construits sur les trois axes de la surface.

Cette dernière proposition et les deux égalités

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad v = abc,$$

démontrées (nos 1 et 3), résultent encore des relations qui existent entre les racines et les coefficients d'une équation du troisième degré; c'est ce que nous allons expliquer.

5. De l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

je retranche l'équation de la sphère

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

il en résulte

$$(1) \quad x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) = 0,$$

équation d'un cône dont le sommet est au centre de l'ellipsoïde et qui passe par les points communs à l'ellipsoïde et à la sphère.

Soit

$$a > b > c.$$

Si l'on suppose

$$r = a,$$

l'équation (1) se réduit à

$$(2) \quad y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 0,$$

et comme $\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)$, $\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)$ ont le même signe, l'équation (2) n'admet pas d'autre solution réelle que $y = 0$, $z = 0$, c'est-à-dire que dans ce cas l'équation (1) représente l'axe des x.

On verra de même que si $r = c$, l'équation (1) représente l'axe des z.

Lorsque $r = b$, l'équation (1) devient

$$(3) \quad x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0;$$

les coefficients $\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$, $\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)$ ayant des signes contraires, l'équation (3) est l'équation du système de deux plans qui se coupent suivant l'axe des y.

Ainsi le cône se réduit au système de deux plans qui se coupent, ou bien à une droite, suivant que la sphère a pour diamètre l'axe moyen de l'ellipsoïde ou l'un des deux autres axes. Dans le premier cas, en coupant par un plan la surface que l'équation (1) représente, on aura pour section deux droites, et, dans le second cas, on aura pour section un seul point.

Réciproquement, si la section est formée de deux droites concourantes ou d'un seul point réel, le diamètre de la sphère sera nécessairement égal à l'un des trois axes de l'ellipsoïde, en admettant toutefois que le plan sécant ne passe pas par l'origine des coordonnées qui est le sommet du cône.

Cela posé, nommons a', b', c' trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde et α, β, γ les angles que ces diamètres forment deux à deux; en les prenant pour axes de coordonnées, l'ellipsoïde, la sphère et le cône seront respectivement représentés par les équations

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^2+\left(\frac{y}{b'}\right)^2+\left(\frac{z}{c'}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{z}{r}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{y}{r}\right)\cos\alpha+2\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{z}{r}\right)\cos\beta+2\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{z}{r}\right)\cos\gamma=1,$$

$$x^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a'^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b'^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{c'^2}\right)$$
$$+2\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{y}{r}\right)\cos\alpha+2\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{z}{r}\right)\cos\beta+2\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{z}{r}\right)\cos\gamma=0.$$

La projection sur le plan des xy de l'intersection du cône et d'un plan $z = m$ a pour équation

$$x^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a'^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b'^2}\right)+2\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{y}{r}\right)\cos\alpha$$
$$+2\frac{m}{r}\left(\frac{x}{r}\right)\cos6+2\left(\frac{m}{r}\right)\left(\frac{y}{r}\right)\cos\gamma+m^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{c'^2}\right)=0$$

ou plus simplement

$$(4)\qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

en posant

$$A=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b'^2},$$

$$B=\frac{2\cos\alpha}{r^2},$$

$$C=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a'^2},$$

$$D=\frac{2m\cos\gamma}{r^2},$$

$$E=\frac{2m\cos6}{r^2},$$

$$F=m^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{c'^2}\right).$$

Pour que le diamètre de la sphère soit égal à l'un des trois axes de l'ellipsoïde, il faut que l'équation (4) représente deux droites ou un point, ce qui donne, comme on sait,

$$AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF=0.$$

En remplaçant A, B, C, D, E, F par leurs valeurs, on trouve

$$(r^2)^3-(a'^2+b'^2+c'^2)(r^2)^2$$
$$+[a'^2b'^2\sin^2\alpha+a'^2c'^2\sin^2 6+b'^2c'^2\sin^2\gamma](r^2)$$
$$-a'^2b'^2c'^2[1+2\cos\alpha\cos6\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2 6-\cos^2\gamma]=0.$$

Les valeurs de r^2 qui vérifient cette équation étant a^2, b^2, c^2, on a

$$(5) \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (a'\, b' \sin\alpha)^2 + (a'\, c' \sin 6\,)^2 + (b'\, c' \sin\gamma)^2 \\ \qquad = (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 \end{array} \right.$$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} a'^2\, b'^2\, c'^2 [1 + 2\cos\alpha \cos 6 \cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2 6 - \cos^2\gamma] \\ \qquad = a^2\, b^2\, c^2. \end{array} \right.$$

Les relations (5) et (6) donnent une nouvelle démonstration des propositions déjà établies (n^{os} 1 et 4). Pour interpréter l'égalité (7), remarquons que les diamètres conjugués a', b', c' déterminent un trièdre dont les angles plans sont α, 6, γ. En nommant θ le dièdre opposé à α dans cet angle solide, on aura, d'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$\cos\theta = \frac{\cos\alpha - \cos 6 \cos\gamma}{\sin 6 \sin\gamma},$$

d'où

$$\sin^2\theta = \frac{1 + 2\cos\alpha \cos 6 \cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2 6 - \cos^2\gamma}{\sin^2 6 \sin^2\gamma}.$$

Il en résulte, en ayant égard à l'équation (7) :

$$a'^2\, b'^2\, c'^2 \sin^2\theta \sin^2 6 \sin^2\gamma = a^2\, b^2\, c^2,$$

$$a'\, b'\, c' \sin\theta \sin 6 \sin\gamma = abc.$$

Donc, le parallélipipède construit sur les trois diamètres conjugués a', b', c' est équivalent au parallélipipède des axes. G.

PROPRIÉTE DES COEFFICIENTS DU BINOME ET THEORÈME SYLVESTER SUR LES DÉTERMINANTS;

PAR M. BAEHR,
Professeur à Groningue.

I. Soit l'identité

$$(1) \qquad \sum_{m=0}^{m=p} (-1)^m A_m x^m (1-x)^{p-m} = \sum A'_m x^m, \ldots,$$

où les coefficients A au premier membre sont tout à fait arbitraires et indépendants entre eux. Désignant les coefficients du développement de $(a+b)^q$ de la manière suivante

$$1 = \binom{q}{0}, \quad \frac{q}{1} = \binom{q}{1}, \quad \frac{q(q-1)}{1.2} = \binom{q}{2}, \ldots,$$

$$\frac{q(q-1)\ldots(q-m+1)}{1.2\ldots m} = \binom{q}{m} = \binom{q}{q-m},$$

on aura

$$(a) \qquad A'_{p-m} = (-1)^{p-m} \sum_\mu \binom{\mu}{m} A_{p-\mu}, \ldots.$$

Si dans l'équation (1) on change x en $-\frac{x}{1-x}$, et par conséquent $1-x$ en $\frac{1}{1-x}$, et si l'on multiplie ensuite les deux membres par $(1-x)^p$, elle devient

$$\sum A_m x^m = \sum (-1)^m A'_m x^m (1-x)^{p-m},$$

de sorte que l'on a réciproquement

$$(b) \qquad A_{p-m} = (-1)^{p-m} \sum_{\mu} \binom{\mu}{m} A'_{p-\mu}, \ldots .$$

Changeant dans l'équation (1) x en $1 - x$, elle devient

$$\sum (-1)^m A_m x^{p-m} (1 - x^m = \sum A'_m (1 - x)^m,$$

et, égalisant les coefficients de x^{p-m} dans les deux membres, on obtient encore

$$(c) \quad (-1) \sum_{\mu=0}^{\mu=p-m} \binom{p-\mu}{m} A_{p-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\mu=m'} \binom{p-\mu}{p-m} A'_{p-\mu}.$$

Eliminant A' entre (a) et (b) et ensuite entre (a) et (c), on aura les deux identités

$$A_{p-m} = (-1)^m \sum_n \sum_\mu (-1)^\mu \binom{n}{\mu} \binom{\mu}{m} A_{p-n}$$

et

$$\sum \binom{p-\mu}{m} A_{p-\mu} = \sum_n \sum_\mu (-1)^\mu \binom{n}{\mu} \binom{p-\mu}{p-m} A_{p-n},$$

où l'on peut se passer de marquer les limites des variables n et μ, parce que le symbole $\binom{q}{m}$ est zéro lorsque la valeur de la variable est en dehors de ses limites.

La première de ces deux formules donne

$$\sum_\mu (-1)^\mu \binom{n}{\mu} \binom{\mu}{m} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \gtrless m, \\ (-1)^m, & \text{si } n = m, \end{cases}$$

et la seconde

$$\sum_\mu (-1)^\mu \binom{n}{\mu} \binom{p-\mu}{p-m} = \binom{p-n}{m} = \begin{cases} 0, & \text{si } n > p-m, \\ 1, & \text{si } n = p-m. \end{cases}$$

Ainsi l'on a par exemple, faisant $n=8$, $m=4$, $p=14$,

$$\sum_\mu (-1)^\mu \binom{8}{\mu}\binom{\mu}{4}$$

$$=70.1-56.5+28.15-8.35+1.70=0,$$

$$\sum_\mu (-1)^\mu \binom{8}{\mu}\binom{14-\mu}{10}$$

$$=1.1001-8.286+28.66-56.11+70.1=15$$

$$=\binom{6}{4}=\binom{6}{2},$$

et faisant $n=10=p-m$ et $n=12>p-m$,

$$\sum (-1)^\mu \binom{10}{\mu}\binom{14-\mu}{10}$$

$$=1.1001-10.286+45.66-120.11+210.1=1,$$

$$\sum (-1)^\mu \binom{12}{\mu}\binom{14-\mu}{10}$$

$$=1.1001-12.286+66.66-220.11+495.1=0.$$

II. Le théorème de M. Sylvester sur le déterminant Δ (Brioschi, traduction de M. Combescure, p. 33) peut aussi facilement se déduire des plus simples propriétés des déterminants, sans qu'on ait recours à leur multiplication. Premièrement on voit aisément que la valeur de Δ ne change pas, si, exceptant les éléments de la dernière colonne et ceux de la dernière ligne, on ajoute aux éléments d'une même ligne la même quantité h_2; car on a successivement

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+h_1 & a_{1,2}+h_1 & \ldots & a_{1,n}+h_1 & 1 \\ a_{2,1}+h_2 & a_{2,2}+h_2 & \ldots & a_{2,n}+h_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}+h_n & a_{n,2}+h_n & \ldots & a_{n,n}+h_n & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}+h_1 & a_{1,2}-a_{1,1} & \ldots & a_{1,n}-a_{1,1} & 1 \\ a_{2,1}+h_2 & a_{2,2}-a_{2,1} & \ldots & a_{2,n}-a_{2,1} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}+h_n & a_{n,2}-a_{n,1} & \ldots & a_{n,n}-a_{n,1} & 1 \\ 1+0 & 0 & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}-a_{1,1} & \ldots & a_{1,n}-a_{1,1} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2}-a_{2,n} & \ldots & a_{2,1}-a_{2,1} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2}-a_{n,1} & \ldots & a_{n,n}-a_{n,1} & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \Delta;$$

il en sera de même lorsqu'on ajoute, sous la même restriction, aux éléments d'une même colonne la même quantité k_s; donc, en faisant les deux substitutions l'une après l'autre, on obtiendra $\Delta = H$.

RÉSOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE D'UNE ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ.

$$x^3 + ax - b = 0,$$

$$\frac{2}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} = \operatorname{tang}\varphi,$$

$$\sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}} = \sin\psi,$$

$$x = \frac{\cos^3\psi}{\sin\psi}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

(*Astr. Nach.*, n° 1016, p. 118.)

THÉORÈME D'ALGÈBRE SUR LES SOMMES DES PUISSANCES DES RACINES;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Dans le numéro de janvier 1861, M. Painvin a inséré quelques remarques sur les racines multiples des équations algébriques. Je pense que le théorème suivant, qui est en rapport avec le même sujet, est digne d'être remarqué. Soient $s_0, s_1, \ldots,$ les sommes des puissances zéro, première,..., des racines de l'équation

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, 1)^n = 0,$$

et posons

$$S = a_0^{2r} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_r \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_r & s_{r+1} & & s_{2r} \end{vmatrix};$$

alors S est l'origine d'un covariant de la forme

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n$$

du degré $2r$ dans les a, et du degré $2r(n-r-1)$ dans les variables x, y (*voir* le *Quarterly Journal*, octobre 1860, p. 174). Représentons les coefficients binomiaux par $S, S_1, S_2, \ldots, S_{2r(n-r-1)}$. Si l'équation dont il s'agit a une racine (α) dont le degré de multiplicité est $n-r$, alors

$$-\alpha = \frac{S_{2r(n-r-1)}}{S_{2r(n-r-1)-1}} = \frac{S_{2r(n-r-1)-1}}{S_{2r(n-r-1)-2}} = \ldots = \frac{S_2}{S_1} = \frac{S_1}{S}$$

et, pour ce cas, l'invariant quadratique du covariant s'annule.

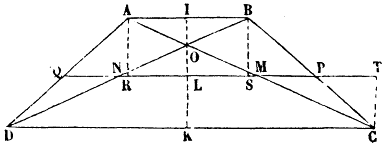
SOLUTION DE LA QUESTION 568

(voir p. 111);

PAR M. E. LEFRANÇOIS,
Elève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Lionnet).

Construire, sans admettre aucun *postulatum* relatif aux parallèles, un trapèze tel, que les milieux des deux côtés et les milieux des deux diagonales soient sur une même droite parallèle aux bases, et que chaque diagonale fasse avec cette droite et la plus petite base des angles alternes-internes égaux entre eux.

Traçons deux droites qui se coupent en O; de ce point comme centre, avec un rayon arbitraire, décrivons une



circonférence qui coupe ces droites en des points A, B, M, N; des points M et N comme centres, avec un rayon égal à l'un des diamètres AM ou BM, décrivons des arcs qui coupent les prolongements de ces diamètres en des points C et D; traçons les droites AB, BC, CD, AD, et le quadrilatère ABCD répond à l'énoncé.

En effet, les triangles OAB, OCD, OMN, étant isocèles par construction, les droites OI, OK, OL menées de leur sommet commun aux milieux de leurs bases respectives sont perpendiculaires à ces bases et bissectrices de l'un des angles au sommet AOB, COD; donc elles sont situées dans la même direction, et les droites AB, CD, MN, perpendiculaires à une même droite IK, sont parallèles; donc la figure ABCD est un trapèze où la droite MN, qui joint les milieux des diagonales, est parallèle aux bases; de plus, les triangles isocèles OAB, OMN ayant un angle égal et compris entre côtés égaux, les angles alternes-internes BAC et AMN, ABD et BNM sont égaux; il suffit donc de démontrer que les points P et Q où la direction MN rencontre les côtés BC, AD, sont les milieux de ces côtés.

Abaissons les perpendiculaires AR, BS, CT sur cette direction MN : les triangles rectangles CMT, AMR ayant l'hypoténuse CM = AM et les angles aigus en M égaux comme opposés au sommet, le côté CT = AR; les triangles rectangles BNS, AMR ayant l'hypoténuse BN = AM et les angles aigus N et M égaux, on a BS = AR ; donc BS = CT, et les triangles rectangles BSP, CTP ayant les angles aigus en P égaux comme opposés au sommet et le côté BS = CT, l'hypoténuse BP = CP; donc le point P est le milieu de BC. On prouverait de même que le point Q est le milieu de AD.

NOTE SUR LES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOIDE;

PAR M. DEWULF,
Capitaine du génie, à Bougie.

Les propriétés focales des lignes de courbure de l'ellipsoïde ont été dans ces derniers temps l'objet des études de plusieurs géomètres.

Il ne sera pas sans utilité de rappeler par ordre d'ancienneté les principaux théorèmes qui se rapportent à ces propriétés.

MONGE. — Par chaque ligne de courbure de l'ellipsoïde passent trois cylindres du second ordre dont les axes coïncident avec les trois axes de l'ellipsoïde. Tous les cylindres de même axe passant par les différentes lignes de courbure sont homofocaux.

DUPIN. — Si deux surfaces se coupent orthogonalement, elles se coupent réciproquement suivant leurs lignes de courbure.

PONCELET (*Propriétés projectives*, p. 395). — Les sommets des différents cônes du second ordre qui renferment la courbe d'intersection de deux surfaces quelconques du second ordre, sont tels, que le plan polaire de l'un quelconque d'entre eux passe à la fois par tous les autres.

Le nombre de ces sommets est au plus de quatre, et le tétraèdre qui leur appartient est tel, qu'une arête quelconque a pour polaire réciproque dans l'une et dans l'autre surface l'arête respectivement opposée de ce tétraèdre.

Ce théorème très-général, très-important, est malheureusement peu connu.

Jacobi (*Journal de Liouville*, t. XI, p. 237). — Chaque ligne de courbure de l'ellipsoïde a deux foyers.

Catalan (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. VI, année 1847). — Si deux surfaces du second ordre ont leurs plans principaux parallèles chacun à chacun, leur intersection est sur une surface de révolution du second ordre (*).

Valson (1854). — Il existe deux sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde aux points ombilicaux, telles, que la somme ou la différence des tangentes menées d'un point quelconque d'une ligne de courbure ellipsoïdale est constante.

Il existe un plan directeur par rapport à chaque sphère.

Hellermann (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1858). — Généralisation des propriétés précédentes. Elles existent pour six sphères placées deux à deux sur les trois axes de la surface du second ordre.

Del Beccaro (*Annali di Tortolini*, 1859). — Exten-

(*) Il est important de remarquer qu'en 1838 (*Journal de Liouville*, t. III, p. 402) M. Chasles et qu'en 1843 (*Journal de Crelle*) M. Steiner avaient énoncé la propriété de deux cercles doublement tangents à une conique, que la somme ou la différence des tangentes menées d'un point de la conique à ces deux cercles est constante.

sion des propriétés précédentes aux surfaces dénuées de centre et théorème analogue à celui de Joachimsthal pour les surfaces du second ordre dénuées de centre.

L'abbé Aoust (mai 1859, *Comptes rendus*). — Par une même ligne de courbure de l'ellipsoïde passent trois surfaces de révolution du second ordre, dont les axes de révolution coïncident avec les trois axes de l'ellipsoïde.

Toutes les surfaces de révolution qui ont même axe et qui passent par les différentes lignes de courbure d'une même série sont tangentes aux deux sphères focales dont les centres sont situés sur l'axe de révolution.

L'abbé Aoust (novembre 1859, *Comptes rendus*). — Toutes les propriétés d'un certain ordre des lignes de courbure de l'ellipsoïde, et notamment les propriétés focales, se déduisent d'une manière élémentaire du théorème des trois surfaces de révolution passant par une même ligne de courbure.

L'abbé Aoust, 1861. — 1° Si l'on mène deux sphères égales doublement tangentes à un ellipsoïde, telles, que leurs centres soient situés sur l'un des trois axes et que leur rayon soit moyen proportionnel entre les deux rayons principaux de courbure de l'ellipsoïde menés à l'extrémité de cet axe, toutes les surfaces de révolution du second ordre autour du même axe, et tangentes à ces deux sphères, déterminent, par leur intersection avec l'ellipsoïde, les deux systèmes de lignes de courbure de cette surface.

2° Si l'on mène les deux plans perpendiculaires à l'axe, contenant chacun l'une des cordes de contact de l'ellipsoïde avec les deux sphères, les surfaces de révolution dont les contacts avec les deux sphères sont situés entre les deux plans déterminent toutes les lignes de courbure d'un système, et celles dont les contours sont situés hors des deux plans déterminent toutes les lignes de courbure de l'autre système.

Il y a trois manières d'obtenir les lignes de courbure de l'ellipsoïde par son intersection avec des surfaces de révolution du second ordre suivant que l'on prend pour axe de révolution de ces surfaces l'un des trois axes de l'ellipsoïde.

Je ferai voir dans une autre Note comment tous ces théorèmes peuvent se déduire de celui de Poncelet.

RELATION
entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa perspective et considérations sur les foyers des lunettes;

Par M. PEAUCELLIER,
Capitaine du génie, à Nice.

Soient a, b, c trois points infiniment voisins d'une courbe et a', b', c' leurs perspectives sur une surface quelconque prise d'un point O. L'angle visuel des éléments ab, $a'b'$ est représenté par l'une ou l'autre des expressions

$$\frac{ab\sin(ab,\, \mathrm{O}a)}{\mathrm{O}a},\quad \frac{a'b'\sin(a'b',\, \mathrm{O}a')}{\mathrm{O}a'};$$

en sorte que

$$\frac{a'b'}{ab}=\frac{\mathrm{O}a'}{\mathrm{O}a}\,\frac{\sin(ab,\, \mathrm{O}a)}{\sin(a'b',\, \mathrm{O}a')}=\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\,\frac{\sin(\mathrm{RT})}{\sin(\mathrm{R}'\mathrm{T}')},$$

R, R′ étant les rayons de courbure respectifs et T, T′ les tangentes aux points considérés a et a'.

On arriverait à la même expression pour la limite des rapports $\dfrac{b'c'}{bc}$, $\dfrac{a'c'}{ac}$; d'où il suit que

$$(1) \qquad \frac{a'b' \times b'c' \times a'c'}{ab \times bc \times ac} = \left(\frac{R'}{R}\right) \frac{\sin^3(RT)}{\sin^3(R'T')}.$$

Si l'on appelle S, S′ les surfaces et P, P′ les plans des triangles abc, $a'b'c'$, on a l'égalité

$$(2) \qquad \frac{S \sin(R, P)}{S' \sin(R', P')} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Enfin l'expression du rayon du cercle circonscrit au triangle abc, c'est-à-dire du rayon de courbure en a, est

$$r = \frac{ab \times bc \times ac}{4S};$$

de même

$$r' = \frac{a'b' \times b'c' \times a'c'}{4S'}.$$

La combinaison de ces égalités avec les relations (1) et (2) donne

$$\frac{r'}{r} = \frac{R'}{R} \left(\frac{\sin R, T}{\sin R', T'}\right)^3 \frac{\sin(P', R')}{\sin(P, R)};$$

c'est la relation qui existe entre les rayons de courbure de deux points correspondants.

On peut la mettre sous la forme

$$\frac{r'}{r} = \frac{p'}{p} \left(\frac{T'}{T}\right)^3,$$

p, p' représentant les distances du centre perspectif aux plans osculateurs, T, T' les longueurs des tangentes issues d'un même point et aboutissant aux points considérés a et a'.

Si l'on considère une courbe et une perspective planes, le rapport $\frac{p'}{p}$ est constant, et les rayons de courbure varient proportionnellement aux cubes des tangentes.

Le lieu des points de rencontre des tangentes correspondantes est une droite.

Deux courbes du second ordre situées dans un même plan peuvent être considérées comme perspectives l'une de l'autre. Les centres perpectifs sont les deux points de rencontre des tangentes communes de même espèce.

On en conclut que le lieu des rencontres des tangentes en des points correspondants est une ligne droite telle, que le rapport des rayons de courbure aux points de contact varie proportionnellement aux cubes des tangentes aboutissant à ces points. Il existe quatre droites de cette espèce.

Une courbe du second degré peut être considérée comme la perspective d'une conique égale tracée sur le cône perspectif et placée dans une position symétrique; alors $p = p'$. Si l'on suppose que le centre perspectif se rapproche indéfiniment du plan de la courbe donnée, cette courbe et sa perspective se superposeront. L'égalité

$$\frac{r'}{r} = \frac{p'}{p}\left(\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}\right)^3 = \frac{\mathrm{T}'^3}{\mathrm{T}^3}$$

subsistera, et comme le sommet du cône a été choisi tout à fait arbitrairement, il en résulte ce théorème :

Dans toute section conique les rayons de courbure en deux points sont entre eux comme les cubes des longueurs des tangentes qui aboutissent à ces points.

Énoncés.

I. La formule *rigoureuse* des foyers conjugués d'une lentille revient à l'égalité $ff' = -k^2$ (f et f' représentant les distances de deux foyers conjugués à deux points fixes, lesquels sont eux-mêmes les foyers principaux).

II. Un système de lentilles ayant même axe principal se comporte comme une lentille unique quant aux foyers, et comme une autre lentille unique quant aux images.

SOLUTION DE LA QUESTION 579

(voir page 138);

PAR M. COLLAT,
Professeur au collége de Montignac-sur-Vezère (Dordogne) (*).

Étant donnée une courbe quelconque sur la sphère, d'un point fixe C sur la sphère menons à la courbe le rayon vecteur sphérique CO; prenons sur ce rayon un point O tel, qu'on ait

$$\frac{\sin\frac{CO'}{2}}{\sin\frac{CO}{2}} = \alpha,$$

quantité constante. Le lieu des points O' forme une seconde courbe telle, qu'on aura : aire de la courbe CO' est à l'aire de la courbe CO comme α^2 est à 1.

(*) Collége dirigé par M. Baillement, chef de bataillon du génie en non-activité pour infirmité temporaire.

Lemme. L'élément de la surface sphérique compris entre deux rayons vecteurs sphériques infiniment voisins et un arc de la courbe a pour expression

$$dS = 2R^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\, dL,$$

R est le rayon de la sphère, dL l'angle des deux plans qui contiennent les rayons vecteurs et λ la distance angulaire du point O au point C.

Pour le démontrer, du point C comme centre je décris sur la sphère une circonférence passant par le point O et coupant le rayon infiniment voisin au point ω. On peut négliger $O\omega O$, infiniment petit du second ordre. Quant à $CO\omega$, son rapport à la zone qui aurait C comme pôle et CP comme hauteur de la zone est égal à $\frac{dL}{d\pi}$. Cette zone a pour surface

$$2\pi R \times CP = 2\pi R^2 (1 - \cos\lambda) = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2};$$

donc

$$dS = 2R^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\, dL.$$

Théorème. Soient AB et A′ B′ les deux courbes dépendant l'une de l'autre par la relation

$$\frac{\sin \frac{CO'}{2}}{\sin \frac{CO}{2}} = \alpha;$$

$$\text{l'élément } CO\omega = dS = 2R^2 \sin^2 \frac{\lambda}{2}\, dL,$$

$$\text{»} \qquad CO'\omega' = dS' = 2R^2 \sin^2 \frac{\lambda'}{2}\, dL;$$

donc

$$\frac{dS'}{dS} = \frac{\sin^2 \frac{\lambda'}{2}}{\sin^2 \frac{\lambda}{2}} = \alpha^2;$$

or

$$\text{CAB} = \int dS,$$
$$\text{CA}'\,\text{B}' = \int dS';$$

par conséquent

$$\frac{\int dS'}{\int dS} = \alpha^2,$$

puisque tous les éléments de la surface CA′B′ sont avec les éléments de la surface CAB dans un rapport constant α^2.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DE L'AIRE DU TRIANGLE EN FONCTION DES COTÉS;

D'APRÈS HÉRON D'ALEXANDRIE.

Soient ABG le triangle, H le centre du cercle inscrit, D, E, Z les points de contact respectifs sur les côtés AB, BG, GA. Prolongeons GB d'une longueur BC = AD, GC est donc la moitié du périmètre, et le *double* de l'aire du triangle est égal au rectangle HE.GC. Élevons en H une perpendiculaire à HG et en B une perpendiculaire à GB. Soient L le point de rencontre de ces deux perpendiculaires et K l'intersection de HL et de GB; les quatre points G, H, B, L sont sur une même circonférence. Les deux triangles rectangles GLB, HAD étant équiangles sont semblables, donc

$$\frac{GB}{BL}=\frac{AD}{DH}=\frac{BC}{HE},\quad \frac{GB}{BC}=\frac{BL}{HE}=\frac{BK}{KG},$$

$$\frac{GB+BC}{BC}=\frac{BK+KE}{KE},$$

ou

$$\frac{GC}{BC}=\frac{BE}{KE},\quad \frac{\overline{GC}^2}{GC.BC}=\frac{GE.BE}{GE.BK}=\frac{GE}{\overline{HE}^2},$$

donc

$$\overline{HE}^2.\overline{GC}^2=GC.BC.GE.BE.$$

Or GC est la moitié du périmètre, BC la moitié du périmètre moins BG, GE la moitié du périmètre moins AB, BE la moitié du périmètre moins AG; mais HE.GC est le *double* de l'aire du triangle. Donc, etc.

Ce qui précède est tiré des *Extraits des manuscrits relatifs à la géométrie pratique des Grecs*, textes restitués et traduits en français par M. J.-H. Vincent, membre de l'Institut; 1858, p. 131.

SUR LA SOLUTION DE LA QUESTION 570

(voir p. 289);

PAR M. ABRAHAM SCHNÉE,
Élève du lycée Charlemagne.

M. C. Kessler arrive à prouver que

$$\alpha^2 c^2 + 2a\alpha(a^2 - c^2) - a^4 = 0.$$

Cela tient à ce que, contrairement à M. Mention, il désigne par a le demi grand axe de l'ellipse extérieure et par α celui de l'ellipse intérieure. Adoptons les notations inverses, et la relation précédente deviendra

$$\alpha^4 - 2a\alpha(\alpha^2 - c^2) - a^2c^2 = 0.$$

Je dis qu'elle ne diffère pas essentiellement de la proposée

$$\alpha^8 - 4\alpha^6a^2 + 6\alpha^4a^2c^2 - 4\alpha^2a^2c^4 + a^4c^4 = 0;$$

cette dernière peut en effet s'écrire

$$[\alpha^4 - 2a\alpha(\alpha^2 - c^2) - a^2c^2][\alpha^4 + 2a\alpha(a^2 - c^2) - a^2c^2] = 0,$$

et elle est satisfaite, soit par

$$\alpha^4 - 2a\alpha(x^2 - c^2) - a^2c^2 = 0,$$

soit par

$$\alpha^4 + 2a\alpha(\alpha^2 - c^2) - a^2c^2 = 0.$$

La première équation, d'après la démonstration de M. C. Kessler, est toujours vraie quand les ellipses jouissent de la propriété énoncée. La relation de M. Mention a donc toujours lieu, et par suite cette relation est exacte. Elle est seulement moins simple que celle de M. C. Kessler.

SOLUTION DE LA QUESTION 566

(voir p. 111);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Répétiteur à Lyon (institution de M. Poncin).

---

1. u et v étant des fonctions d'une même variable indépendante φ, p un entier absolu qui peut être nul, $D^p u$

la dérivée d'ordre p, la dérivée d'ordre zéro d'une fonction étant, par convention, cette fonction elle-même, on a, en vertu du théorème de Leibniz,

$$D^p(uv) = \sum_{h=0}^{h=p} \frac{p!}{h!(p-h)!} D^h u D^{p-h} v.$$

Posons $u = v$,

$$(A) \qquad D^p(u^2) = \sum_{h=0}^{h=p} \frac{p!}{h!(p-h)!} D^h u D^{p-h} u.$$

2. On a d'ailleurs

$$D \operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \operatorname{tang}^2\varphi;$$

n étant un entier absolu non nul, on en déduit

$$D^{n+1} \operatorname{tang}\varphi = D^n \operatorname{tang}^2\varphi.$$

Remplaçant dans l'équation (A) p par n, u par $\operatorname{tang}\varphi$, on a

$$0 < n, \quad D^{n+1} \operatorname{tang}\varphi = \sum_{h=0}^{h=n} \frac{n!}{h!(n-h)!} D^h \operatorname{tang}\varphi \, D^{n-h} \operatorname{tang}\varphi.$$

NOTE.

1° Les questions 569 et 587 ont été résolues par M. Nadal de Sorrèze.

2° La question 586 est résolue dans la *Géométrie descriptive* de MM. Gerono et Cassanac, p. 123. (Communiqué par M. Nadal.)

3° La formule Lemonnier (p. 197) se trouve dans le *Traité des Différences* de Lacroix.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 503

(voir p. 353);

PAR M. DARBOUX,
Élève du lycée de Montpellier.

Déterminer les six racines rationnelles de l'équation

$$(a^5 - a)^4 (x^2 + 14x + 1)^3 = (a^8 + 14a^4 + 1)^3 x (x - 1)^4.$$

(ABEL.)

L'équation proposée est réciproque. En effet, on peut l'écrire

$$\frac{\left[a^4 + \frac{1}{a^4} + 14\right]^3}{\left[a^4 + \frac{1}{a^4} - 2\right]^2} = \frac{\left[x + \frac{1}{x} + 14\right]^3}{\left[x + \frac{1}{x} - 2\right]^2}.$$

Pour la résoudre, posons

$$x + \frac{1}{x} - 2 = 16y^3,$$

$$a^4 + \frac{1}{a^4} - 2 = 16b^3;$$

nous aurons en substituant

$$\frac{y^3 + 1}{y^2} = \frac{b^3 + 1}{b^2}.$$

Cette équation a une première solution

$$y = b$$

qui donne

$$x = a^4,$$

$$x = \frac{1}{a^4}.$$

Supprimant cette solution, il vient

$$b^2 y^2 = b + y,$$

d'où l'on déduit y et par suite $16y^3$:

$$16y^3 = 64 \frac{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2}.$$

Mais on a

$$16y^3 = x + \frac{1}{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2,$$

on en déduit

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 8 \frac{a + \frac{1}{a}}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2},$$

d'où

$$x = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^4.$$

Remarquons maintenant que les coefficients de l'équation proposée ne dépendent en réalité que de a^4, en sorte que l'expression précédente de x a quatre valeurs qu'on obtiendra en mettant à la place de a toutes les valeurs de

$$\sqrt[4]{a^4}, \quad a, \quad -a, \quad a\sqrt{-1}, \quad -a\sqrt{-1}.$$

On trouve ainsi

$$x = \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^4, \qquad x = \left(\frac{2-a}{1+a}\right)^4,$$

$$x = \left(\frac{1+a\sqrt{-1}}{1-a\sqrt{-1}}\right)^4, \quad x = \left(\frac{1-a\sqrt{-1}}{1+a\sqrt{-1}}\right)^4,$$

Ces racines sont deux à deux réciproques.

SÉRIE LOGARITHMIQUE TRÈS-CONVERGENTE ;

D'APRÈS M. LEHMANN.

(*Astr. Nach.*, n° 1046.)

$$\log x = \log\sqrt{(1-x)(1+x)}$$

$$+\frac{\alpha}{2x^2-1}\left[1+\frac{1}{3(2x^2-1)^2}+\frac{1}{5(2x^2-1)^4}+\ldots\right];$$

x étant un nombre premier, $1-x$ et $1+x$ sont des nombres pairs, décomposables en facteurs ($\alpha =$ module), de sorte que lorsqu'on connaît les logarithmes de tous les nombres premiers inférieurs à $\dfrac{x+3}{2}$, le premier terme de cette série n'exige que des additions et des *demidiations*.

Lorsque $x > 157$ et que les logarithmes sont calculés avec quatorze décimales, il suffit de la première partie pour avoir $\log x$ aussi avec quatorze décimales exactes, parce que la seconde est alors moindre qu'une unité de quinzième ordre, excepté le cas où la quinzième décimale de $\frac{\alpha}{2x^2-1}$ est un 9.

SOLUTION DE LA QUESTION 566

(voir p. 111);

PAR M. E. COMBETTE,
Élève du lycée de Versailles,

ET M. CH. KESSLER,
Élève du lycée Saint-Louis.

Soit D^n tangφ la dérivée d'ordre n de tangφ, on a l'équation symbolique

$$D^n \operatorname{tang}\varphi = (D^1 + D^0)^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$D^n \operatorname{tang}\varphi = D^{n-1} D^0 + (n-1) D^{n-2} D^1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} D^{n-3} D^2 + \ldots,$$

équation dans laquelle on suppose

$$D^0 = \operatorname{tang}\varphi.$$

Solution. On a

$$D^1 = 1 + \operatorname{tang}^2\varphi,$$

d'où

$$D^2 = 2 \operatorname{tang}\frac{1}{\cos^2\varphi},$$

ou bien

$$D^2 = 2 D^1 D^0.$$

Prenons la dérivée dans les deux membres, il viendra

$$D^3 = 2 D^2 D^0 + 2 D^1 D^1,$$

ce qui peut s'écrire

$$D^3 = D^2 D^0 + 2 D^1 D^1 + D^0 D^1$$

ou symboliquement

$$D^3 = (D^1 + D^0)^{3-1}.$$

La loi sera donc démontrée si je fais voir qu'en accordant l'équation

$$D^n = (D^1 + D^0)^{n-1},$$

on aura aussi

$$D^{n+1} = (D^1 + D^0)^n.$$

Admettons donc que l'on ait la formule suivante

$$D^n = C_0^{n-1} D^{n-1} D^0 + C_1^{n-1} D^{n-2} D^1 + C_2^{n-1} D^{n-3} D^2$$
$$+ C_3^{n-1} D^{n-4} D^3 + C_4^{n-1} D^{n-5} D^4 + \ldots$$

Or prenons la dérivée dans les deux membres, il viendra

$$D^{n+1} = C_0^{n-1} D^n D^0 + \left.\begin{array}{r} C_0^{n-1} \\ + C_1^{n-1} \end{array}\right| D^{n-1} D^1 + \left.\begin{array}{r} C_1^{n-1} \\ + C_2^{n-1} \end{array}\right| D^{n-2} D^2 + \left.\begin{array}{r} C_2^{n-1} \\ + C_3^{n-1} \end{array}\right| D^{n-3} D^3 + \left.\begin{array}{r} C_3^{n-1} \\ + C_4^{n-1} \end{array}\right| D^{n-4} D^4 + \ldots$$

Donc, en vertu du théorème

$$C_n^{m+1} = C_n^m + C_{n-1}^m,$$

on aura

$$D^{n+1} = C_0^n D^n D^0 + C_1^n D^{n-1} D^1 + C_2^n D^{n-2} D^2 + C_3^n D^{n-3} D^3 + \ldots$$

On peut donc écrire symboliquement

$$D^{n+1} \operatorname{tang} \varphi = (D^1 + D^0)^n.$$

Par suite, il est démontré que la loi énoncée est générale.

INTÉRÊT SIMPLE ET INTÉRÊT COMPOSÉ;

D'APRÈS M. OETTINGER,
Professeur à l'Université de Fribourg (Brisgau).

GRUNERT, *Archiv. der Math. und Physik*, t. XXXVI, 2e cahier p. 189; 1861.

On doit une somme C payable en n années, savoir chaque année la même somme $\frac{C}{n}$; l'intérêt annuel est de r pour 1; le débiteur veut se libérer en une fois, combien doit-il donner à son créancier?

Il y a deux modes de libération :

1° *Par intérêt simple*. Le premier payement vaut actuellement $\frac{C}{n(1+r)}$, le deuxième payement vaut actuellement $\frac{C}{n(1+2r)}$, etc.; désignant par x la somme totale à payer actuellement, on a

$$x = \frac{C}{n}\left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+2r} + \frac{1}{1+3r} + \ldots + \frac{1}{1+nr}\right).$$

On ne peut pas trouver le terme général de la somme de cette série.

Soient

$$C = 20000, \quad n = 20, \quad r = 0{,}05,$$

on trouve

$$x = 13616{,}067635\ldots.$$

2° *Par intérêt composé*. On a

$$x = \frac{C}{r(1+r)^n};$$

conservant les mêmes nombres, on a

$$x = 12462,210343\ldots$$

Ainsi d'après le second mode le créancier reçoit moins que d'après le premier, et l'on peut démontrer qu'il en est toujours ainsi. Lequel de ces deux modes est le plus équitable? Parmi les jurisconsultes, chacun de ces modes a des partisans; d'autres restent neutres et déclarent que c'est au créancier et au débiteur à faire telle convention qu'ils jugent convenable.

En 1683, Leibniz publia dans les *Acta Eruditorum*, p. 425, ce Mémoire : *Meditatio juridico-mathematica de interusurio simplice*, et s'exprime ainsi :

Interusurium sive resegmentum anticipationis, vulgo rabat, *est differentia inter pecuniam in diem certum debitam et præsentum ejus valorem, seu quanto plus temporis petit, vel quanto minus solvere æquum sit, qui post aliquot annos demum debiturus, nunc solvit. Hujus quantitas, quæ apud jurisconsultos passim non satis, et apud aliquos non satis recte explicatur, occurato calculo* definiri potest, *duabus suppositionibus ex jure assumtis.*

Et il se prononce pour l'*intérêt composé*, mais sans en dire la raison. Il parvient à la même formule que dessus, mais par une voie différente de celle d'aujourd'hui; il somme la série infinie

$$1 - nr + \frac{n.\overline{n+1}}{1.2} r^2 - \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2.3} r^3 + \ldots$$

et ne traite même que les cinq cas particuliers où n a une de ces valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et $r = 0,05$. Le Mémoire est terminé par une Table correspondant aux quarante valeurs de n, 1, 2, 3,..., 40, et pour $r = 0,05$.

On a cru longtemps que Leibniz était l'inventeur de l'intérêt composé. Mais Kastner a montré (*Fortsetzung der Rechenkunst*, 2e édit., p. 270) que Stevin, dans sa *Practique de l'arithmétique*, p. 185, a déjà donné des Tables pour calculer la valeur actuelle d'un capital par intérêt simple et intérêt composé (*Œuvres mathématiques* de Simon Stevin, revues et augmentées par Alb. Girard. Fol. Leyde, 1634). Le Mémoire de Leibniz est de 1683. On ne connaît pas d'auteur du second mode, antérieur à Stevin.

On a fait contre le premier mode une objection irréfutable. D'après ce mode, la valeur actuelle d'un capital à payer au bout de n années serait $\frac{C}{n}(1 - nr)$, et si $nr = 1$; la valeur actuelle serait nulle, et si $m > 1$, le créancier deviendrait débiteur, résultats absurdes.

M. Œttinger cherche à prouver mathématiquement, par des arguments fondés sur la nature de la dette, que le second mode est le plus équitable.

Le créancier et le débiteur contractent entre eux une convention; le premier, à un instant donné, confie au second une certaine somme comptant, le second s'oblige, non-seulement de rendre l'argent à la fois ou successivement, mais de faire valoir l'argent qui reste entre ses mains. Lorsque le débiteur a rempli les conditions sur le payement des annuités et des intérêts, la dette est éteinte; le créancier n'agit qu'une seule fois au premier instant en donnant la somme, tandis que le débiteur doit agir continuellement; c'est pour cela qu'on ne compare pas des sommes à payer simultanément, mais successivement et dont la valeur doit être ramenée à une époque fixée.

La somme de ces valeurs réduites doit être égale au capital prêté; car si le débiteur voulait se libérer tout de suite, il devrait immédiatement rendre toutes les annuités; c'est donc là le vrai critérium...

Soit un capital C payable en n annuités plus les intérêts du capital restant. Soient A_p une de ces annuités, L_p le $n^{ième}$ payement; on aura

$$L_p = A_p + (A_p + A_{p+1} + \ldots + A_n)r.$$

On donne à p successivement toutes les valeurs 1, 2, 3,..., n.

Ramenant L_p au temps initial *par intérêt composé* et faisant la somme de toutes les réductions, on aura

$$\sum_1^n \frac{L_p}{(1+r)^p} = \sum_1^n \frac{A_p}{(1+r)^p} + \frac{rA_p}{\sum_1^p (1+r)^p} = R;$$

or

$$\frac{rA_p'}{\sum (1+r)^p} = rA_p \frac{1-(1+r)^{-p}}{n} = A_p - \frac{A^p}{(1+r)^p},$$

donc

$$\sum_1^n \frac{A_p}{(1+r)^p} = \sum_1^n A_p = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Ainsi l'intérêt composé satisfait au critérium indiqué ci-dessus.

Appliquons maintenant l'*intérêt simple*.

On a l'inégalité

$$\frac{1}{1+mr} > \frac{1}{(1+r)^n} \quad \text{pour} \quad m > 1:$$

donc

$$\sum_1^n \frac{L_p}{1+pr} > \sum \frac{L_p}{(1+r)^p}$$

ou

$$\sum_1^n \frac{L_p}{1+pr} > A_1 + A_2 + \ldots + A_n;$$

par conséquent le critérium n'a plus lieu, le rabat est trop grand.

Si les intérêts se payent par *semestre* et les annuités par années, il faut poser

$$r = 2r',$$

où l'on trouve, employant l'intérêt composé,

$$\frac{L_1}{(1+r_1)} = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{1+r_1},$$

$$\frac{L_2}{(1+r_1)^2} = \frac{A_1}{(1+r')^2} + \frac{A_1 + \ldots + A_n}{(1+r^2)},$$

$$\frac{L_3}{(1+r_1)^3} = \frac{A_2 + \ldots + A_n}{(1+r)},$$

et ainsi de suite.

Faisant la somme, on trouve comme ci-dessus

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$$

pour cette somme, ce qui n'a plus lieu pour l'intérêt simple.

L'auteur donne encore une seconde démonstration relative à l'emploi exclusif de l'intérêt composé.

Exemple numérique. Les neuf sommes décroissant par 50 francs : 1500, 1450, 1400, 1350, 1300, 1250, 1200, 1150, 1100, 1050 sont à rembourser année par année en 10 années, savoir 1500 à la fin de la première année et 1050 à la fin de la dixième année.

Appliquant l'intérêt composé et $r = 0{,}05$, la valeur actuelle est 9999,999999.

Cette question revient à celle-ci :

Un capital de 10000 francs doit être remboursable en 10 années par annuités de 1000 francs en tenant compte des intérêts à 5 pour 100. On a donc

$$C = 10000, \quad A_1 = A_2 = \ldots = A_9 = 1000;$$

alors

$$L_1 = 1500, \quad L_2 = 1450, \ldots, \quad L_3 = 1050,$$

et réduisant, on trouve

$$R = 10000 \text{ à très-peu près.}$$

Appliquant l'intérêt simple, on obtient

$$R = 10259{,}46731644,$$

réduction trop grande.

M. OErsted discute encore d'autres cas.

En tête du Mémoire, l'auteur a mis avec une érudition germanique une bibliographie complète, livres, dissertations, journaux, de la polémique relative aux deux intérêts, depuis Leibniz (1684) jusqu'à nos jours (1854).

La Synagogue proscrit toute espèce d'intérêt entre israélites et prend des précautions minutieuses pour qu'on ne puisse éluder la défense. Ainsi le créancier ne peut accepter aucun présent, aucun cadeau de son débiteur, ni accepter de lui une vente, un loyer inférieurs au prix vénal, au prix de location, et cela pendant un espace de temps assez long. Mais Moïse permet l'intérêt envers l'étranger venant commercer en Palestine, car la défense aurait rendu tout commerce avec le dehors impossible. L'Eglise a imité la Synagogue, mais les casuistes ont trouvé moyen de tranquilliser la conscience des capitalistes. On sait qu'un procès de banqueroute perdu par les Jésuites à Marseille a beaucoup contribué à l'abolition de leur ordre en 1773.

Il paraît que l'érudit géomètre d'outre-Rhin n'a pas eu connaissance de l'ouvrage suivant, assez rare :

Tableau comparatif de la nouvelle et de l'ancienne *méthode de calculer les intérêts composés à cinq pour cent*, par Jean-Baptiste de Mangold, chevalier de Saint-Louis, chef de bataillon en retraite. In-8 de 171 pages.

Ce Mémoire, adressé à Louis XVIII, fut renvoyé au Ministre de l'Intérieur, qui conseilla de le soumettre à l'Académie des Sciences qui, d'après un Rapport très-favorable de M. Cauchy (24 mars 1817), donna une complète approbation. Dès lors le Ministre de l'Intérieur déclara qu'il fallait une disposition législative. A cet effet l'auteur adressa une pétition à la Chambre des Députés, et, à la suite d'un Rapport très-élogieux de M. de Coupigny, député du Pas-de-Calais (*Moniteur* du 19 février 1822), le Mémoire de M. de Mangold fut renvoyé au bureau des renseignements et au Ministre de l'Intérieur, et l'affaire, selon l'ordinaire, en est restée là.

Le Rapport de Cauchy n'est pas inséré dans les Mémoires de l'Académie. Il se trouve sans doute aux Archives et j'essayerai d'en avoir communication.

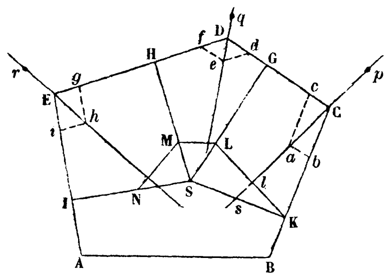
M. de Mangold a vécu retiré à Vieux-Brissac (Haut-Rhin). On n'en parle dans aucun dictionnaire biographique.

SOLUTION DE LA QUESTION 595

(voir p. 320);

PAR M. TEVFIK,
Capitaine d'état-major à Constantinople.

Désignons les directions des forces p, q et r par les lignes Ca, De et Eh et supposons que la force p appliquée au point C soit Cp et $Ca = Cp$. Si l'on mène du point a les lignes ab et ac parallèles aux côtés BC, CD, le point C est tenu en équilibre par les forces supposées Cb, Cp et Cc.



Donc si l'on prend Dd = Cc, si l'on fait le parallélogramme De, et si l'on prend aussi Eg = Df et si l'on construit le parallélogramme Eh, le point D est tenu en équilibre par le moyen des forces Dd, q et Df, et de même le point E est tenu en équilibre par les forces Eg, r et Ei; donc on aura les proportions suivantes

$$\mathrm{C}a : \mathrm{D}e : \mathrm{E}h :: p : q : r$$

et

$$ac : fe : ih : \mathrm{E}i :: \text{tens. BC} : \text{tens. CD} : \text{tens. DE} : \text{tens. EA}.$$

Mais les angles G et K du quadrilatère SGCK sont droits, la somme des angles S et C doit être aussi égale à deux angles droits et la somme des angles C et c du parallélogramme des forces Cc et Cb devient aussi égale à deux angles droits; donc l'angle S est égal à l'angle c.

Et ainsi les triangles Kls et CKs sont semblables, et les angles sKl, aCb ou Cac sont aussi égaux; donc les triangles LKS et Cac deviennent semblables, et on peut prouver de même que les triangles Def et MDS, et aussi les triangles Ehi et MNS sont semblables; donc on y aura les proportions suivantes

$$\mathrm{LK} : \mathrm{LS} :: \mathrm{C}a : \mathrm{C}c$$

et

$$LS : LM :: ef : Dc,$$

d'où

$$LK : LM :: Ca : De,$$
$$:: p : q,$$

et ainsi

$$LM : MN :: q : r$$

et

$$SK : SL :: ac \,.\, Cc$$
$$:: \text{tens. BC} : \text{tens. CD, etc.}$$

M. Cuenoud, de Lausanne, ramène la solution à ce lemme : Lorsque trois forces appliquées à un point se font équilibre, elles sont proportionnelles aux côtés d'un triangle respectivement perpendiculaires à ces forces.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DESARGUES

(voir page 94).

Soit le cercle à centre O, ayant pour équation

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Sur l'axe des y prenons un point quelconque R; posons

$$OR = a;$$

prenons sur l'axe des y

$$OA = \frac{r^2}{a}.$$

Menant par A une parallèle à l'axe des x, elle est la polaire du point R. Menons par R une *seconde* parallèle à l'axe des x.

Par un point quelconque M (coord. x', y') du cercle, menons la tangente MNP rencontrant la polaire en P et la seconde parallèle en N; prenons sur cette seconde parallèle un point Q tel, que l'on ait

$$\mathrm{RN}.\mathrm{RQ} = m^2;$$

m est une longueur donnée, de sorte que N et Q font partie d'une involution sur la seconde parallèle, le point M variant.

S est le point où la transversale MQ rencontre la polaire;

$$yy' + xx' = r^2,$$

équation de la tangente; d'où l'on déduit

$$\mathrm{RN} = \frac{r^2 - ay'}{x'},$$

$$\mathrm{RQ} = \frac{m^2 x'}{r^2 - ay'},$$

$$\mathrm{AP} = \frac{r^2(a - y')}{ax'}.$$

L'équation de la droite MQS est

$$(x - x')(a - y')(r^2 - ay') = (y - x')x'(m^2 - r^2 + ay'),$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{AS} = \frac{x'(m^2 - r^2 + a^2)}{a(a - y')},$$

$$\mathrm{AS}.\mathrm{AP} = \frac{r^2(m^2 - r^2 + a^2)}{a^2},$$

quantité constante; donc P et S sont en involution sur la polaire. Les pôles, polaires, tangentes, involution restent tels en projection; donc la proposition subsiste pour une conique quelconque.

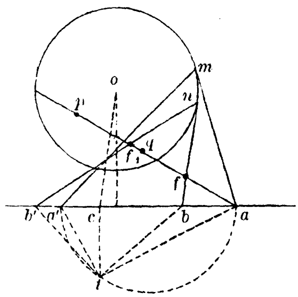
Dernière partie du théorème, démontrée par
M. Poudra.

Nous prenons le cas général et les notations de la page 94.

Nous supposons que le sommet t du cône soit rabattu sur le plan du papier; puisque

$$ct = ca.ca' = cb.cb' = \ldots,$$

il s'ensuit que les droites ta, ta', etc., tb, tb', etc., sont



rectangulaires, et elles sont parallèles à celles qui sont les perspectives des droites correspondantes ma, ma', etc., nb, nb', etc., puisque le plan sécant doit être parallèle à celui du sommet et dont le terme est aa', etc.

Maintenant considérons, en un point quelconque n de la courbe, les quatre droites nf, nf_1, np, nq (*); elles forment toujours un faisceau harmonique, puisque les quatre points f, f_1, p, q forment un rapport harmonique.

Or dans la perpective les deux droites nfb, nfb' deviennent rectangulaires, et comme les quatre droites nf, nf_1, np, nq donnent en perspective quatre droites formant un faisceau harmonique, il faut que les droites correspondantes à celles np, nq soient des bissectrices des angles des premiers. Ainsi dans la figure qui résultera

(*) Le point q est le même que le point t de la ligne 16 en descendant de la page 94. TM.

de la perspective du cercle, nous aurons une tangente, une normale et les deux bissectrices, et ces deux dernières iront passer par les points fixes qui seront les perspectives de ceux p et q; par conséquent ces points seront les foyers de la courbe.

SUR UN PROBLÈME D'HOMOGRAPHIE (QUESTION 296)

(voir t. XIII, p. 50);

PAR M. CREMONA,
Professeur à l'université de Bologne.

On donne dans le même plan deux systèmes de sept points chacun et qui se correspondent. Faire passer par chacun de ces systèmes un faisceau de sept rayons, de telle sorte que les deux faisceaux soient homographiques. Démontrer qu'il n'y a que trois solutions.

C'est une question énoncée par M. Chasles dans le t. XIV, p. 50. MM. Abadie (t. XIV. p. 142), Poudra (t. XV, p. 58) et de Jonquières (t. XVII, p. 399) ont démontré que les sept points donnés de chaque système, pris six à six, fournissent une cubique (courbe plane du troisième ordre) passant par les six points choisis, comme lieu du sommet du faisceau, dont les rayons doivent contenir ces mêmes points. Deux de ces cubiques ont en commun cinq points donnés à priori; parmi les autres *quatre* intersections, il faut trouver les *trois* points qui satisfont à la question proposée. M. de Jonquières a démontré que ces *quatre* intersections n'appartiennent pas toutes les quatre à une troisième cubique, et par conséquent le problème n'admet pas quatre solutions, comme on pourrait le croire au premier abord. Je me propose ici de déterminer directement, parmi les quatre points d'intersection, celui qui est étranger à la question.

Soient (a, b, c, d, e, f, g), (a', b', c', d', e', f') les deux systèmes de sept points. Rapportons le premier système au triangle abc; soient x, y, z les coordonnées trilinéaires d'un point quelconque m, et que les points donnés soient déterminés par les équations suivantes :

(a) $$y = 0, \quad z = 0,$$

(b) $$z = 0, \quad x = 0,$$

(c) $$x = 0, \quad y = 0,$$

(d) $$x = y = z,$$

(e) $$x : y : z = \alpha : \beta : \gamma,$$

(f) $$x : y : z = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1,$$

(g) $$x : y : z = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2.$$

De même, en rapportant le second système au triangle $a'b'c'$, soient x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque m', et que les points donnés soient exprimés par

(a') $$y' = 0, \quad z' = 0,$$

(b') $$z' = 0, \quad x' = 0,$$

(c') $$x' = 0, \quad y' = 0,$$

(d') $$x' = y' = z',$$

(e') $$x' : y' : z' = \alpha' : \beta' : \gamma',$$

(f') $$x' : y' : z' = \alpha'_1 : \beta'_1 : \gamma'_1,$$

(g') $$x' : y' : z' = \alpha'_2 : \beta'_2 : \gamma'_2.$$

Les rapports anharmoniques des deux faisceaux de quatre rayons $m(a, b, c, e)$, $m'(a', b', c', e')$ sont

$$\frac{x(\beta z - \gamma y)}{y(\alpha z - \gamma x)}, \quad \frac{x'(\beta' z' - \gamma' y')}{y'(\alpha' z' - \gamma' x')};$$

donc, en égalant ces rapports, on aura l'équation

$$\alpha'(\beta z - \gamma y)\frac{x}{x'} + \beta'(\gamma x - \alpha z)\frac{y}{y'} + \gamma'(\alpha y - \beta x)\frac{z}{z'} = 0.$$

De même l'égalité des rapports anharmoniques des faisceaux $m(a, b, c, f)$, $m'(a', b', c', f')$ exige que l'on ait

$$\alpha'_1(\beta_1 z - \gamma_1 y)\frac{x}{x'} + \beta'_1(\gamma_1 x - \alpha_1 z)\frac{y}{y'} + \gamma'_1(\alpha_1 y - \beta_1 x)\frac{z}{z'} = 0,$$

et les faisceaux $m(a, b, c, d)$, $m'(a', b', c', d')$ donnent

$$(z - y)\frac{x}{x'} + (x - z)\frac{y}{y'} + (y - x)\frac{z}{z'} = 0.$$

En éliminant x', y', z' de ces trois équations, nous aurons l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha'(\beta z - \gamma y) & \beta'(\gamma x - \alpha z) & \gamma'(\alpha y - \beta x) \\ \alpha'_1(\beta_1 z - \gamma_1 y) & \beta'_1(\gamma_1 x - \alpha_1 z) & \gamma'_1(\alpha_1 y - \beta_1 x) \\ z - y & x - z & y - x \end{vmatrix} = 0,$$

qui représente une cubique G lieu d'un point m tel, que le faisceau de six rayons $m(a, b, c, d, e, f)$ soit homographique au faisceau analogue $m'(a', b', c', d', e', f')$. On voit intuitivement que cette courbe passe par les points a, b, c, d, e, f.

De même les points a, b, c, d, e, g donnent la cubique F

$$\begin{vmatrix} \alpha'(\beta z - \gamma y) & \beta'(\gamma x - \alpha z) & \gamma'(\alpha y - \beta x) \\ \alpha'_2(\beta_2 z - \gamma_2 y) & \beta'_2(\gamma_2 x - \alpha_2 z) & \gamma'_2(\alpha_2 y - \beta_2 x) \\ z - y & x - z & y - x \end{vmatrix} = 0,$$

et les points a, b, c, d, f, g donnent la cubique E

$$\begin{vmatrix} \alpha'_1(\beta_1 z - \gamma_1 y) & \beta'_1(\gamma_1 x - \alpha_1 z) & \gamma'_1(\alpha_1 y - \beta_1 x) \\ \alpha'_2(\beta_2 z - \gamma_2 y) & \beta'_2(\gamma_2 x - \alpha_2 z) & \gamma'_2(\alpha_2 y - \beta_2 x) \\ z - y & x - z & y - x \end{vmatrix} = 0.$$

Les cubiques G, F ont, outre a, b, c, d, e, quatre points communs; un de ces points n'appartient pas à la cubique E. On obtient ce point en observant que les équations des courbes G, F sont *visiblement* satisfaites par

$$\frac{\alpha'(\beta z - \gamma y)}{z - y} = \frac{\beta'(\gamma x - \alpha z)}{x - z} = \frac{\gamma'(\alpha y - \beta x)}{y - x},$$

c'est-à-dire

$$x : y : z = \frac{\beta' - \gamma'}{\beta\gamma' - \beta' \gamma} : \frac{\gamma' - \alpha'}{\gamma\alpha' - \gamma'\alpha} : \frac{\alpha' - \beta'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$

Voilà la construction graphique de ce point que je désigne par o.

Considérons les deux systèmes de cinq points (a, b, c, d, e) et (a', b', c', d', e') dont le point o dépend exclusivement, et transformons homographiquement le second système, de manière que quatre parmi les cinq points a', b', c', d', e' aient pour correspondants les quatre points homonymes du premier système. Dans cette transformation, construisons le point qui correspond au point *omis* du second système. Ainsi en omettant successivement les points a', b', c', d', e', on obtiendra cinq points a_1, b_1, c_1, d_1, e_1. Les droites aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1 passent toutes les cinq par le point cherché o. Par exemple, en omettant e', on a le point e_1 dont les coordonnées sont

$$x : y : z = \alpha' : \beta' : \gamma';$$

et, si l'on omet d', on a le point d_1 représenté par

$$x : y : z = \frac{\alpha}{\alpha'} : \frac{\beta}{\beta'} : \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Donc les droites dd_1, ee_1, ont les équations

$$\alpha'(\beta\gamma' - \beta'\gamma)x + \beta'(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)y + \gamma'(\alpha\beta' - \alpha'\beta)z = 0,$$

$$(\beta\gamma' - \beta'\gamma)x + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)y + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)z = 0,$$

et l'on voit bien qu'elles sont satisfaites par les coordonnées du point o.

Des points (a, b, c, d, e), (a', b', c', d', e'), on a déduit un point o commun aux cubiques G, F ; de la même manière, on peut, des points (a, b, c, d, f), (a', b', c', d', f') déduire un point commun aux cubiques G, F, etc.

En conclusion, les trois points qui seuls résolvent la question proposée sont les points communs aux trois cubiques E, F, G, autres que a, b, c, d, c'est-à-dire les intersections des cubiques F, G autres que a, b, c, d, e, o (*voir*, pour la construction de ces trois points, le *Compte rendu* du 31 décembre 1855).

SUR LA SURFACE (4ᵉ DEGRÉ) DES ONDES DE FRESNEL;

PAR M. H. DURRANDE,
Professeur à Agen.

Étant donnée une surface du second ordre à centre, représentée par l'équation

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

on la coupe par une sphère concentrique

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

on obtient une conique sphérique située sur le cône

$$(3) \qquad \left(A - \frac{1}{R^2}\right)x^2 + \left(B - \frac{1}{R^2}\right)y^2 + \left(C - \frac{1}{R^2}\right)z^2 = 0.$$

A chacune des coniques sphériques situées sur la surface (1), correspond évidemment une conique sphérique supplémentaire située sur la même sphère.

Cela admis, si l'on suppose qu'on fasse varier R, on demande quel est le lieu des coniques sphériques supplémentaires de celles comprises dans le système des équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2=R^2,\\ &\left(A-\frac{1}{R^2}\right)x^2+\left(B-\frac{1}{R^2}\right)y^2+\left(C-\frac{1}{R^2}\right)z^2=0. \end{aligned}\right.$$

Les équations de la conique supplémentaire représentée par le système (4) pour une valeur particulière de R se trouvent aisément, en remarquant que cette courbe est l'intersection de la sphère R par le cône supplémentaire de celui qui est représenté par la seconde des équations (4). Donc les équations d'une conique supplémentaire seront

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2=R^2,\\ &\frac{x^2}{A-\frac{1}{R^2}}+\frac{y^2}{B-\frac{1}{R^2}}+\frac{z^2}{C-\frac{1}{R^2}}=0. \end{aligned}\right.$$

Pour avoir l'équation du lieu de ces coniques, il suffit d'éliminer le paramètre variable R, ce qui donne

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)(BCx^2+ACy^2+ABz^2)\\ &-(B+C)x^2-(C+A)y^2-(A+B)z^2+1=0, \end{aligned}\right.$$

équation du quatrième degré que l'on peut discuter et qui représente des surfaces présentant de grandes analogies avec les surfaces du second ordre.

Il est facile de voir que l'équation (6) comprend comme cas particulier l'équation de la surface des ondes de Fresnel.

En effet si l'on fait dans l'équation (6) $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$, $C = \frac{1}{c^2}$, ce qui revient à supposer que l'on parte d'un ellipsoïde, on trouve l'équation

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\\ &-a^2(b^2+c^2)x^2-b^2(a^2+c^2)y^2-c^2(a^2+b^2)z^2\\ &+a^2b^2z^2=0,\end{aligned}\right.$$

qui est l'équation bien connue de la surface des ondes de Fresnel.

Il semble que dans une étude purement géométrique de la surface des ondes, on pourrait prendre la propriété précédente comme définition de la surface. Elle représente d'ailleurs, si je ne me trompe, la liaison la plus intime entre la surface des ondes et la surface du second ordre d'où on la déduit.

SOLUTION DE LA QUESTION 537

(voir t. XIX, p. 307);

PAR M. DARBOUX,
Élève du lycée de Montpellier.

Discuter la surface donnée par l'équation polaire

$$(A)\qquad \rho^3(3\sin^2\theta\cos^2\psi + m\sin^2\theta - 1) = a^3.$$

Il est évident, avant toute discussion, que la surface admet l'origine pour centre et les plans coordonnés pour plans de symétrie. En effet, si l'on change θ en $\pi \pm \theta$, ψ en $\pi \pm \psi$ ou $2\pi \pm \psi$, l'équation n'est pas altérée.

Cela posé, je remarque que la surface A peut être considérée comme le lieu des intersections des deux surfaces

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \rho = ak, \\ 3\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\psi + m\rho^2 \sin^2\theta - \rho^2 = \dfrac{a^2}{k}, \end{array}\right.$$

quand on fait varier k. Passons aux coordonnées ordinaires; les équations des deux surfaces deviendront

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 k^2, \\ (2+m)x^2 + (m-1)y^2 - z^2 = \dfrac{a^2}{k}, \end{array}\right.$$

ce qui montre que le lieu peut être obtenu par l'intersection d'une série de sphères avec une série de surfaces du second degré restant constamment semblables à elles-mêmes. Mais on peut remplacer ces dernières surfaces par les cônes compris dans l'équation générale

$$(3)\quad \left(2 + m - \frac{1}{k^3}\right) x^2 + \left(m - 1 - \frac{1}{k^3}\right) y^2 - \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) z^2 = 0.$$

Les intersections des sphères et des cônes correspondants qui sont homocycliques, donneront une série de coniques sphériques toutes situées sur la surface. Quand le cône sera réel, il coupera toujours la sphère, mais il est facile de s'assurer qu'il y aura des valeurs de k pour lesquelles il sera imaginaire.

En effet supposons, pour plus de simplicité, m positif; pour k très-voisin de zéro, le cône est imaginaire et il ne devient réel que lorsque $m + 2 = \frac{1}{k^3}$. Il se réduit alors à l'axe des x, et l'intersection de la sphère avec cet axe donne les points de la surface les plus rapprochés du centre.

Quand on fait croître k positivement, le rayon de la sphère croît, le cône se développe. Pour $\frac{1}{k^3} = m - 1$, il se réduit à deux plans passant par l'axe des y et coupant la surface suivant deux cercles

$$3x^2 - mz^2 = 0.$$

Ainsi on peut placer deux cercles sur la surface.

Si k augmente indéfiniment, le rayon de la sphère croît sans limite et l'équation du cône tend vers la suivante

$$(2+m)x^2 + (m-1)y^2 - z^2 = 0,$$

qui représente par conséquent le cône asymptote de la surface A.

Si entre les équations (2) on élimine k, on aura l'équation en coordonnées rectilignes

$$(x^2+y^2+z^2)[(2+m)x^2+(m-1)y^2-z^2]^2 = a^6.$$

L'équation du plan tangent au point x', y', z' est

$$2k^3\left[(2+m)xx' + (m-1)yy' - zz' - \frac{a^2}{k}\right] + xx' + yy' + zz' - a^2k^2 = 0.$$

On voit qu'il passe par l'intersection des plans tangents aux deux surfaces du second degré.

M. le Rédacteur indique dans l'énoncé un point singulier où il y aurait un cône de tangentes; il est clair que pour ce point l'équation du plan tangent devrait être identiquement vérifiée. Or le terme indépendant

$$3a^2k^2$$

ne pourrait être nul que si l'on avait

$$k = 0, \quad \text{d'où} \quad x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0,$$

ce qui est absurde. Il semble donc qu'il n'y a pas de point singulier.

Autre méthode de discussion.

Supposons, pour plus de simplicité, que la constante a soit égale à l'unité, ce qui ne changera pas la forme de la surface; alors si dans l'équation

$$\rho^3 (3 \sin^2\theta \cos^2\psi + m \sin^2\theta - 1) = 1$$

on change ρ^3 en r^2 ou ρ en $r^{\frac{2}{3}}$, on obtiendra une équation du second degré entre les coordonnées r, θ, φ :

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{cases} r^2 (3 \sin^2\theta \cos^2\psi + m \sin^2\theta - 1) = 1, \\ (m + 2) x^2 + (m - 1) y^2 - z^2 = 1. \end{cases}$$

Ainsi la surface jouit de cette propriété que ses rayons sont égaux à ceux de la surface B du second degré élevés à la puissance $\frac{2}{3}$.

Dans le cas où la surface B est un ellipsoïde, tous les rayons de la surface sont finis, elle a à peu près la forme de l'ellipsoïde et elle le coupe suivant la courbe obtenue en faisant $\rho = 1$.

Pour $m = -2$, la surface du second degré est un cylindre imaginaire, et la surface présente la propriété d'être asymptote à l'axe des x.

A cet effet, remarquons que lorsque l'équation du second degré donnera pour r^2 des valeurs négatives, comme dans le cas des hyperboloïdes, il n'y aura pas alors de point réel de la surface du second degré correspondant à ces valeurs, au lieu que le rayon $\rho = \sqrt[3]{r^2}$, devenu négatif, donnera encore des points de la surface à discuter A. Dans ce cas, on considérera, en même temps que l'hyperboloïde B, l'hyperboloïde conjugué, et on portera les rayons de la surface A en sens contraire de ceux de cet hyperboloïde conjugué. Ces remarques vont nous donner une idée nette de la surface et nous permettre d'en compléter la discussion.

Pour $m > -2$, on obtient un hyperboloïde A auquel il faut joindre le conjugué.

Pour $m = 1$, la surface A devient asymptote aux deux plans

$$3x^2 - z^2 = 0$$

et se déduit du cylindre hyperbolique

$$3x^2 - z^2 = 1.$$

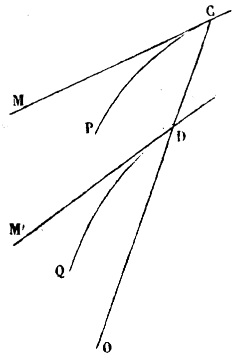
La discussion des sections planes passant par le centre achèvera de faire connaître la forme de la surface. En effet, tout plan passant par le centre donnera dans la surface du second degré une conique, et si l'on porte sur tous les rayons de cette conique des longueurs égales à leurs puissances $\frac{2}{3}$, on aura la courbe d'intersection avec la surface discutée.

Si le plan sécant donne dans la surface du second degré une section hyperbolique, on aura dans la surface A une section à deux branches infinies ayant mêmes asymptotes que l'hyperbole.

Si le plan sécant donne une section parabolique, on aura dans la surface A une courbe à une seule branche infinie.

Enfin les plans des sections elliptiques donneront des courbes fermées, et en particulier si l'on prend les plans des sections circulaires, on aura encore des cercles dans la surface A.

Soit MCO un plan passant par le centre, soient CP la section de la surface du second degré et DQ la section de la surface A, soit μ la tangente de l'angle que fait la tan-



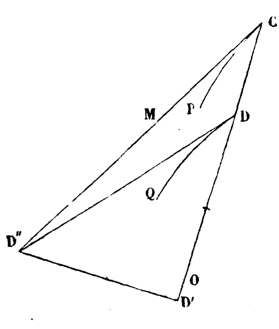
gente CM avec OC, soit μ' l'angle correspondant M′DO. On aura

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r}{r'}, \quad \operatorname{tang}\mu' = \frac{\rho}{\rho'},$$

et, d'après la relation $r = \rho^{\frac{2}{3}}$,

$$\operatorname{tang}\mu' = \frac{3}{2}\operatorname{tang}\mu.$$

Il sera donc facile de construire la tangente à la courbe



DQ au point D. Il suffira de prendre DD′ = 2CD et d'élever en D′ jusqu'à la rencontre de la tangente CMD″ une perpendiculaire; en joignant DD″, on aura la tangente en D.

En construisant deux tangentes, on aura ainsi le plan tangent par une simple construction géométrique.

Enfin imaginons que l'on considère trois directions conjuguées de la surface du second degré ou du cône asymptote. On sait que la somme des carrés des diamètres conjugués reste constante. De même on sait que la somme des carrés des inverses de trois diamètres rectangulaires est constante. On en déduit relativement à la surface discutée les théorèmes suivants :

Si l'on mène trois directions conjuguées dans le cône asymptote de la surface, la somme des cubes des rayons de la surface correspondant à ces directions sera constante.

Si l'on mène trois directions rectangulaires, la somme des inverses des cubes des rayons correspondant à ces directions est constante.

QUESTION 601

(voir p. 399).

Par M. CATALAN.

La seconde partie du théorème énoncé p. ~~399~~ 400 est fausse. Par exemple :

$$\frac{34.35.36.37.38}{2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6} = 17.7.37.19,$$

bien que 6 et 32 soient divisibles par 2.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XX.)

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie; Arithmétique.

Calcul infinitésimal; Dérivées; Séries.

Pages.

Géométrie segmentaire.

Géométrie descriptive et projective.

Courbes planes et sphériques.

Géométrie de l'espace; Lignes et Surfaces.

Surfaces du second degré.

Calcul des probabilités.

Questions résolues.

Questions proposées.

Physique mathématique.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des Collaborateurs sont précédés d'un astérisque.)

(*) A opté pour l'École Normale

ERRATA.

TOME XIX.

Page 197, ligne 10 en remontant, *au lieu de* Saint-Louis, *lisez* Lyon.
267, lignes 4 et 5 en remontant, *au lieu de* normale, *lisez* tangente.
430, ligne 11, *au lieu de* Collat, *lisez* Collot.
430, ligne 2 en remontant, *au lieu de* Baillement, *lisez* Baillemont.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les vingt premiers volumes (*).

Nos.		Pages.
	TOME II.	
61		48
	TOME IV.	
93		259
	TOME V.	
120		202
	TOME VII.	
192		368
193		368
	TOME VIII.	
199		44
	TOME X.	
240		357
245		358
	TOME XI.	
251	(échecs) (FAURE.)	115
252	(domino) (RÉDACT.)	115
266		401
	TOME XII.	
270		90
	TOME XIV.	
307		262
313		305
	TOME XV.	
317		52
324		229
325		229
333		243
342		353
	TOME XVI.	
379		180
383		182

Nos.		Pages.
	TOME XVI. [Suite.]	
385		183
398		390
399		391
400		391
403		401
411		404
	TOME XVIII.	
473		172
474		172
475		172
480		172
	TOME XIX.	
499		46
515		94
516		94
521		94
526		233
527		233
528		247
529		247
531		247
532		248
533		248
536		306
537		307
538		307
539		308
540		361
451		361
543		361
545 à 553		404
555 à 557		464

(*) Nous devons plusieurs corrections à l'obligeance de M. le professeur Bellavitis.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

BIBLIOGRAPHIE.

LES TROIS LIVRES DE PORISMES D'EUCLIDE, rétablis pour la première fois, d'après la Notice et les Lemmes de Pappus, etc., par *M. Chasles,* membre de l'Institut. Paris, in-8° de 324 pages, 1860; chez Mallet-Bachelier, imprimeur-libraire (*).

L'ouvrage débute par une Introduction de près de 100 pages, où l'auteur expose, avec sa méthode et sa clarté habituelles, l'état de la question, ses difficultés, les textes anciens qui ont servi de guide pour arriver à une solution, les travaux des géomètres qui ont cherché à la découvrir, enfin les bases mêmes du système dont l'ouvrage n'est qu'un savant et très-intéressant développement.

Une analyse rapide de cette Introduction est donc le moyen le plus sûr de faire connaître aux lecteurs de ce

(*) Les figures sont dans le texte; l'impression, la gravure, le choix du papier, tout dans cette publication mérite des éloges et fait honneur à l'Éditeur.

journal l'objet, le caractère et l'utilité de la nouvelle production de M. Chasles.

Le *Traité des Porismes* d'Euclide, perdu avec tant d'autres livres précieux de l'antiquité, ne nous est connu que par une Notice insérée par Pappus dans le VII[e] livre de ses *Collections mathématiques,* et par une très-courte mention de Proclus.

Les éloges que Pappus, qui était lui-même un géomètre éminent, fait de cet ouvrage d'Euclide et la haute importance qu'il y attachait, expliquent les efforts faits pour le rétablir par divers géomètres célèbres des deux derniers siècles, et notamment par Albert Girard, Fermat, Viète et Halley. Mais ces tentatives demeurèrent sans résultat, malgré le talent de leurs auteurs. Ce fut R. Simson qui le premier parvint à soulever un coin du voile épais qui couvrait ce mystère légué par l'antiquité aux géomètres modernes, à fixer ses idées sur la forme des Porismes, et même à rétablir quelques-unes de ces propositions dont Pappus n'a rapporté qu'un seul énoncé.

Malgré cette belle découverte de Simson, il restait beaucoup à faire. Il ne suffisait pas, en effet, de savoir en quoi consistait la doctrine des Porismes. Il fallait encore retrouver ce qu'étaient les propositions qui formaient les trois livres des Porismes et dont le nombre n'était, dit Pappus, pas moindre de 171 ; il fallait faire connaître quelle avait pu être la pensée qui avait dirigé le géomètre grec dans sa conception originale, prouver son utilité, hautement proclamée par Pappus, pour la résolution des Problèmes, et enfin indiquer les points de contact qu'elle pouvait avoir avec nos théories et nos méthodes modernes.

C'est ce que n'ont fait ni Simson ni ses successeurs ; et c'est précisément la tâche que M. Chasles a entreprise, qu'il était parvenu à remplir dès 1835, époque de la rédaction définitive de l'*Aperçu historique*, et au développement de laquelle son nouvel ouvrage est consacré.

La Notice de Pappus sur les Porismes est citée *in extenso*, pages 14 à 21. Ce texte en effet était essentiel à connaître, pour que le lecteur pût former un jugement sérieux sur l'ouvrage de M. Chasles. Car ce texte étant le seul point de départ qu'on possède sur la question, il est clair que toute opinion et tout travail de divination qui ne s'y adapteraient pas exactement et complétement, encourrait par cela même le soupçon de n'être qu'une fantaisie plus ou moins ingénieuse.

Après quelques réflexions générales et élogieuses sur le Traité d'Euclide, Pappus cherche à donner une idée de ce qu'étaient les Porismes, et, pour y mieux réussir par un rapprochement avec des choses déjà bien connues, il rappelle les définitions appliquées par les anciens au Théorème, au Problème et au Porisme. Il dit :

« Le Théorème est une proposition où l'on demande » de démontrer ce qui est proposé ;

» Le Problème est une proposition où l'on demande » de construire ce qui est proposé ;

» Le Porisme est une proposition où l'on demande » de trouver (d'acquérir, de se procurer) ce qui est pro- » posé. »

Mais il faut convenir que cette définition du Porisme, bonne sans doute pour ceux qui étaient déjà au courant de la question, était peu propre à y jeter quelque lumière après tant de siècles, et en effet elle est demeurée très-obscure pour tous les géomètres, jusqu'à ce que Simson en eût fait le sujet de ses méditations.

Pappus donne ensuite un seul énoncé complet de Porismes, et il se borne, pour les autres, à dire qu'ils se rattachaient tous à 29 genres distincts, dont il indique la répartition entre les trois livres de l'ouvrage.

Mais ici encore l'énigme n'était pas facile à deviner : afin que le lecteur puisse en juger, prenons au hasard l'énoncé caractéristique de l'un de ces genres; c'est le XIVe.

« Une droite, plus telle autre droite, a un rapport » donné avec tel segment compris entre un point donné » et tel point. »

M. Chasles s'occupe ensuite de l'ouvrage de Simson : *De Porismatibus*. L'auteur anglais définit le Porisme « Une proposition dans laquelle on demande de démon- » trer qu'une chose ou plusieurs sont données (c'est-à- » dire sont des conséquences de l'hypothèse) qui, ainsi » que l'une quelconque d'une infinité d'autres choses » non données, mais dont chacune est avec les choses » données dans une même relation, ont une certaine pro- » priété commune, décrite dans la proposition. »

Exemple : « Trois droites étant données, si de chaque » point de l'une on baisse des perpendiculaires sur les » deux autres, on pourra trouver une ligne et une raison » telles, que l'une des perpendiculaires plus la ligne » donnée sera à l'autre perpendiculaire dans la raison » donnée. »

Simson, dans son Traité, donne la démonstration de 39 Lemmes de Pappus, et propose une quarantaine de Porismes, mais qui se rattachent tous à 7 seulement des 29 genres décrits par Pappus.

Quelques réflexions sur une opinion de Playfair terminent l'historique et la discussion des travaux de ses devanciers, après quoi M. Chasles commence l'exposition de son propre système.

Prenant pour base cette assertion formelle de Pappus que « les Porismes ne sont, quant à la forme, ni des Théo- » rèmes, ni des Problèmes; qu'ils constituent un genre » intermédiaire; mais que, parmi beaucoup de géomè-

» tres, les uns les regardent comme des Théorèmes, et » d'autres comme des Problèmes », le savant auteur en conclut que les Porismes sont des propositions où l'on a tout à la fois à *démontrer* une vérité énoncée (comme dans les Théorèmes) et à *trouver* ainsi que dans les Problèmes) la qualité ou la manière d'être, comme la grandeur ou la position de certaines choses mentionnées dans l'énoncé de cette vérité; ce que fait bien comprendre, par exemple, le texte du Porisme cité plus haut et tiré de l'ouvrage de Simson, comme aussi celui qui est énoncé par Pappus.

Les Porismes prennent donc leur origine dans des Théorèmes déjà connus, mais dont on change la forme pour en faire des Porismes; de sorte qu'on peut dire que ce sont des conséquences immédiates de Théorèmes; qu'ils en sont une sorte de corollaires; et cela peut servir à expliquer pourquoi Euclide s'est servi, pour désigner ces propositions particulières, du terme même de *Porisme*, qui était déjà consacré par l'usage pour désigner les simples corollaires.

Ce qui distingue les Porismes des Théorèmes ordinaires, c'est qu'il y manque la détermination, en grandeur et en position, de certaines choses annoncées comme conséquence de l'hypothèse. Ce sont donc, en quelque sorte, des Théorèmes *non complets* (dans leur énoncé) exprimant certaines relations entre des choses variables suivant une loi connue; relations indiquées dans l'énoncé du Porisme, mais qu'il faut compléter par la détermination de certaines choses, qui seraient déterminées dans l'énoncé d'un Théorème proprement dit ou Théorème *complet*.

Et telle est la définition adoptée par M. Chasles.

Il peut sembler, au premier abord, que ce simple changement effectué dans la *forme* seule des Théorèmes n'est qu'une puérilité, et par conséquent on pourrait en inférer que la conception d'Euclide était tout autre.

Mais, avec un peu de réflexion, on remarque, au contraire, que cette forme de Théorèmes non complets, c'est-à-dire débarrassés de déterminations parfois compliquées et sans utilité, tend à devenir le caractère le plus général des propositions dans les mathématiques actuelles; qu'il y a, à cet égard, une analogie incontestable, qu'on était loin de soupçonner, entre les Porismes d'Euclide et la plupart de nos propositions modernes; que cette modification *dans la forme des énoncés* est, à elle seule, un progrès réel; car la science y trouve un degré de simplicité et d'abstraction qui facilite le raisonnement et la combinaison des vérités mathématiques entre elles; et qu'ainsi elle prouve chez Euclide, non point un caprice inutile, mais au contraire une rare sagacité et une profonde intelligence des besoins de la science.

Cet ouvrage, quoique perdu, n'est donc pas étranger à nos mathématiques; elles en ont reçu l'influence, quant à leur forme actuelle, et en réalité nous faisons journellement des Porismes sans le savoir.

Quant à l'utilité de ces propositions pour la résolution des Problèmes, elle est, après ce qu'on vient de dire, facile à comprendre. C'est que la recherche d'un lieu géométrique déterminé par certaines conditions exigeait le secours de quelque Porisme; car il fallait conclure de ces conditions une autre expression du lieu qui fût déjà connue, et qui par conséquent fît connaître la nature du lieu, sujet de la question. Or c'est le passage d'une expression de lieu à une autre expression qui exigeait un Porisme.

Cette marche est dans la nature des choses et subsiste dans les mathématiques modernes. Il en est ainsi notamment dans le procédé général de solution fondé sur l'analyse de Descartes, qui conduit à une équation finale entre les coordonnées x et y, d'où se conclut le lieu cherché. Car cette équation finale constitue un véritable Porisme.

Après cette discussion, qui est un modèle de logique, l'auteur analyse les 29 genres décrits par Pappus, et fait connaître de quelle manière il répartit, dans les trois livres, les nombreux Porismes qui s'y rapportent, en se conformant d'ailleurs rigoureusement à toutes les indications laissées par ce géomètre, et en ayant soin de n'omettre aucun de ces 29 genres.

La grande majorité de ces propositions sont relatives à la théorie connue aujourd'hui sous le nom de *théorie des divisions homographiques*, formées sur une droite ou sur deux par deux droites tournantes qui se coupent toujours, soit sur une droite donnée, soit sur un cercle. Traduites en langage algébrique moderne, ces relations sont des équations à deux, à trois, à quatre ou à cinq termes. M. Chasles a déjà fait connaître la plupart de ces équations dans les chapitres VII et VIII du *Traité de Géométrie supérieure*. Leur utilité, leur importance, leur signification, peut-être moins bien appréciées qu'elles n'auraient dû l'être, sont ainsi rendues bien évidentes.

D'après cela, il semble que le rétablissement de l'ouvrage perdu d'Euclide eût pu se borner à de simples énoncés de Porismes, puisque les démonstrations en étaient toutes faites d'avance dans le *Traité de Géométrie supérieure*. Mais l'auteur a craint avec raison que ces démonstrations faciles, fondées sur des théories modernes, ne donnassent lieu à quelques doutes sur la coïncidence de ses idées avec celles d'Euclide, et il s'est astreint au travail pénible de refaire, pour chacun des 220 Porismes contenus dans les trois livres, de nouvelles démonstrations directes et spéciales, ne reposant que sur des principes et des propositions que l'on pût regarder comme étant familières au géomètre grec, et notamment sur les 39 Lemmes laissés par Pappus pour faciliter l'intelligence du Traité d'Euclide.

L'ouvrage que M. Chasles présente au public, avec toute l'autorité de son nom, remplit donc exactement, tant pour le fond que pour la forme, le cadre tracé par Pappus, et les géomètres, en le lisant, croiront avoir sous les yeux Euclide lui-même et la suite de ses immortels *Eléments*.

C'est un service nouveau et important que M. Chasles a rendu à la science, et l'on doit lui en savoir d'autant plus de gré, que ce travail, roulant presque en entier sur la théorie déjà connue des divisions homographiques, semblait comporter dans ses détails moins de variété, d'agrément et d'invention que l'auteur n'a su lui en donner (*), et n'offrait peut-être pas à l'esprit fécond qui le composait, l'attrait qui s'attache plus particulièrement à la recherche des questions entièrement neuves, et qu'il avait pu lui offrir il y a vingt-cinq ans.

Je me permettrai de dire que cet ouvrage a encore, à mes yeux, un autre genre de mérite et d'utilité : c'est qu'il fait une diversion, au moins momentanée, aux publications presque exclusivement algébrico-géométriques de notre temps. L'analyse appliquée à la géométrie, surtout depuis qu'elle a simplifié et perfectionné quelques-uns de ses symboles, a pris des allures si vives, et en apparence si sûres; elle a parfois si bien réussi à présenter à sa manière, qu'elle dit être la meilleure, les résultats que souvent la géométrie pure avait d'abord découverts; elle fait, en un mot, des promesses si brillantes et si sédui-

(*) On trouve en effet, dans les trois livres, une foule de propriétés nouvelles et très-intéressantes, concernant le cercle ou les figures rectilignes.

santes, que bien des personnes seraient tentées de faire passer dans ses mains, disons de lui faire usurper, le sceptre de la géométrie. Cette tendance, qu'à bien des égards je regarde comme une illusion décevante, est peut-être, dans cette branche des mathématiques, un symptôme de cette fièvre d'activité, de ce besoin d'atteindre vite un but quelconque, qui est un des caractères dominants de notre époque.

Mais il est bon pourtant, dans l'intérêt même de la science, d'y apporter quelque tempérament. Car, en admettant même (chose que l'expérience de ces cinquante dernières années est bien loin de confirmer) que la palme de la célérité dans les investigations appartienne aux méthodes analytiques, la science ne saurait encore s'en accommoder d'une façon exclusive. Pour me servir d'une comparaison vulgaire, on acquiert assez promptement la connaissance générale d'une contrée en parcourant les grandes voies de communication ferrées qui la sillonnent; mais, pour en bien approfondir les détails, les productions, les ressources, il faut quitter la locomotive, et se résoudre à suivre à pied les anciennes routes et les chemins de traverse. Cela même donne des habitudes de patience, d'observation et de critique, qu'on risquerait de perdre, si l'on ne savait se résigner à ce mode primitif de pérégrination.

Quelques réflexions, insérées récemment dans les *Nouvelles Annales* (*), et qui touchaient à ce sujet, mettaient en opposition les équations *écrites* de l'analyse, et les équations *parlées* de la géométrie, ancienne ou moderne. Les conclusions qu'on en a tirées ne me semblent pas parfaitement ni de tous points exactes.

Il est vrai de dire que les équations *écrites* sont un

(*) Tome, XIX page 70. TM.

auxiliaire admirable, dont la parole dans son impuissance, ou la pensée dans sa faiblesse, ont souvent besoin pour se soutenir. Mais les équations *parlées* ont parfois sur elles l'avantage de la concision et de la clarté, et par suite se prêtent mieux et plus naturellement aux spéculations de l'esprit. C'est ainsi, pour tirer un exemple du sujet même de cet article, que les termes de *divisions homographiques* et de *divisions en involution* sont tout à la fois plus brefs, plus complets et d'un usage plus commode, que les périphrases ou que les symboles algébriques dont ils tiennent lieu.

C'est aussi, grâce à quelques équations *parlées*, que le grand géomètre, dont le monde savant déplore la perte récente, que l'illustre auteur de la théorie des *Couples*, a fait passer dans les éléments, complété et rectifié parfois les questions les plus élevées de la statique; qu'il a dissipé les nuages épais dont la question de la rotation des corps solides se trouvait enveloppée au milieu des formules qui l'avaient résolue; qu'il a su rendre presque élémentaire la théorie de la *précession des équinoxes* et de la *nutation de l'axe terrestre*, si délicate dans ses nuances que l'observation ne peut saisir; et qu'enfin il a dévoilé, dans certaines hautes questions de mécanique céleste, des omissions ou des erreurs, que les formules *écrites* les plus accréditées n'avaient pu y découvrir.

Ces exemples, et d'autres qu'on pourrait citer, en géométrie comme en mécanique, ne sont pas de nature à affaiblir l'estime que les bons esprits ont toujours accordée aux spéculations de pure géométrie, et la conclusion la plus sage qu'on en puisse tirer, c'est qu'il faut cultiver, avec le même soin et la même prédilection, les deux méthodes, et ne pas s'efforcer de faire refluer sur l'une, au détriment de l'autre, les tendances et les sympathies de la jeunesse studieuse.

M. Chasles, qui d'ailleurs a souvent prouvé, ainsi que d'autres géomètres ses contemporains, que la sûreté des recherches de géométrie pure s'allie parfaitement avec la célérité et la priorité des découvertes, a donc rendu à la science, en publiant son nouvel ouvrage, un service dont lui seront reconnaissants tous ceux qui la cultivent, et qui ne sera pas, aux yeux de la postérité, l'un de ses moindres titres de gloire.

Qu'il me soit aussi permis, en terminant, d'émettre le vœu qu'après avoir employé tant de précieux loisirs au rétablissement de l'œuvre d'un ancien, il puisse les consacrer désormais, à la rédaction définitive du grand ouvrage, dont tous les amis de la géométrie attendent la suite avec tant d'impatience.

Note du Rédacteur.

Nous ne nous abstiendrons pas de répéter ce qu'on oublie sans cesse. Dans les deux siècles *analytiques* écoulés depuis Descartes, la science de l'espace a fait des progrès plus considérables que dans les cinquante-six siècles *géométriques* qui ont précédé Descartes. Même aujourd'hui les *équations parlées* de la géométrie segmentaire sont fondées sur une analyse qu'on a quelquefois l'air d'escamoter. Si quelqu'un avait parlé à Euclide de tangentes au cercle menées par un point situé dans l'intérieur du cercle, avait raisonné sur des cercles imaginaires situés à l'infini, Euclide aurait conseillé à cet homme de prendre quelques grains d'ellébore. Aujourd'hui, grâce aux élucubrations des analystes sur les fonctions symétriques, sur les équations de la forme $(x-a)^2+(y-b)^2+c^2=0$ et surtout au vivifiant théorème de d'Alembert sur les imaginaires conjuguées, les géomètres peuvent employer légitimement, fructueusement ces locutions, sans craindre d'être envoyés aux Petites-Maisons (*). Le ballon s'approchant de plus en plus vers le zénith, peut volontiers s'imaginer qu'il tient cette force ascensionelle de lui-même, et toutefois sans le gaz qu'on lui a inculqué, il serait resté ventre à terre; *Sapienti sat*. Le principe des forces vives, de la moindre action, de la conservation du mouvement, du centre de gravité, etc., sont des *équations parlées* dont on a toujours fait usage, mais sans oublier les origines, et sans négliger de les écrire lorsque la clarté l'exige. Si dans le célèbre *code classique* de la géométrie segmentaire où les signes, les locutions et les équations algébriques surabondent, on avait franchement adopté les points-racines de Gauss, que M. Prouhet (**) a introduits en France, il est permis de croire que peut-être le volume aurait été tiercé, les résultats triplés, et que le tout aurait gagné en élégance et en qualités mnémoniques.

La composition des moments, des mouvements de rotation, le caractère hélicoïdal de tout mouvement de solide, les attractions sphéroïdales, etc., ont été *formulés* par les *analystes* et depuis admirablement *matérialisés*, pittoresquement présentés à l'œil extérieur, par les couples et les cônes de Poinsot : immense service rendu à la propagation de la science. Il y a là un talent infini, une imagination d'une extrême lucidité, mais non *création*; et c'est la *création* qui est le cachet du *génie* : tel est le théorème de d'Alembert et telle encore la transformation de ce théorème opérée par Gauss, qui y a découvert le travail économique de la nature dans les phénomènes dynamiques. A propos de Gauss, demandez aux géomètres *purs*

(*) On connaît les heureuses abréviations, les belles découvertes, qu'on doit à nos célèbres géomètres Poncelet et Chasles, qui les premiers ont introduit les êtres géométriques imaginaires situés à l'infini, et des lignes passant par des points imaginaires.

(**) *Nouvelles Annales*, t. I, p. 438; 1842.

de diviser la circonférence en $2^n + 1$ parties égales lorsque ce binôme est un nombre premier et n supérieur à 2. Ils vous répondront, comme naguère certain souverain : *Non possumus*. De même pour démontrer l'impossibilité de la duplication du cube. Allez trouver les analystes, vous obtiendrez une solution apodictique.

On ne saurait trop déplorer l'absence des couples dans l'enseignement secondaire : c'est une calamité pédagogique. Il est bien vrai qu'à l'aide des théorèmes *copulatifs*, il est facile d'exposer, sans avoir recours à des *formules*, la précession, la nutation, le pendule Foucault et beaucoup d'autres faits physiques; mais dès qu'il s'agit d'en venir *aux chiffres*, qui sont et seront toujours le but final des mathématiques, il faut des *formules*; la mécanique céleste, s'il est permis de s'exprimer ainsi, n'est qu'une sublime fabrique de formules.

Quand l'analyse semble reculer devant des obstacles que la geométrie surmonte, semble fournir péniblement des constructions sans élégance, il faut s'en prendre non à l'*analyse*, mais à l'*analyste*; c'est l'opinion d'Euler, qui a tracé un sillon si profond dans la géométrie des solides.

Du reste, nous voyons des esprits éminents donner la préférence soit à la géométrie, soit à l'analyse, selon leur degré d'habileté dans chacune de ces branches. Acceptons avec reconnaissance leurs travaux, sans nous inquiéter de l'origine. Dieu nous a révélé la *ligne* et le *nombre*. Employons-les avec discernement, et *augebitur scientia*.

Demande.

Quel est l'inventeur du théodolite? Est-ce Ramsden? Il a perfectionné le théodolite dont s'est servi le major-général Roy en 1784 pour rattacher géodésiquement l'Angleterre à la France (*Trans. philos.*, 1790).

Considérations sur l'état des sciences et des lettres aux diverses époques de leur culture, par Mademoiselle *Sophie Germain*. In-8 de 102 pages. Paris, 1833. (*Voir* t. VI, p. 9 du *Bulletin*.) (*)

Le but principal de cet écrit est de montrer que l'esprit humain emploie partout les mêmes procédés, dans les sciences exactes et philosophiques, dans les compositions littéraires et dans les beaux-arts. Les travaux de la raison et de l'imagination, ceux du géomètre et du poëte, sont soumis aux mêmes exigences, conséquences des types inhérents à l'esprit; ces exigences sont : *clarté, ordre, simplicité*, ce sont les conditions de la perfection, les mêmes dans les matières scientifiques et dans celles qui sont du ressort du goût. Le style doit avoir partout les mêmes qualités, et elle donne pour exemple la langue des calculs.

Langue des calculs (p. 23).

« La langue des calculs peut donner lieu à des corrections qui lui sont propres; car elle a aussi son style, » et tous les auteurs ne l'écrivent pas avec le même degré » de perfection. Au choix des mots correspond celui des » caractères. A la vérité, ceux-ci sont tellement conventionnels, qu'il faut, dans chaque occasion, exprimer » quelle valeur on leur attribue : cependant leur emploi » est astreint à certaines convenances, qui ne tiennent » pas uniquement aux habitudes consacrées. Les formules » remplacent la phrase; elles peuvent être plus ou moins » élégantes. L'analyse parle aux yeux. Ainsi, au lieu de » l'harmonie ou de l'accord entre les sons, elle doit présenter entre ses divers éléments des rapports d'ordre et » de simplicité. Les personnes initiées à ce genre de discours trouvent bien certainement dans la contempla-

(*) Complétement épuisé.

» tion des formules une sorte de charme, qui les entraîne
» vers l'étude. Et, si les bons auteurs sont doués d'une
» finesse de tact qui leur dit quelles, entre ces formules,
» il faut écrire, et quelles seulement indiquer, si leurs
» décisions sont tantôt spontanées, tantôt réfléchies, c'est
» que ce tact n'est autre chose que le goût, appliqué à des
» objets qu'on paraît avoir cru étrangers à son empire. »

Sur la dynamique sociale.

La philosophe géomètre établit une similitude ingénieuse entre les principes qui régissent la politique et ceux de la mécanique (p. 64); elle prend pour les trois éléments moteurs de la société, les *intérêts*, les *passions*, l'*inertie*, et applique à ces forces les lois de l'équilibre stable et instable, de la conservation des forces vives, de la moindre action, et traitant des forces perturbatrices, elle donne cette importante exégèse qui donne la clef d'une foule d'événements contemporains.

« Ajoutons que des individus doués de grandes forces
» par la nature étaient, durant le calme, placés dans des
» positions qui annulaient ces forces; tandis que, à la
» faveur du trouble, ils surgissent de tous côtés, armés
» d'une énergie jusqu'alors inconnue. De tels individus
» n'avaient pas prévu qu'ils sortiront un jour de la nul-
» lité à laquelle leur position sociale les avaient con-
» damnés : ils ne se sont livrés à aucune étude spéciale,
» avant de prendre place parmi les hommes qui influe-
» ront sur le sort de leurs semblables; et les partis vio-
» lents sont les seuls qu'ils puissent adopter, parce qu'ils
» y trouvent l'emploi de leurs forces, et sont dispensés de
» l'adresse, fruit des connaissances qui leur manquent. »

Après avoir montré historiquement la marche des progrès de l'esprit humain, elle croit que les sciences morales et politiques finiront pour appartenir aux sciences exactes. En effet, le sentiment du devoir, base de la morale, a une existence aussi certaine que le sentiment du vrai, base des sciences exactes, et la politique est encore de la morale, appliquée aux masses. Mais la théorie solidement établie n'entraîne pas pour conséquence la pratique.

Au résumé, les idées de l'illustre Française sont presque celles de Kant; comme lui, elle pose des limites infranchissables à l'intelligence. Nous ne saurions expliquer l'origine de l'être, fût-il infinitésimal, doué de *volonté*, l'origine du dernier animal infusoire. La philosophie, dite *positive*, parce qu'elle nie l'esprit, admet cette ignorance, mais y substitue un *dogmatisme* de la matière, comme si la matière était quelque chose de plus compréhensible que l'esprit, et toutefois le point de départ, l'origine de toute connaissance est dans l'âme. La communication des idées a lieu non entre des corps, mais entre des âmes, dès ce monde-ci ; la négation ici est impossible, amène à des non-sens. On peut définir cette prétendue philosophie, le mysticisme de la matière, triste doctrine, qui dépeuple le ciel et démoralise la terre.

Nous aimons à constater que Sophie Germain admet une intelligence suprême, le *mens agitat molem* d'Ovide.

On prétend que Laplace, interrogé sur l'absence de Dieu dans sa Mécanique céleste, a répondu qu'il n'avait pas besoin de cette hypothèse. Réponse très-juste. Dans les sciences, la seule manière digne de faire intervenir Dieu est de faire usage de l'intelligence dont il nous a doué ; le *Deus ex machina* est une preuve d'ignorance et presque une impiété. Plus l'intelligence humaine se montre grande, plus éclate glorieuse l'intelligence divine, selon la dévise de la célèbre Compagnie (*).

(*) Ceux qui veulent connaître succinctement la philosophie *positive* liront avec fruit l'ouvrage de M. de Blignières, capitaine d'artillerie, beau talent égaré dans un sahara ; noble caractère, défenseur d'excentricités qui sapent la morale sociale; réduit l'homme à l'état d'animal doué de la triste faculté de pouvoir se dépraver et de savoir qu'il est mortel.

La Division réduite a une Addition; ouvrage approuvé par l'Académie des Sciences de Paris, Institut de France, augmenté d'un Table de logarithmes de nombres à neuf décimales exactes en deux pages et d'une nouvelle méthode pour calculer avec une grande facilité les Tables de logarithmes, de division et autres; par R (amon) Picarte, membre de la Faculté des Sciences physiques et mathématiques de l'Université du Chili (Prix : 13 fr. broché et 15 fr. cartonné). Paris, chez Mallet-Bachelier, 1860; in-folio de XIV et 104 pages.

En 1852, le savant Barlow (Peter) (*), célèbre par ses travaux magnétiques sur la boussole marine, a publié à Londres :

Tables of squares, cubes, square roots, cube roots, reciprocals of all integer numbers, up to 10000. *Stereotype-edition, examined and corrected. Royal*-12.

La première édition est de 1814.

Une de ces Tables contient la réduction en fractions décimales avec *sept* figures décimales des fractions ayant pour numérateur l'*unité* et pour dénominateurs tous les nombres naturels depuis *un* jusqu'à *dix mille*; tandis que la Table de M. Picarte contient la même réduction avec *onze* figures en fractions qui ont pour *numérateurs* les nombres de 1 à 9, et pour dénominateurs les nombres de 1000 à 10000. Il est évident qu'une telle Table convient aussi aux nombres renfermés entre 1 et 1000; par exemple, $\frac{1}{3000}$ convient à $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{300}$.

Chaque page in-folio est divisée en 10 *colonnes* et 100

(*) Né à Norwich en 1776 (13 octobre); âgé aujourd'hui de 85 ans.

lignes; la première colonne à gauche contient 100 nombres consécutifs, à commencer toujours par un nombre de centaines. Par exemple, la page 40 contient les nombres depuis 3500 jusqu'à 3599; la ligne supérieure renferme 10 cases; la première à gauche, qui correspond au-dessus des cent nombres consécutifs, est vide : les neuf cases restantes portent successivement les nombres 1, 2, 3, ..., 9. Au-dessus de chacun de ces nombres, en descendant verticalement, on lit 100 nombres. La Table est donc à double entrée; par exemple, à la page 4, on lit dans la colonne 7 et vis-à-vis le nombre 3539 de la première colonne ce nombre 19779598757, cela équivaut à l'équation

$$\frac{7000}{3539} = 1,9775 98757 + \text{une fraction},$$

donc

$$\frac{7}{3539} = 0,00019775 98757;$$

$$\frac{70}{3539} = 0,0019775 98757; \quad \frac{700}{3539} = \text{etc.}$$

Supposons maintenant qu'on veuille réduire en décimales la fraction $\frac{724}{4772}$, on a

$$\frac{700}{4772} = 0,14668901928,$$

$$\frac{20}{4772} = 0,0041911114837,$$

$$\frac{4}{4772} = 0,0008382229637,$$

$$\frac{724}{4772} = 0,1517183570807.$$

Lorsque le diviseur a plus de quatre chiffres, l'auteur fait usage de cette identité $\frac{a}{b+n} = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{n}{b+n}\right)$.

Par exemple

$$\frac{724}{47723} = \frac{724}{47720+3} = \frac{724}{47723}\left(1 - \frac{3}{47723}\right),$$

or

$$\frac{724}{47720} = 0{,}0151718357;$$

$$\frac{3}{47723} \text{ ne diffère pas sensiblement de } \frac{3}{47720},$$

$$\frac{3.724}{47723} = \frac{3.724}{47720} \text{ à peu près } = 0{,}4551549.$$

On voit comment au moyen de cette Table on peut ramener une division à l'addition. En effet, tout nombre est un polynôme composé de termes qui sont des puissances de 10, chacune multipliée par un des nombres 0, 1, 2, 3,..., 9; pour opérer une division, il suffit donc d'opérer la division de chaque terme du dividende par le diviseur et de faire la somme des quotients. Or la Table donne ces quotients immédiatement : il faut prendre ces quotients avec un nombre de figures décimales tel, que la somme des restes ne surpasse pas une unité de l'ordre d'approximation qu'on veut obtenir.

Dans un Rapport approbatif fait à l'Académie le 14 février 1859, M. Bienaymé dit : « Il serait temps qu'on » imprimât des Tables de logarithmes à huit décimales » pour lesquelles l'interpolation par les parties proportionnelles pourrait s'exécuter aussi sûrement qu'avec » les sept décimales des Tables actuelles. Mais il n'est » possible d'employer des Tables à neuf et dix décimales » qu'en se servant des différences des deux premiers or-

» dres, ce qui conduit à une interpolation compliquée.
» Or une Table n'est vraiment commode que quand elle
» dispense le calculateur de la contention d'esprit qu'exige
» le calcul : et les meilleures Tables sont celles qui don-
» nent immédiatement le plus grand nombre de résultats
» tout préparés. Celle que M. Picarte a calculée satisfait
» dans son genre à cette condition. »

Le savant rapporteur termine par cette très-juste observation : « La fonction $\frac{1}{x}$, pour être très-simple, n'en est
» pas moins une de celles qui imposent le plus de tra-
» vail aux calculateurs. »

Un tel suffrage dispense de tout autre éloge.

M. Picarte a ajouté à cette Table de quotients, qui commence à la page 15 et finit à la page 164, une Table de logarithmes à neuf et dix décimales en deux pages, car, dit-il avec raison, l'utilité d'une telle Table se fait principalement sentir lorsqu'il s'agit de résoudre des équations de degré supérieur ; par exemple, les puissances telles que 1342^2, 635^3, 41^5 ne peuvent s'obtenir avec des Tables de logarithmes à 7 décimales.

La page 10 contient avec 10 décimales les logarithmes des nombres de 1 à 999.

La page 11 aussi avec 10 décimales contient les logarithmes des nombres de $100000 = 10^5$ jusqu'à 100999, avec une colonne des différences premières.

Pour trouver les logarithmes des autres nombres, l'auteur remarque que tout nombre divisé par ses trois premiers chiffres à gauche donne un quotient qui commence par 100 ; ce nombre est donc le produit de deux facteurs ; le logarithme du facteur à trois chiffres se trouve à la page 10, et du second facteur à la page 11 ; la somme donne le logarithme du nombre. Exemple :

$$\log 5276245 = \log 527 + \log 10011,64\ldots\ ;$$

à la page 10 on trouve le logarithme du premier facteur, et à la page 11 celui du second facteur, faisant usage de la différence première.

Les pages 6, 7, 8 contiennent les logarithmes des nombres 100100, 100999, 100998, 100997 ... 100000, avec trois séries de différences. A l'aide de cette Table et d'une méthode particulière d'interpolation, l'auteur calcule les logarithmes des nombres de 100000 à 101000 avec 15 et même avec 20 décimales, et avec 12 décimales les nombres de 1 à $200000 = 2.10^5$ et qui sont les mêmes que ceux des grandes Tables du Cadastre de France (*voir* Note sur les grandes Tables du Cadastre, par M. Lefort (*), ingénieur en chef des ponts et chaussées; IV[e] volume des *Annales de l'Observatoire impérial de Paris*, 1858).

Le gouvernement du Chili, patrie de l'auteur, a souscrit pour 300 exemplaires de son ouvrage comme encouragement aux études mathématiques.

Le Bureau des Longitudes élèverait un monument national, digne du glorieux règne actuel, en publiant des Tables de logarithmes avec *dix* figures décimales, format in-folio, très-commode pour les travaux de cabinet et diminuant le nombre de pages à tourner. Lorsqu'on a une *concaténation* de calculs à exécuter, de telles Tables deviennent désirables, et n'empêchent pas de prendre moins de dix décimales, si l'on peut s'en contenter. D'ailleurs *le superflu, chose si nécessaire*, maxime de Voltaire, est applicable partout.

(*) Né à Paris, 13 mars 1809.

DESARGUES (*).

Si l'on vous demande qui est le fondateur de la géométrie segmentaire, répondez Desargues.

Si l'on vous demande qui est le fondateur de la stéréotomie théorique, répondez Desargues.

Cette théorie était un but fondamental de la création de l'École Polytechnique; toutefois, j'ai quitté cette *alma mater* sans avoir jamais entendu prononcer le nom de Desargues; bien plus, je ne savais pas que Pascal fût un géomètre. La lecture des *propriétés projectives* de mon illustre compatriote m'a délivré de cette grossière ignorance; plus d'un demi-siècle s'est écoulé; cet état des choses est-il changé? Berthollet, Fourcroy, Guyton-Morveau nous entretenaient des grands chimistes, Bergmann, Scheele, etc., qui les ont précédés. J'ignore ce qu'il en est maintenant.

M. Poudra, auteur d'un ouvrage remarquable sur la perspective-relief, récemment publié, et d'une *Histoire de la Perspective* encore en portefeuille, acquiert de nouveaux droits à la reconnaissance des géomètres, et même de la France, en nous gratifiant des œuvres complètes de Desargues : monument élevé à une gloire nationale et qui mérite d'être encouragé par un gouvernement si essentiellement français.

Voici le contenu de l'ouvrage :

(*) Né à Lyon en 1593, mort en 1662, la même année que Pascal.

(Les astérisques indiquent les parties terminées, prêtes pour l'impression.)

1. Préface.
* 2. Notice biographique.
* 3. Notice scientifique, extraite des ouvrages du général Poncelet.
* 4. Notice scientifique, extraite des ouvrages de M. Chasles.
5. Recherches sur les divers écrits et travaux de Desargues.
6. Notice sur les écrits des auteurs qui ont critiqué Desargues.
* 7. Perspective de Desargues, 1636.
* 8. Brouillon-projet, etc. (sections coniques), 1639.
* 9. Brouillon-projet, etc. (coupe des pierres), 1640.
*10. Tracé des cadrans solaires, 1640.
*11. Manière de poser le style, 1640.
*12. Proposition fondamentale de la perspective, 1643.
*13. Sur le compas perspectif, 1643.
*14. Trois propositions géométriques, 1643.
*15. Reconnaissance signée Desargues mise en tête de la Coupe des Pierres de Bosse.
*16. Reconnaissance signée Desargues mise en tête de la Gnomonique de Bosse, 1643.
*17. Reconnaissance signée Desargues mise en tête de la Perspective de Bosse, 1647.
*18. Extrait d'une lettre de Desargues (P. Bourgouin).
*19. Annexe au brouillon-projet (sections coniques), 1639.
*20. Analyse, par M. Poudra, du Traité des Sections coniques.
21. Id., des trois propositions géométriques.
22. Id., de la Perspective.
23 Id., de la Gnomonique.
24. Id., de la Coupe des Pierres.

1° Une théorie générale de l'involution de six et quatre points; 2° la théorie des pôles et polaires dans le plan et dans l'espace; 3° les théorèmes sur le quadrilatère coupé par une transversale et sur le quadrilatère inscrit dans une conique, coupé de même par une transversale; 4° la génération des cônes et cylindres; 5° les diverses sections d'un cône par un plan ; 6° la détermination sur ces courbes, du centre, des diamètres, des axes, des foyers, des paramètres, etc., soit sur la courbe même, soit dans le cône; 6° diverses propositions sur un cercle et sur deux cercles ou coniques; 7° des considérations sur deux cônes tangents et les sections planes qui en résultent; 8° diverses propositions élémentaires d'Euclide; 9° des réflexions métaphysiques sur l'infini; 10° une autre génération des sections coniques.

Pour une telle entreprise, il fallait un éditeur extrêmement familiarisé avec les considérations segmentaires, doué d'une grande sagacité et d'une forte dose de patience; car presque tous les hommes de génie, *data venia*, ont un tic : celui de Desargues est de s'exprimer en termes figurés très-étranges, dans un style très-singulier. Aussi la lecture est pénible et ce n'est pas le moindre mérite de l'éditeur, d'avoir redressé tant de passages tortueux, d'avoir éclairé tant de coins obscurs.

L'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg appelle l'attention et le secours du gouvernement sur des ouvrages *sérieux* qui ne s'adressent pas à la foule; puisse notre Académie entrer dans la même voie déjà indiquée dans le célèbre Mémoire de Talleyrand.

OMISSION D'UN NOM.

A la page 10, on a omis le nom de M. de Jonquières, auteur de l'article *Porisme;* ce qu'on regrette d'autant moins, que le talent équivaut à une signature inimitable.

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie élémentaire des approximations numériques; par *J. Bourget*, professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Clermont.

Le livre élémentaire que nous signalons aux lecteurs des *Nouvelles Annales* est destiné spécialement aux aspirants au baccalauréat et aux candidats aux écoles. L'auteur aurait pu en recommander aussi la lecture aux physiciens, aux chimistes, et, en général, à tous ceux qui, s'occupant de sciences appliquées, ont à substituer dans des formules les nombres qui résultent de leurs expériences.

Nous croyons, en effet, que ce petit ouvrage répandra mieux que tout autre l'usage des méthodes abrégées dans les calculs numériques. Elles sont bien prescrites par les programmes, enseignées dans les cours, mais rarement appliquées par les élèves dans les compositions (*). Du reste, il faut convenir que peu de personnes savent obtenir un résultat avec une approximation donnée, en n'écrivant que les chiffres indispensables, ou bien trouver les chiffres sur lesquels on peut compter dans le résultat d'un calcul d'après l'incertitude qui règne sur les données.

Ainsi, l'on rencontre souvent dans les livres de physique des coefficients de dilatation avec sept chiffres significatifs, des capacités calorifiques, des densités et des

(*) On demandait à un élève pourquoi il n'avait pas appliqué les méthodes abrégées; il répondit : Je n'avais pas le temps. Tm.

indices de réfraction avec cinq et six décimales. En y regardant de près, on voit que l'approximation de ces résultats est exagérée, on dirait que les auteurs, en se servant pour calculer leurs expériences des Tables de Callet, ont cru suppléer au moyen des logarithmes à l'insuffisance des moyens d'observation.

Du reste, l'exemple partait de haut : l'on trouve dans le troisième volume de Laplace les perturbations planétaires calculées par Bouvard à moins d'un millionième de seconde centésimale près, tandis que l'on pouvait à peine compter sur les dixièmes de seconde par suite des termes négligés et de l'incertitude qui régnait sur les masses des planètes perturbatrices (*).

La lecture du livre de M. Bourget prémunira contre cet abus des décimales : dans le second paragraphe, l'auteur discute les limites des erreurs que l'on commet ordinairement dans la mesure des grandeurs, et montre que dans le commerce et l'industrie, lorsque l'on effectue directement cette mesure, qu'il s'agisse de longueurs ou de volumes, de poids ou de températures, on ne peut pas généralement compter sur plus de quatre chiffres. De là résulte immédiatement que dans les résultats des calculs effectués sur ces données appprochées on ne pourra pas compter, en général, sur plus de quatre chiffres exacts, et dès lors les calculs numériques ne seront jamais bien longs, soit qu'on les fasse directement, soit qu'on les effectue par logarithmes.

Si les calculs sont faits directement, on diminue le travail à l'aide des méthodes abrégées de multiplication et de division : l'auteur donne de ce procédé de division une démonstration simple, que les élèves pourront ap-

---

(*) L'insuffisance des figures décimales ajoutée à l'insuffisance des observations améliore-t-elle les résultats? Tm.

prendre et retenir avec facilité; des exemples bien choisis suivent les règles pratiques, et le tableau des calculs à effectuer, donné *in extenso*, montre clairement la marche à suivre pour arriver au résultat en calculant avec sobriété, nous voulons dire en écrivant le moins de chiffres possible.

M. Bourget aborde ensuite les erreurs relatives, mais il les aborde à regret, il les croit inutiles dans la pratique et ne donne définition et théorèmes que pour se conformer au programme : ici nous avons peine à nous rendre à l'opinion de l'auteur et nous croyons que la considération des erreurs relatives permet d'établir facilement et sans incertitude le nombre des chiffres exacts d'un résultat lorsqu'on a calculé approximativement le chiffre des plus hautes unités. Le procédé, fondé sur la multiplication et la division abrégée qu'emploie M. Bourget, donne comme douteux des chiffres exacts ; par exemple, dans le calcul de l'expression

$$x = \frac{5,297 \times 3,128}{7,403}$$

où tous les nombres sont regardés comme approchés à moins d'une unité près du dernier ordre, x a trois chiffres exacts et le quatrième est douteux, car la somme des erreurs relatives est à peu près $\frac{1}{1500}$ et le premier chiffre du résultat est 2 : M. Bourget ne donne comme exacts que les deux premiers chiffres et barre le troisième; ne vaudrait-il pas mieux, puisqu'un peu plus de précision s'obtient si facilement, se servir des erreurs relatives pour calculer rapidement l'incertitude du résultat, et diriger ensuite le calcul de manière à obtenir tous les chiffres sur lesquels on peut compter, et ceux-là seulement ?

Les applications nombreuses qui terminent cet ouvrage éminemment pratique sont habilement choisies; les énoncés sont empruntés à la physique, à la mécanique, aussi bien qu'aux diverses branches des mathématiques pures, et les aspirants au baccalauréat ès sciences y trouveront développées les solutions de questions analogues à celles que proposent ordinairement les Facultés. L'auteur, dans quelques-unes de ces solutions, fait cette remarque, déjà signalée plus haut, que les physiciens donnent comme exactes bien des décimales incertaines.

M. Bourget a consacré aussi quelques pages à l'approximation obtenue au moyen des logarithmes; il commence par établir, en considérant les différences tabulaires, qu'une Table à cinq décimales, comme celle de M. Hoüel (*), est plus que suffisante pour les calculs ordinaires, que presque toujours dans les logarithmes à sept figures il y en a trois complétement douteuses par suite de l'incertitude du nombre auquel correspond le logarithme : une petite table à trois ou quatre décimales, logarithmique et anti-logarithmique, collée sur les deux faces d'un carton serait d'une grande utilité; suspendue dans tous les laboratoires de physique et de chimie, elle remplacerait avec avantage le gros volume de Callet.

Cette superfluité des grandes Tables est une vérité qu'on ne peut contester, mais elle est encore peu connue et l'auteur a eu raison, pour la présenter sous une forme plus saisissante, d'en faire l'objet d'un théorème.

Lorsqu'on effectue par logarithmes un calcul sur des données inexactes, on peut juger de l'approximation du résultat à l'aide d'une méthode uniforme et assez simple

---

(*) Ces sortes de Tables, à raison de leur bas prix et de leur format portatif, sont utiles aux arpenteurs, aux voyageurs, en général, pour trouver *grosso modo* des résultats *isolés*. Tm.

pour figurer dans un traité élémentaire d'approximations : cette marche consiste à mettre en regard des divers logarithmes l'erreur maximum ou *l'incertitude* qui peut affecter leurs dernières décimales. La somme de ces erreurs donnera l'erreur maximum de la somme ou de la différence de ces logarithmes, c'est-à-dire du logarithme du produit ou du quotient qu'il s'agit de calculer ; dans l'extraction des racines carrées, cubiques, etc..., l'erreur maximum du logarithme de la racine sera la moitié, le tiers, etc..., de celle du logarithme de la puissance ; de l'incertitude du logarithme final on conclut l'incertitude du nombre correspondant, c'est-à-dire du résultat cherché.

Soit, par exemple, à calculer le volume engendré par un secteur circulaire AOB tournant autour de AO, sachant que l'angle AOB est de $35^\circ\,24'$ à une minute près et que le rayon AO est de $7^m,34$ à un centimètre près ; le volume sera donné par la formule

$$V = \frac{4}{3}\,\pi . \overline{7,34}^3 . \sin^2 17^\circ 42'$$

et l'on disposera le calcul de la manière suivante :

	Logarithmes.	Incertitude.
$R = 7,34$....	0,86570	59
$\sin 17^\circ 42'$......	$\bar{1},48292$	40
$\frac{4}{3}\pi$...........	0,62209	1
R^3...........	2,59710	177
$\sin^2 17^\circ 42'$.....	$\bar{2},96584$	80
V............	2,18503	258

Comme la différence tabulaire est 29 dans la partie des Tables où l'on cherche le nombre correspondant à ce logarithme, le volume cherché sera $153^{m},1$ avec 9 unités d'incertitude sur le dernier chiffre ; ce qui revient à dire que le volume est compris entre 152,2 et 154,0.

On voit par ce qui précède que M. Bourget a bien raison d'appeler l'attention des calculateurs et des élèves sur les méthodes abrégées, puisqu'elles permettent de calculer rapidement les résultats demandés avec toute l'approximation que comportent les données. Nous nous associerons pleinement aussi à ses regrets lorsqu'il déplore les préjugés que rencontre encore l'usage si avantageux de la règle à calcul ; et en terminant nous dirons avec l'auteur : « que » faire usage des Tables de logarithmes à plus de cinq » décimales, c'est, presque toujours, perdre un temps » précieux, et s'exposer sans profit aux erreurs faciles des » longs calculs ; bien plus, c'est vouloir prendre volontai- » rement une idée fausse du résultat final. »

E. Burat.
Professeur au lycée de Bordeaux.

Note du Rédacteur. Dans le commerce, dans les laboratoires, etc., et dans une foule d'occasions, le meilleur emploi à faire des logarithmes est de s'en passer et de s'en tenir à l'arithmétique *bourgeoise,* surtout quand on a une Table de Pythagore suffisamment étendue à sa disposition. J'ai eu à faire dans ma vie beaucoup de calculs pour l'artillerie, où l'on prend très-souvent le *millimètre* pour unité, et avec la Table de Crelle, qui donne les produits de trois chiffres par trois chiffres, on peut très-bien ne pas recourir aux logarithmes. Dans les usines à calculs, telles que les observatoires, les bureaux de statistiques, d'assurances, on ne connaît pas de méthodes abrégées *officielles,* chacun abrége selon les circonstances. Bien entendu le tout pour des calculs *isolés ;* mais dès qu'il s'agit d'une *concaténation* de calculs, les logarithmes sont indispensables, et assez souvent sept figures décimales sont insuffisantes, il en faudrait au moins dix, comme dans Vlacq; surtout quand on évalue les angles par des sinus et cosinus; sept chiffres suffisent pour les tangentes. Des Tables avec 10 décimales sont très-désirables et aussi les logarithmes des nombres premiers avec 48 décimales, tels que les a donnés Wolframm et plus étendus (*). D'ailleurs, ayant 10 décimales, rien ne s'oppose à ce qu'on n'en prenne que 7 et même 5, si l'on peut s'en contenter. Ayons toujours devant nous cette maxime de Voltaire :

Le superflu, chose si nécessaire,

la tendance régnante est d'accoutumer les élèves à se contenter du *nécessaire,* tendance *débilitante*.

Physique du globe. — Détermination de la loi du mouvement d'un point matériel sur un plan incliné à une latitude quelconque, en ayant égard à l'influence exercée par la rotation diurne de la terre; par M. *de Colnet d'Huart,* docteur ès sciences, professeur à l'Athénée de Luxembourg. — Luxembourg, 1860; in-8° de 13 pages, 1 planche.

Tous les corps participant au mouvement de la terre, c'était une croyance vulgaire qu'on pouvait faire abstraction de ce mouvement, d'après le principe des mouvements relatifs. La célèbre expérience pendulaire de M. Foucault a changé les idées. Aujourd'hui il est généralement connu que les graves ne tombent pas en ligne droite (Newton); que le fil à plomb n'est pas droit (Puiseux); que l'extrémité du pendule ne décrit pas une

(*) Wolframm donne les nombres consécutifs de 1 à 2353 et les nombres premiers de 2357 à 10009 (Tables de Vega).

droite sur le plan horizontal (Villanni et Foucault), et M. de Colnet démontre que les graves ne décrivent pas la droite de plus grande pente sur un plan incliné.

A cet effet, l'auteur suppose qu'un cône *droit* soit fixement attaché à un point de la terre de latitude donnée. L'axe du cône est dirigé vers le zénith. Une molécule pesante est placée dans l'intérieur du cône. Il s'agit de trouver les équations du mouvement de cette molécule dans l'espace. La molécule subit l'action de trois forces : 1° la pesanteur ; 2° la force centrifuge ; 3° la résistance de la surface : les deux dernières sont variables.

Les données du problème sont : 1° l'angle du cône ; 2° la latitude ; 3° le rayon terrestre ; 4° la vitesse angulaire diurne d'un point à l'unité de distance du centre de la terre. Les variables du problème sont : 1° la distance de la molécule au sommet du cône ; 2° l'angle du méridien du cône, passant par la molécule, avec le méridien fixe terrestre ; 3° le temps ; 4° la vitesse du mobile.

Il y a deux systèmes d'axes rectangulaires ; le premier est fixe ; l'axe des z est celui de la terre, et les axes des x et y dans l'équateur ; le second système est pour le cône, dont l'axe est celui des z ; les axes de x et y sont parallèles à ceux de la terre ; ce second système est mobile.

L'auteur pose, d'après les principes de dynamique, les équations aux différentielles secondes du mouvement ; élimine la force de résistance, trouve les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; néglige ensuite dans les équations $\frac{r^2}{R^2}$, r rayon conique, et R rayon terrestre ; de même, le carré de la vitesse diurne ; ces diverses simplifications permettent d'évaluer la force F qui agit sur la molécule, tangentiellement au cône et perpendiculairement à l'arête.

Cette force F, but essentiel du problème, renferme deux termes, dont l'un renferme la vitesse du mobile, et l'autre en est indépendant. Ce second terme existe donc seul et encore lorsque le mobile est en repos sur la sphère et tend à la déformer ; ce qui n'a plus lieu lorsque la terre a pris sa forme ellipsoïdique, assertion que l'auteur promet de démontrer.

Supposons maintenant un spectateur placé le long de cette arête, la face tournée vers l'axe; alors selon le signe de F, il verra le point se diriger vers sa droite ou vers sa gauche; et il existe une arête où F est nulle; alors la molécule se dirige sur l'arête sans déviation.

La position de cette arête singulière dépend de l'angle du cône; faisant varier, l'auteur prouve que le lieu de ces arêtes singulières est un cône droit qu'il nomme *cône de séparation*, parce qu'elles séparent les déviations dextres des déviations senestres. L'auteur indique la construction géométrique de ce cône, qui jette un grand jour sur tous ces phénomènes.

Lorsque l'angle du cône est nul, on obtient les déviations des corps tombants ; et lorsque cet angle est droit, on a les déviations des corps se mouvant sur un plan horizontal : c'est le cas du pendule Foucault ; l'extrémité se meut dans un plan sensiblement horizontal.

Le Mémoire est terminé par ces deux équations finales, qu'on obtient par l'intégration des équations du mouvement :

$$(1) \qquad p = \alpha + \omega \left[b - \alpha t + \frac{b^2}{b - \alpha t} - 2b \right] \cos q :$$

$p =$ angle de déviation au bout du temps t, angle du méridien du cône avec celui de la terre ;

$\alpha =$ valeur de p quand $t = 0$;

$b =$ largeur de l'arête du cône ;

$q =$ latitude ; cos q toujours positif dans l'hémisphère boréal.

$$(2) \quad \frac{dp}{dt} = \left[\frac{b^2}{(b - \alpha t)^2}\right] \frac{a\omega (\sin n \cos q + \cos n \sin q \cos p)}{\sin n}:$$

a = vitesse du mobile qu'on suppose devenue constante en conséquence du frottement;

n = angle du cône; inclinaison de l'arête sur le cône;

$\frac{dp}{dt}$ est la force accélératrice de déviation.

C'est au résumé une bonne étude où l'auteur déploie une grande habileté de calcul.

Peut-être, en dirigeant l'axe des x, comme d'ordinaire, vers les points équinoxiaux, on aurait eu quelque clarté de plus.

M. Lafon, professeur de mécanique à la Faculté de Nancy, vient de publier : *Mémoire sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, in-8 de 36 pages. Ce très-savant écrit, fondé sur les équations de Hamilton et sur l'intégration *complète* d'un système d'équations différentielles au moyen d'un certain nombre d'intégrales particulières, n'est pas susceptible d'une analyse élémentaire. Le chapitre II (p. 16) éclaircit les abstractions très-générales du chapitre I; dans le chapitre III (p. 27) et dernier, on tient compte de la rotation de la terre. C'est, avec l'excellent Mémoire de M. Quet sur les mouvements relatifs, la solution la plus rigoureuse de l'influence de cette rotation, et qui s'exerce même sur la direction des lames dans les marées (*).

Voir aussi le Mémoire de M. Poncelet (*Comptes rendus*, t. LI, septembre et octobre).

M. Villarceau a lu en mars dernier un travail sur le même sujet à la Société Philomathique.

(*) Streffleur (V. von), *Die erscheinungen der ebbe und fluth unter dem einflusse der rotation.* — Phénomènes du flux et reflux sous l'influence de la rotation. Vienne, 1847.

SUR L'ORIGINE DU MOT THÉODOLITE.

Dans la collection anglaise : *The London, Edinburg and Dublin Philosophical Magazine*, vol. XXVIII, janvier-juin 1846, n° XLVI, p. 287-288, l'érudit M. August de Morgan (*) donne en deux pages ses conjectures sur la dérivation du mot *théodolite*. Il le rencontre déjà dans un ouvrage anglais publié à Londres en 1571 et réimprimé en 1591 : c'est *Geometrical practise named Pantometria;* ouvrage commencé par Leonard Digges (militaire, mort en 1573) et terminé par son fils Thomas Digges (militaire, mort en 1595). Le chapitre 27 roule sur *The composition of the Instrument called Theodelitus;* ce n'est autre chose qu'un cercle gradué sur lequel tourne une règle munie de pinnules. Diverses locutions, telles que *circle called Theodelitus* ou *planisphere called Theodelitus,* font voir que le mot théodélite est employé ici comme *adjectif* et non comme *substantif*: *cercle théodélité.* Le cercle est placé *horizontalement;* placé verticalement, cela aurait été l'*astrolabe* de ce temps et pas autre chose. Leybourn, dans son *Compleat Survoyer* (1657), l'Arpenteur accompli, nous apprend qu'on ajoutait *quelquefois* à cet instrument un *cercle de hauteur*, *altitude circle;* et Stone, dans son Dictionnaire mathématique (1726), dit que l'instrument était *quelquefois* muni d'un télescope.

Une règle munie de pinnules et tournant sur un cercle gradué entrait dans la composition de plusieurs instruments d'astronomie importés de l'Orient, et une telle

(*) Né le 27 juin 1806, à Madura (Indostan méridional).

règle portant en arabe le nom de *alhidada*, ce mot fut aussi appliqué à ces instruments (*). Le mot *alhidade* et aussi *alidade* fut complétement naturalisé en France et fut aussi employé par les écrivains anglais au XVIe siècle, entre autres par Digges lui-même. Les mots *théodolite* et *alidade* diffèrent tellement au premier abord, que l'idée de faire dériver l'un de l'autre ne se présente pas naturellement. Cependant, c'est cette dérivation qu'adopte M. de Morgan, avec grande probabilité. Il trouve d'abord une formation intermédiaire dans l'ouvrage de M. William Bourn : *Treasure for travailers*, Trésor des travailleurs (1578); il ne se sert pas du mot théodolite, mais désigne l'instrument de Digges sous le nom de *horizontal* ou de *sphère plate*. Il commence par écrire *alydeday* au lieu d'alidade, et puis change cela et écrit constamment *athelida*. Comme le cercle *athelidé* de Bourn est le même instrument que le cercle théodélité de Digges, la dernière dénomination peut provenir par la corruption de la première, ce qui n'a rien de surprenant dans le moyen âge, où il n'existait rien de fixe ni pour l'orthographe ni pour la prononciation. La même voyelle avait divers sons, comme cela à encore lieu en anglais; et en français *ouvrir* vient de *operire*, o changé en *ou; alouette* de *alauda*, *au* changé en *ou; ierre* de *hedera*, *e* changé en *i;* l'article *le* s'est confondu avec le nom, d'où lierre et maintenant par redoublement *le lierre*, et une foule d'autres mots. M. Breton (de Champ), auquel j'ai communiqué ce travail, pense que l'article anglais *the* a été congloméré avec halidade, *the halidade* et d'où *théodolite*. Cette étymologie est certes mieux fondée que celle qu'on a tirée du grec, θέαομαι, et δολιχός, *voir de loin*, cela suppose le télescope; et M. de Morgan objecte avec

(*) *Al hidat*, instrument servant à se diriger; du verbe *hidi*, diriger.

raison que le mot théodélite a précédé de beaucoup l'invention du télescope.

L'instrument consiste principalement dans un cercle vertical, tournant autour d'un axe vertical et muni d'une règle à pinnules. Or le *cosmolabe* de Jacques Besson remplit parfaitement ce but. Cette ingénieuse composition par les mouvements de diverses pièces, *base*, *jambes*, *genou*, *cuisse*, *atlas*, permet de décrire des cercles perpendiculaires et parallèles à l'équateur, à l'horizon, à l'écliptique, et même des grands cercles passant par deux étoiles quelconques. L'instrument est décrit dans l'ouvrage suivant :

Le Cosmolabe ou instrument universel concernant toutes observations qui se peuvent faire par les sciences mathématiques, tant au ciel, en la terre, comme en la mer; de l'invention de M. Jaques (sic) *Besson* (*), *professeur desdites sciences en la ville d'Orléans*. A Paris, par Ph.-G. Deroville, rue Saint-Jaques (*sic*) près Saint-Benoest, à la Concorde, 1567, in-4° de 324 pages.

A l'aide de cet instrument, on peut résoudre pratiquement tous les problèmes d'astronomie et de géographie; l'exécution serait peut-être encore utile pour les pensionnats.

L'instrument de Héron d'Alexandrie (seconde moitié du IIe siècle avant notre ère), nommé *dioptre*, admettant un cercle divisé sur lequel se mouvait une alidade à pinnules, pouvait faire office de théodolite. C'est l'opinion de M. A.-J.-H. Vincent, Membre de l'Institut, exprimée p. 2 de sa préface aux *Extraits des manuscrits relatifs à la géométrie pratique des Grecs*, in-4°, imprimé en 1858, première édition correcte du texte avec une lumi-

---

(*) Professeur de mathématiques à Orléans, date de naissance et de mort inconnues.

neuse traduction, où nous puiserons quelques renseignements historiques intéressants.

On trouve l'ouvrage de Héron, texte et traduction latine, dans le *Veteres mathematici*, qui renferme aussi les instruments balistiques des Anciens, dont un auguste Mécène fera publier une traduction avec des planches grand format; les machines de jet sont construites dans un atelier organisé *ad hoc*.

CONSEILS AUX LECTEURS
ET
NOUVEAU THÉORÈME DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

1° Lorsque j'étudie des ouvrages *sérieux*, ceux de nos grands maîtres, par exemple les divers traités de M. Lamé, je dresse pour mon usage trois tables.

a. Table des notations particulières à l'auteur.

b. Table des formules et des équations *numérotées*.

c. Table des définitions et des termes particuliers à l'auteur.

Toujours avec le quantième de la page.

Outre la table des matières, les ouvrages imprimés devraient contenir ces trois tables, et même une table des noms d'auteurs cités.

Ces cinq tables faciliteraient l'étude, les recherches, économiseraient le temps.

2° Les noms propres ne se devinent pas toujours très-facilement. On ne saurait donc les écrire trop lisiblement. Il conviendrait, du moins pour la première fois, de les écrire en *lettres capitales* et d'écrire en toutes lettres les prénoms.

Ces propositions ne seront pas adoptées, et cela d'après un théorème oublié dans tous les traités du calcul de probabilités.

Nouveau théorème du calcul des probabilités.

La chance d'adoption d'une proposition est en raison inverse de la quantité de bon sens qu'elle renferme.

Voici quelques applications.

1° Les fractions continues sont indispensables pour trouver le rapport $\frac{22}{7}$, connu des charpentiers, aujourd'hui introuvable pour nos élèves; indispensables pour trouver l'intercalation grégorienne; indispensables même dans le commerce, pour réduire les deux termes d'une fraction à des termes moindres et suffisamment approchés.

Introduira-t-on ces fractions dans l'enseignement? — Non.

2° Les fonctions symétriques sont la pierre fondamentale de la théorie des équations; de la géométrie segmentaire, géométrie moderne.

Introduira-t-on ces fonctions dans l'enseignement? — Non.

3° La méthode projective de M. Poncelet, la méthode homographique de M. Chasles, permettent de découvrir de nombreuses propriétés dans les lignes et surfaces d'ordre supérieur avec la même facilité que dans le cercle et la sphère; facilitent et généralisent les démonstrations de la géométrie vulgaire.

Introduira-t-on ces méthodes dans l'enseignement? — Non.

4° La magnifique représentation des couples, admise aujourd'hui dans les cinq parties du monde, met à la portée des intelligences moyennes les principes les plus élevés de la Dynamique, les phénomènes les plus complexes du système du monde.

Introduira-t-on cette représentation, une des plus belles conceptions de l'esprit français, dans l'enseignement français? — Non.

5° Les coordonnées *trilitères* pour les lignes, *quadrilitères* pour les surfaces, inculquent aux formules les nombreuses propriétés des fonctions homogènes, leur donnent de l'élégance et des qualités mnémoniques, si précieuses dans les recherches mathématiques.

Introduira-t-on ces coordonnées dans l'enseignement? — Non.

6° La connaissance des principales étoiles de première grandeur, des plantes principales industrielles et alimentaires, de quelques principes d'hygiène, de quelques dispositions de nos codes, est aussi utile que d'apprendre par cœur des dates et des noms historiques que l'on oublie le lendemain des examens.

Introduira-t-on ces connaissances dans l'enseignement? — Non.

Tous ces *non* sont des conséquences immédiates de mon principe.

ÉPITAPHE DE DIOPHANTE

(voir t. XIX, p. 72).

Correction.

Au lieu de

. . . . le tout égalera
l'inconnue x

lisez

. . . . le tout égalera
la moitié d'x

(Communiqué par M. Henri Delorme, élève du lycée Louis-le-Grand.)

BIBLIOGRAPHIE.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK

(CRELLE, t. LVII, 3e cahier, 1860)

(voir t. VI, p. 17)

Géométrie.

E.-E. KUMMER (*). *Théorie générale des faisceaux rectilignes;* voir *Nouvelles Annales*, t. XIX, p, 362.

M. Abel Transon a présenté un Mémoire sur le même sujet à l'Académie des Sciences; voir *Comptes rendus;* 1860.

JOH.-NIK. BISCHOFF. *Degré d'une surface développable doublement circonscrite à une surface de degré* m.

1. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées *quadrilitères* des deux surfaces données par les équations *homogènes*

$$(1) \qquad \begin{cases} f = 0 \text{ de degré } m \\ \varphi = 0 \text{ de degré } n. \end{cases}$$

Si par tous les points de la courbe d'intersection on mène des plans tangents à la surface f, on obtient une surface développable donnée par l'élimination de x_1, x_2, x_3, x_4, entre les équations (1), l'équation du plan

(*) Ernst-Eduard Kummer, né à Saurau (Basse-Lusace) le 29 janvier 1810, professeur à l'université de Berlin.

tangent $\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3 + \xi_4 f_4 =$ et la suivante

$$o = \begin{vmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \varphi_3, & \varphi_4 \\ f_1, & f_2, & f_3, & f_4 \\ f_{13}, & f_{23}, & f_{33}, & f_{43} \\ f_{14}, & f_{24}, & f_{34}, & f_{44} \end{vmatrix};$$

les indices indiquent les quotients différentiels pris par rapport à la variable de même indice.

Soient

g, le degré (*gradus*) de cette surface;

c, la classe de cette surface;

d, le degré de la courbe plane tracée sur la surface développée et telle, que chaque plan tangent coupe la surface suivant une courbe qui a un *double point;*

r le degré de la courbe plane telle, que chaque plan tangent coupe la surface suivant une courbe qui a un point de *rebroussement.*

On a

$$g = mn(3m + n - 6);$$
$$c = mn(m - 1);$$
$$d = \frac{1}{2} m^2 n^2 (3m + n - 6)^2 - mn(5n + 11m - 26);$$
$$r = 3mn(2m + n - 5).$$

2. Le lieu des points de la surface f (degré m) tels, que chaque plan tangent coupe la surface f suivant une courbe D ayant au point double au point de contact, est d'ordre

$$d_1 = m(m - 2)(m^3 - m^2 + m - 12),$$

et lorsque la courbe d'intersection R a un point de rebroussement au point de contact, l'ordre est

$$r_1 = 4m(m - 2).$$

(Salmon, *Trans. of the Irisch. Acad.*, vol. XXIII,

p. 469. — Schlafli, *Quart. Journal of Mat.*, vol. I, p. 64.)

3. La surface développable R_1 circonscrite à la surface f, le long de la courbe R, est de l'ordre $28m(m-2)^2$. Cette surface s'abaisse si le long de la courbe R deux plans tangents *consécutifs* coïncident, c'est-à-dire si un plan tangent à f est aussi plan osculateur de R; alors le degré de R_1 se réduit à $2m(m-2)(3m-4)$, par conséquent le nombre des points de la courbe R où les plans tangents sont en même temps plans osculateurs de la courbe R, est

$$28m(m-2)^2 - 2m(m-2)(3m-4) = 2m(m-2)(11m-26).$$

4. La surface développable D_1 circonscrite le long de la courbe D est *doublement* circonscrite et son degré est

$$m(m-2)^2(m^3-m^2+m-9)(m^3-m^2+m-12);$$

ce degré est aussi susceptible d'abaissement d'une manière analogue à la courbe R.

Analyse.

E. Heine (*). *Sur les numérateurs et dénominateurs des valeurs approchées de fractions continues.*

Gauss a donné les développements des fonctions continues générales résultant du développement des quotients de deux séries *hypergeométriques*

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)}$$

(*) Heinrich-Eduard Heine, né à Berlin le 15 mars 1821, professeur à l'université de Berlin depuis 1856.

et en particulier du développement de la série unique $F(\mu, \alpha, \gamma)$.

(*Disquisitiones generales circa seriem infinitam, etc., Comment. recent. Soc. Gott*, t. II, 1811-13.)

Dans un écrit postérieur, Gauss appliquant ses formules à la série hypergéométrique $\log \frac{1+x}{1-x}$ développée en fraction continue, trouve que la loi des *dénominateurs* des valeurs approchées coïncide avec les fonctions *sphériques* et que chaque numérateur retranché du produit du dénominateur par la série $\log \frac{1+x}{1-x}$ donne un reste dont la partie essentielle est encore une série hypergéométrique.

(*Methodus nova integralium valores per approximationem inven. Comm. recent. Soc. Gott.*, t. III, 1814-15.)

M. C. Christoffel a trouvé la formation des *numérateurs* (*Crelle*, t. LV), enfin M. Heine a trouvé la loi de formation des numérateurs et dénominateurs des quotients généraux $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)}$ (*Crelle*, t. XXXIV).

Voici l'objet du présent Mémoire. Soient les n équations linéaires

$$\begin{aligned} f_0 &= \mu_1 f_1 + \nu_1 f_2, \\ f_1 &= \mu_2 f_2 + \nu_2 f_3, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n-1} &= \mu_n f_n + \nu_n f_{n+1}. \end{aligned}$$

On sait que $\frac{f_0}{f_1}$ se développe en fraction continue, et que l'on a en général

$$f_0 = A_n f_n + \nu_n B_n f_{n+1}.$$

Euler a déjà démontré que les A et les B sont les dénominateurs des fractions approchées de la fraction continue; de sorte qu'on a

(1) $$f_0 = Q_n f_n + \nu_n Q_{n-1} f_{n+1},$$

où Q_n est le dénominateur de la $n^{ième}$ fraction approchée $\frac{P_n}{Q_n}$; on a de même

(2) $$f_1 = P_n f_n + \nu_n P_{n-1} f_{n+1}$$

et

$$f_1 Q_n - f_0 P_n = (-1)^n \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n f_{n+1}.$$

L'auteur applique ces résultats aux quotients généraux de Gauss cités ci-dessus et comme cas particulier à la formule

$$F\left(k, 1, 1, \frac{x}{k}\right) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots = e^x.$$

Arithmologie.

Kronecker (*). *Sur le nombre des classes de forme quadratique à déterminants négatifs.*

Problème très-difficile, qui n'est pas encore résolu; mais l'auteur indique huit relations entre toutes les classes non équivalentes à déterminant négatif $-n$ et indiquées par le symbole G (n) et les mêmes classes où au moins un des coefficients extrêmes est négatif, classes indiquées par le symbole F (n); l'auteur est obligé d'introduire encore neuf autres symboles se rapportant à la nature du nombre n, relativement à ses diviseurs, à la somme de ces diviseurs, etc. On sait que l'abbé Joubert a traité le même sujet (*Nouvelles Annales,* t. XIX, p. 406; 1860).

(*) Kronecker (Leopold), né à Lieguitz le 7 décembre 1823, sans emploi à Berlin.

Analyse infinitésimale.

G. Bauer. *Sur les fonctions gamma et sur une espèce particulière de produits infinis.*

Ce produit infini est

$$\log \frac{(a+2)^{\frac{i}{2}}(a+4)^{\frac{i}{4}}(a+6)^{\frac{i}{6}}\cdots(a+2i)^{\frac{i}{2i}}}{(a+1)^{\frac{i}{1}}(a+3)^{\frac{i}{3}}\cdots(a+2i+1)^{\frac{i}{2i+1}}},$$

$\frac{i}{n}$ est le $n^{\text{ième}}$ coefficient binomial de la puissance $i^{\text{ième}}$ et i doit être pris depuis o jusqu'à ∞.

On a

$$\psi(a) = \frac{d \log \Gamma a}{da} = \int_0^\infty \left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^a} \right] \frac{dz}{z},$$

(Dirichlet)

$$\frac{d\psi a}{da} = \psi'(a) = \int_0^\infty \frac{\log(1+z)}{(1+z)^a} \frac{dz}{z}$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\log\left(1 - \frac{z}{1+z}\right)\frac{dz}{z}}{(1+z)^a}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{z^{i-1}}{(1+z)^{a+i}} dz = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} \frac{\Gamma i \Gamma a}{\Gamma(a+i)};$$

d'où

$$\psi' a = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{3} \frac{1\,2}{a(a+1)(a+2)} + \cdots$$

L'auteur décompose ces fractions par la méthode connue, et intégrant ensuite, il obtient

$$\psi(a) = \log \prod_{i=0}^{i=\infty} \left[\frac{a\,(a+2)^{\frac{i}{2}} \ldots}{(a+1)^{\frac{i}{1}}\,(a+3)^{\frac{i}{3}} \ldots} \right],$$

produit infini de ci-dessus.

L'auteur parvient à intégrer cette dernière équation et obtient

$$\Gamma(a) = \mathrm{C}e^{-a} \prod_{i=0}^{i=\infty} \left[\frac{a^a\,(a+2)^{\mathrm{T}_2}\,(a+4)^{\mathrm{T}_4} \ldots}{(a+1)^{\mathrm{T}_1}\,(a+3)^{\mathrm{T}_3} \ldots} \right],$$

où $\mathrm{T}_n = \left(\frac{i}{n}\right)(a+n)$, $\left(\frac{i}{n}\right)$ comme ci-dessus.

Il établit également cette belle relation

$$\log \Gamma(a) = \log \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \mathrm{E}_m}{m(m+1)} \frac{1}{a^m},$$

$$\mathrm{E}_m = \sum_{i=1}^{i=m+1} \frac{1}{i+1} \left[\left(\frac{i}{1}\right) 1^{m+1} - \left(\frac{i}{2}\right) 2^{m+1} + \frac{1}{3}\,\mathrm{B}^{m+1} - \ldots \right]$$

et on a cette identité

$$\mathrm{E}_m = (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}\,\mathrm{B}_m,$$

B_m étant le $m^{ième}$ nombre bernoullien de rang impair.

A. Cayley. *Démonstration d'un théorème de Jacobi par rapport au problème de Pfaff* (*) (en français).

Ce problème est contenu dans ce Mémoire, inséré dans

(*) Pfaff (Jean-Frédéric), né à Stuttgart le 22 décembre 1765, mort à Halle le 21 avril 1825.

les *Mémoires de l'Académie de Berlin* (1814-15) : *Methodus generalis æquationes differentiarum particularium, nec non æquationes differentiales vulgares utrasque primi ordinis, in ter quatuorque variabiles, complete integrandi.*

Soit l'équation du premier ordre

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + X_4 dx_4 = 0.$$

Pfaff démontre que si l'on a une équation intégrale particulière, on peut trouver l'intégrale générale au moyen de deux intégrations complètes de deux équations différentielles du premier ordre entre trois variables ou bien d'une équation différentielle du second ordre entre deux variables et d'une équation différentielle du premier ordre entre trois variables. Mais Jacobi *dit* que lorsqu'on a trouvé une équation intégrale, on peut éliminer x entre cette intégrale et l'équation donnée; il reste une équation différentielle de *trois variables qui satisfait à la condition d'intégrabilité.* C'est le théorème que Jacobi a probablement démontré dans un Mémoire sur la mécanique analytique qu'il annonce avoir composé et qui n'est pas encore publié. En attendant, M. Cayley donne cette démonstration :

Soit

$$a = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

x_4 devient une fonction de x_1, x_2, x_3, et l'équation donnée prend la forme

$$Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + Y_3 dx_3 = 0,$$

a étant une constante.

L'auteur démontre qu'il existe une fonction u de x_1, x_2, x_3, a telle, que l'on a

$$Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + Y_3 dx_3 = U du.$$

LES TROIS CLAIRAUT.

1. Clairaut (Jean-Baptiste), professeur de mathématiques à Paris. On ignore la date, le lieu de sa naissance et de sa mort. Il a inséré dans les *Miscellanea Berolinensia* :

1° Trois problèmes : Inscrire un cube dans un octaèdre, un hexaèdre ou un cube dans un tétraèdre régulier; manière de toiser les onglets des cônes (en français) (t. III, p. 139).

2° Nouvelle espèce de tractoire. On a un fil de longueur donnée; une extrémité porte un poids placé sur un plan horizontal et qu'il ne peut quitter, l'autre extrémité décrit une ligne *donnée*. On cherche la courbe décrite par le poids sur le plan horizontal. Il décompose la tension du fil en deux forces, l'une perpendiculaire au plan et qui est détruite, et l'autre dans le plan. Dès lors la question devient géométrique (en français) (t. IV, p. 33).

3° Méthode générale de trouver des catenaires (en latin) (t. VI, p. 20).

L'équilibre du polygone funiculaire. Nous le donnons sous forme de question dans les *Nouvelles Annales*.

Manière de trouver l'équation de la courbe funiculaire lorsque chaque point est chargé d'un poids variable suivant une loi donnée (en latin).

Il a survécu à ses *dix-neuf* garçons. Après sa mort, son vingtième enfant, une fille, a obtenu du roi une pension de 1200 francs.

Soit pour les lettres, soit pour les sciences, ses enfants n'ont pas eu d'autres professeurs que lui.

2. Clairaut (Alexis-Claude), né à Paris le 13 mai 1713. A l'âge de douze ans et demi, son père le présenta à l'Académie des Sciences de Paris, où il lut un Mémoire sur quatre lieux géométriques, inséré dans le *Miscellanea Berolinensia*, à la suite du Mémoire de son père sur des problèmes de géométrie. Il parvient à ces quatre équations du quatrième degré :

$$x^4 = a^2(x^2 + y^2),$$
$$x^4 + x^2y^2 = a^4,$$
$$a^2x^2 - x^2y^2 = a^4,$$
$$x^4 + a^2y^2 = a^4.$$

Il généralise ces équations, discute les courbes et mène les tangentes.

A la fin du Mémoire est une attestation donnée par Fontenelle (1er septembre 1726) que, le 13 mai de cette année, le jeune homme a présenté ce travail à l'Académie, et que MM. Nicole et Pitot, chargés du Rapport, en ont fait un grand éloge. Ainsi la précocité mathématique de Clairaut est constatée d'une manière *authentique*. On n'en peut pas dire autant de la précocité de Pascal.

L'illustre géomètre était *lié* avec la marquise du Châtelet; il a donné des chagrins *domestiques* à l'honnête Bezout; les *petits soupers* de Paris ont abrégé ses jours. *Ne dederis mulieribus vigorem tuam* (Prov., XXXI, 2). Il est mort le 17 mai 1765, âgé de cinquante-deux ans. Son père est mort peu de temps après.

3. Clairaut (...), né à Paris en 1716, frère puîné d'Alexis, a lu devant l'Académie des Sciences, en 1730, âgé de quatorze ans, une méthode de former tant de triangles qu'on voudra, de sorte que la somme des carrés des deux côtés soit double, triple du carré de la base, d'où

suivent les quadratures de quelques espèces de lunules.

En 1731, âgé de quinze ans, il a publié un *Traité des quadratures circulaires et hyperboliques,* et est mort en 1732 de la petite vérole.

Il fallait que le père possédât une excellente méthode d'enseignement.

Quelle est la vraie orthographe du nom? est-ce Clairaut ou Clairault?

LES TROIS METIUS ET LE TÉLESCOPE.

Au XVI^e siècle, les noms de famille n'étaient pas encore généralement usités en Hollande. Un fils ajoutait à son nom de baptême celui de son père. Il y eut un Hollandais nommé *Anthon;* celui-ci eut un fils nommé *Adriaan Anthonszoon* qui prit une grand part à la guerre de l'Indépendance, était inspecteur des places fortes et en bâtit plusieurs; c'est lui qui est auteur du fameux rapport $\frac{355}{113}$, ainsi que le dit son fils.

Ce fils porta le nom de *Adriaan Adriaanszoon;* mais, étant écolier, ses condisciples lui appliquèrent le sobriquet de *Metius;* ce nom lui resta toute sa vie; et il est connu sous le nom d'*Adrien Metius,* né à Alkmaar le 9 décembre 1571 et mort à Franeker le 6 septembre 1635. Il était médecin et professeur de mathématiques à l'université de Fraueker et auteur de plusieurs ouvrages d'astronomie et de géométrie; mais, chose singulière, ce même sobriquet fut appliqué à son père, auteur du rapport, et qui était aussi connu sous le même nom Adrien Metius, et appliqué également à son frère Jacques Metius (mort entre 1624 et 1631), qui s'occupa beaucoup à Alkmaar de la taille du verre et eut la première idée du télescope; mais la première exécution de l'instrument est due à Hans Lippersheim, né à Wesel, mort en 1619, à Middelbourg. Il envoya dès le 2 octobre 1608 un tel instrument aux états généraux de Hollande, pour obtenir un brevet, et sur leur demande, il leur fournit en décembre 1608 un télescope binoculaire. Les lentilles n'étaient pas de verre, mais en cristal de roche.

PREMIER OUVRAGE D'ARITHMÉTIQUE IMPRIMÉ (1478).

Abbacho. *Incommincia una practica molta bona et utile a chiascheduno che vuole uxare larte della mercadantia, chiamata vulgarmente larte de labbacho.* A. Trevisio, 10 deceb. 1478.

En lettres demi-gothiques, 32 lignes par page, en tout 62 feuillets, sans pagination, sans signature, sans réclames. Les nombres sont en chiffres arabes; exemplaire *unique*, fait partie de la célèbre bibliothèque Libri, dont la vente a lieu maintenant à Londres (Catalogue, p. 53, n° 470). Aucun des bibliographes qui en font mention ne l'a vu, excepté Frédéric dans son ouvrage *Memorie Trevigiane;* il le décrit (p. 73) et l'attribue à l'imprimeur Michele Manziolo, un des plus anciens imprimeurs de Trévise. Comme l'exemplaire mentionné par Frédéric a été perdu ou égaré, les bibliographes subséquents ont douté de son existence et plusieurs ont regardé cette annonce comme une mystification. Car, malgré les recherches les plus soignées de Brunet et d'autres bibliophiles, on n'a pu découvrir aucun exemplaire, ni dans la Bibliothèque Impériale, ni au Musée Britannique, ni dans aucune autre bibliothèque publique ou particulière.

Les conservateurs de la Bibliothèque Impériale devraient, pour acquérir un si précieux monument typographique, mettre autant de zèle qu'ils en déploieraient s'il s'agissait d'un pont-neuf du moyen âge ou d'une mazarinade du temps de la frivole et ridicule Fronde. On fait souvent des dépenses excessives pour des productions qui ne profitent pas à l'esprit humain pour la valeur d'un centime.

LA PLUS GRANDE PYRAMIDE DE GIZEH;

D'APRÈS M. A.-S. HERSCHEL (*).

On a l'équation

$$\cos 38^\circ 10' 46'' = \text{tang}\, 38^\circ 10' 46'' = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 0,7863,$$

$$\frac{1}{4}\pi = 0,7854.$$

Ainsi la tangente et le cosinus de $38^\circ 10' 46''$ diffèrent très-peu de $\frac{1}{4}\pi$; de là un moyen simple de trouver par un facile tâtonnement une droite à peu près égale au quadrant d'un cercle.

Soit un cercle de centre O; menons le diamètre AOB; en B menons une tangente, et par A une droite AMN, M est sur la circonférence et N sur la tangente, telle que AM égale BN : ce qu'on obtient par peu d'essais; alors

(*) *Quarterly Journal*, octobre 1860, p. 160.

AM est égal au quadrant du cercle à un millième du rayon près.

Les pyramides, près de Gizeh, à base carrée, sont des pyramides régulières. Hérodote rapporte que dans la plus haute, celle de Chéops (145 mètres), l'aire d'une face est égale au carré de la hauteur. Un calcul facile fait voir que chaque face fait avec la hauteur un angle de $38^\circ\, 10'\, 46''$, car cet angle étant représenté par m, on a comme conséquence de l'énoncé d'Hérodote

$$\cos m = \operatorname{tang} m.$$

De là on conclut encore que le périmètre de la base divisé par la hauteur est égal à très-peu près à 2π. Cela semble confirmer l'opinion singulière émise récemment que cette pyramide a été élevée pour transmettre à la postérité le rapport de la circonférence au rayon :

The great Pyramid, and why it was built, by John Taylor.

Chéops était antérieur à Abraham (— 2366); les Égyptiens connaissaient donc déjà 2π avec assez d'exactitude, du moins empiriquement; ce qui n'est pas impossible. Archimède (— 281), dans sa jeunesse ayant fréquenté Euclide à Alexandrie, a pu avoir connaissance de cette donnée empirique, à laquelle il a donné une base théorique fondée sur les propriétés des polygones réguliers qu'on enseignait dans l'école d'Euclide.

Voici le passage d'Hérodote.

Τῇ δὲ πυραμίδί αὐτῇ χρόνον γενέσθαί
Εικοσι ἔτεα ποὶεομένῃ, τῆς ἐστι παντακῆ
Μέτωπος ἔκ κστον οκτω πλέθρα, ἐούσης
Τετραγώνου, και ὕψος ἴσον.

(Hérodote, Βιβλος. B., ch. 124.)

La pyramide même coûta vingt années de travail : elle est carrée ; chacune de ses faces a huit plèthres de largeur sur autant de hauteur. (LARCHER, t. II, ch. 124, p. 103, édit. de 1786.)

Le plèthre est une mesure linéaire, sixième partie du stade, longueur de 100 pieds ($32^m;48$) ; c'est aussi une mesure agraire de 10000 pieds carrés, un carré de 100 pieds de côté ; ainsi il mesurait 9 ares. Le texte d'Hérodote est obscur et la traduction française inintelligible ; je ne sais comment on a déduit l'interprétation anglaise.

NOTE SUR L'ENSEIGNEMENT ACTUEL DE LA MÉCANIQUE.

Voltaire prétend que souvent lorsque deux métaphysiciens s'entretiennent ensemble, l'un ne sait ce qu'il dit, l'autre ne sait pas ce qu'on lui dit. Telle est à peu près aujourd'hui la position analogue des professeurs et des élèves en ce qui concerne la science des forces. Cela m'a été confirmé par un juge très-compétent, haut placé, pour bien connaître la vie mathématique universitaire.

Toutefois les talents pédagogiques des professeurs, l'intelligence des élèves sont incontestables. D'où vient cette décadence scolaire ? Elle provient de ce qu'on a versé des ténèbres métaphysiques sur une branche très-claire de nos connaissances et uniquement dans un intérêt matériel. En effet, la tendance générale du siècle est de devenir très-riche, et en peu de temps. La vie est si courte, qu'on ne saurait trop vite s'en procurer les jouissances. Or la partie des mathématiques dont les résultats se soldent en argent sont les machines ; donc la théorie des machines doit être le but essentiel de la science. Autre-fois on étudiait les machines en vue de la mécanique; maintenant on étudie la mécanique en vue des machines. On a fait entrer le tout dans la partie, et d'entrée, on parle aux élèves de *forces vives*, de *quantité de travail*, conceptions passablement nuageuses pour des commençants; nuages qui s'épaississent même en avançant. Dans la statique on ne rencontre pas ces nuages-là : aussi a-t-on supprimé la statique. De mon temps, on enseignait la *Statique* de Monge, qui est d'une telle simplicité, qu'on peut presque s'en servir dans un pensionnat de jeunes personnes; moins facile, et infiniment plus substantielle est la *Statique* de Poinsot, chef-d'œuvre de clarté et de profondeur; préludant même à la cinématique du *char céleste*, belle expression talmudique pour désigner les mouvements engrenés de la grande unité, du tout cosmique. On nous fait espérer qu'on doit y revenir; ce serait une victoire remportée sur le génie des ténèbres. Telle est aussi la *Mécanique*, production posthume de Sturm, confiée aux habiles mains de M. Prouhet. Le premier volume vient de paraître; puisse le second bientôt suivre, enrichi de considérations sur les mouvements relatifs devenus si importants et en outre les représentations dynamiques de Poinsot, sujet d'un beau travail analytique que vient de publier le savant professeur Chelini (D.), dont nous recommandons l'étude aux élèves studieux : *Determinazione analitica della rotazione de' corpi liberi secondo i concetti del signor Poinsot*, in-4°, 30 lignes, 1860, 40 p. L'analyse est plus simplement exposée et plus complète que dans le célèbre Mémoire de Poinsot.

Bien entendu, ce qui précède n'est relatif qu'à la méthode d'enseignement, car le perfectionnement des machines contribue singulièrement à l'amélioration du bien-être général. Selon l'observation de l'illustre Poncelet, le premier *mécanologue* du siècle, les machines, en suppléant aux forces physiques de l'homme, ont eu une part considérable dans l'abolition de l'esclavage. Il semble qu'on devrait diviser la science en trois parties distinctes :

1° La *Statique*, fondée uniquement sur la notion de l'égalité de deux forces, sans s'enquérir ni de MV, ni de MV^2 ;

2° La *Dynamique*, où l'on s'enquiert principalement de MV et subsidiairement de MV^2.

3° La *Mécanologie*, science des machines, où l'on s'enquiert principalement de MV^2 et subsidiairement de MV. Au moyen de ces distinctions, on éviterait toute confusion et le jour rentrerait dans la science.

Dans le système *actuel*, on ne saurait trop vivement recommander l'admirable *Mécanique rationnelle* de M. Delaunay (*).

BIBLIOGRAPHIE.

Les trois livres de Porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois, d'après la Notice et les Lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions; par M. *Chasles*, membre de l'Institut (Académie des Sciences). In-8, avec figures dans le texte; 1860. (Mallet-Bachelier, libraire.)

La découverte des livres perdus de Tite-Live ferait une grande sensation dans le monde lettré. En effet, une lacune dans l'histoire remplie par un grand maître de l'art

(*) Les Traités, très-dignes d'attention, de MM. Freycinet et Résal sont trop empreints de métaphysique, trop *tendus*.

est une précieuse acquisition. Toutefois, l'histoire politique n'enregistre malheureusement, le plus souvent, que des aberrations, des injustices, des violences de tout genre, et surtout des entre-égorgements sur une grande échelle. Telle n'est pas l'histoire intellectuelle de l'homme, étrangère à toutes ces énormités, et particulièrement cette partie de nos connaissances que les Grecs ont désignée sous la dénomination de science par excellence, Μαθέσις. Et dans cette Μαθέσις, les Anciens plaçaient au premier rang la Géométrie. Telle est aussi l'opinion de l'Ecriture sainte : Dieu a tout fait avec poids et mesure; et remarquons que si, dans les temps modernes, les sciences physiques ont fait des progrès si considérables, c'est qu'on a suivi, *salva venia,* la voie divine. On a pesé, on a mesuré. Le célèbre Liebig (*), dans ses délicieuses Lettres sur la Chimie, dit que la balance a tué le système d'Aristote, la balance entre les mains d'un Lavoisier.

Dans un autre endroit de l'Écriture, on rencontre cette pensée sublime (Prov. VIII, 27) : En formant les mondes, Dieu a posé le compas (*Chougue*) sur la face de *Tohome*, mot hébreu qu'on traduit par *abyme*, mais qui désigne l'espace indéfini, vide de toute matière, même de lumière. C'est sur ce Tohome qu'au premier jour de l'univers plana l'Esprit divin, et y fit pénétrer la clarté par cette injonction célèbre : *Fiat lux,* qu'il fasse clair, et non *que la lumière soit.* Car les Anciens ne connaissaient pas la lumière ni dans le sens cartésien, ni dans le sens newtonien.

Platon à cette question : Τι ποιει Θέος, Que fait Dieu? répond Γεωμέτρει, il *géométrise.*

C'est la pensée biblique en d'autres termes. Une lacune dans l'histoire intellectuelle est bien plus regrettable

---

(*) Liebig (le baron Justus de), né à Darmstadt le 13 mai 1803.

que dans l'histoire politique; il en existait une qui vient d'être remplie par un Français dont notre patrie a droit d'être fière.

Au commencement du IV^e siècle avant la Rédemption, Euclide a réuni systématiquement toutes les propositions nécessaires pour démontrer les propriétés des polyèdres réguliers dont il est si souvent question dans l'école de Platon dont Euclide était disciple; et il a écarté soigneusement tout ce qui était étranger à ce but (*).

Après vingt-trois siècles d'existence, ce chef-d'œuvre a conservé toute sa fraîcheur, est encore jeune, et plus jeune même que certaines productions nées d'hier. On savait en outre qu'Euclide avait composé, sous le titre de *Porismes*, un ouvrage où il ne se montre plus simple ordonnateur, mais investigateur et créateur d'une méthode exégétique. Cet ouvrage a disparu; mais il existait encore à la fin du IV^e siècle de notre ère, et un éminent géomètre, Pappus, nous a transmis, sur son contenu et sa grande utilité dans toutes les parties des mathématiques, des renseignements précieux qui en faisaient regretter vivement la perte. Déjà le titre même de Porismes avait subi des modifications, Pappus en donne deux définitions entachées d'obscurité que les plus grands géomètres ont vainement cherché à dissiper. Il suffit de nommer Fermat. Enfin l'Anglais Simson fit pénétrer quelques lueurs dans ces ténèbres, et il fut réservé à M. Chasles de convertir ces lueurs en flambeaux. En outre, Pappus a laissé une sorte de résumé énigmatique des 171 propositions des trois livres des Porismes, et a donné des lemmes destinés à la démonstration de ces propositions. M. Chasles a eu le bonheur de compléter

(*) C'est l'opinion d'un ami de Descartes, premier traducteur français d'Euclide.

Pappus et de nous donner *in extenso* les trois livres avec les démonstrations fondées sur les lemmes du géomètre grec. L'exposition de ce travail a déjà été faite avec un talent à la hauteur du sujet (*Bulletin*, p. 1) ; aussi nous n'avons garde d'y revenir, mais nous croyons nécessaire de mentionner l'admiration qui a éclaté chez tous les géomètres de tous les pays du globe, et qui s'exprime souvent en style presque lyrique. Nous donnerons pour spécimen une lettre qu'un savant anglais a adressée à l'éditeur (M. Mallet-Bachelier), et l'on sait que cette nation ne s'enthousiasme pas facilement à l'endroit des Français :

« Few things afford me more instruction and pleasure » than the perusal of any work from the pen of its il- » lustrious and gifted author, who has, by this new effort » of unwearied and patient industry, not only exumed » from beneath the overlying dust of ages a beautiful » monument of ancient genius and presented it for the » admiration of modern times, arrayed in all the charm » of his own brilliant and fresh conception and of his » peculiary lucid and attractive language, but has com- » pleted by its accomplishment an imperishable record » that will couple to the end of time the names of *the* » *two,* who in the whole history of human enquiry have » done most for the science of pure geometry, — of him » who in ancient times *transmitted his name* to the » science as it *then was,* — and of him, who, in modern » times, has *made* the science, what it *now is.* »

Ainsi s'exprime M. Townsend, savant professeur de l'université de Dublin.

Passons sur le continent.

Trois chaires de géométrie supérieure ont été créées dans l'Italie régénérée. M. Cremona, bien connu de nos lecteurs et titulaire de la chaire de Bologne, dans son discours d'inauguration (*), après avoir tracé un résumé historique depuis les premiers linéaments de la *géométrie moderne* jusqu'à sa vigoureuse constitution actuelle, et établi qu'elle renferme une méthode *exégétique*, ce qui la distingue essentiellement de la géométrie descriptive, et avoir donné plusieurs applications, dit :

Finalmente, quelle stesse teorie danno la chiave per isciogliere il famoso enimma de' Porismi d'Euclide, che per tanti secoli ha eccitato invano la curiosità de' geometri: enimma che ora ha cessato di esser tale, mercè la stupenda *divinazione fattane de Michele Chasles.*

Craignant de fatiguer le lecteur, nous supprimons d'autres citations du même genre.

Il semble que le Conseil impérial d'Instruction publique devrait ordonner de placer cet ouvrage dans toutes les bibliothèques des établissements universitaires, non pas que ce soit nécessaire pour le débit de l'ouvrage, mais dans l'intérêt des études et d'une gloire française; cela est même d'étroite obligation pour la tétrade polytechnique qui représente dans ce Conseil les mathématiques. Nous croyons devoir avertir les professeurs que ce n'est pas ici un livre de pure érudition, mais un excellent livre d'exercices dans la Géométrie des Anciens, gymnastique tant recommandée par Newton. Aussi les Porismes doivent se trouver entre les mains de tout professeur enseignant la géométrie pure. Alcibiade souffleta un instituteur qui n'avait pas d'Homère dans son école; Euclide est l'Homère des géomètres.

Nous formons deux vœux :

Puisse notre école d'Athènes nous donner en grec litté-

(*) *Prolusione ad un corso di geometria superiore, etc.*, dal Dottor Luigi Cremona. Nov. 1860. In-8 de 25 pages; Milano, 1861.

ral des Porismes-Chasles, traduction d'ailleurs très-facile;

Puisse la riche Angleterre, à laquelle nous devons déjà une magnifique édition d'Archimède, nous donner enfin le texte grec des Collections de Pappus.

Comme d'ordinaire, cette production des presses Mallet-Bachelier ne laisse rien à désirer; la collation facile du texte avec les figures intercalées diminuant la contention d'esprit, excite à l'étude. Cette perfection typographique ne surprendra pas ceux qui ont entre les mains le premier volume de la *Théorie du Mouvement de la Lune,* par M. Delaunay, membre de l'Institut. Chef-d'œuvre d'écriture algébrique, les calculs sont présentés avec tant de discernement, les lettres si bien alignées et nivelées, les divers symboles si expressifs, la justification si agréable à l'œil, qu'on est tenté de croire que M. le directeur Bailleul (*), par une seconde vue, a l'intelligence des formules gigantesques qu'il peint sur le papier. Peindre est ici le mot propre. Monument typographique sans précédent, il brillera dans les prochaines Expositions, française et anglaise. L'Éditeur et son puissant auxiliaire peuvent espérer de voir couronner tant de persévérance, tant de pénibles labeurs, d'honorables distinctions. C'est aux mêmes presses qu'on devrait confier la publication des *Œuvres de Fermat,* ordonnée par une loi. L'exécution de cette loi serait digne de l'auguste Souverain qui encourage si généreusement toute culture intellectuelle, esthétique, industrielle; qui a élevé si haut le nom et le drapeau de la France. O. Terquem.

(*) Né à Paris, le 9 septembre 1797. Nommé Chevalier de la Légion d'honneur à l'Exposition universelle de 1855 (Décret impérial du 14 novembre 1855).

LE TALMUD ET KEPLER.

Nous *voyons* le soleil et les étoiles se lever et se coucher, tandis que la terre ne bouge pas ; cette impression a naturellement donné le premier système du monde, et qui a été admis par toute l'antiquité. Ptolémée (+ 175) a donné une forme scientifique à ce système qui consiste à rendre la terre *fixe* au centre du monde et à faire tourner autour d'elle tous les corps célestes. En 1443, l'illustre Polonais Copernic (Nicolas) a renversé ce système et a établi, avec une extrême probabilité, l'*hypothèse* que le soleil est *fixe* au centre du monde et que les planètes, la terre comprise, se meuvent autour. En 1851, un jeune Français nommé Foucault (*) a changé l'*hypothèse* en *certitude* complète à l'aide d'une admirable expérience sur le pendule, et à l'aide d'un instrument (gyroscope) peut-être plus admirable encore, le célèbre physicien parvient, non à *démontrer*, mais à *montrer* le mouvement de notre globe. De sorte que ce mouvement est devenu une vérité hors de toute atteinte. La fixité de notre globe est la croyance *spontanée primitive*. La mobilité est la croyance *réfléchie*, deux genres de croyances rarement identiques. Toutefois, plusieurs passages de la Bible annoncent le mouvement du soleil et la fixité de la terre. Voici les versets :

« Que le soleil s'arrête dans Gabaon et la lune dans » la vallée Ajalon. Le soleil s'arrêta et la lune resta » fixe. » (Josué, x, 12, 13.)

(*) Jean-Bernard-Léon Foucault, né à Paris, fils d'un libraire, le 8 septembre 1819.

« Une génération s'en va, une génération arrive, et la » terre *reste* toujours. » (Eccl., I, 4.)

« Il (le soleil) sort comme le fiancé dessous le dais » nuptial, joyeux comme l'athlète s'élançant dans la car- » rière; il part de l'extrémité des cieux et retourne aux » extrémités. » (Ps., XIX, 4, 5.)

« Il a fondé la terre sur ses bases pour qu'elle ne s'é- » branle à tout jamais. » (Ps., CIV, 5.) (*)

Il est de toute évidence que dans ces divers passages on admet la mobilité du soleil et la fixité de la terre. Mais ces passages étant *inspirés*, soutenir le contraire avait l'apparence d'une hérésie; aussi Galilée ayant professé *publiquement* le système de Copernic, reçut, le 1er mars 1616, un premier avertissement d'avoir à cesser une telle doctrine. N'ayant pas tenu compte de cet avertissement, il fut forcé de comparaître à Rome devant une Commission formée de onze cardinaux, et, le 22 juin 1633, il fut condamné à *abjurer* la mobilité de la terre. Cette fâcheuse décision n'aurait pas été prise, si la Commission avait connu et appliqué cette sage maxime posée par le *Talmud* et dont il fait un si fréquent usage :

« Les paroles de la Thora se conforment au langage du » commun des hommes. »

Et notez des Hébreux, tels ignorants qu'ils étaient il y a trente-trois siècles.

Kepler, sans avoir jamais lu le *Talmud*, emploie la même maxime, et, chose singulière, presque dans les mêmes termes, pour repousser l'accusation d'hérésie que des théologiens portaient contre l'opinion copernicienne. Voici ce qu'on lit dans l'introduction de son *Astronomia*

(*) Kepler fait voir que ce magnifique psaume est modelé sur l'Hexameron de la Genèse ; les versets 2, 3, 6, 20, 26, 28 correspondent aux six formations successives du premier chapitre de Bereschit.

nova (1609), ouvrage immortel où il a consigné ces lois qui ont servi à Newton à créer la mécanique céleste, ou dans le style des docteurs du *Talmud*, la *construction du char*, comparant le monde à un système de rouages, dont les pièces solidaires les unes des autres, forcent les roues à marcher ensemble; idée pittoresque et très-juste. Voici maintenant le texte de Kepler: *Jam vero et sacræ litteræ, de rebus vulgaribus (in quibus illorum institutum non est homines instruere) loquuntur cum hominibus humano more, ut ab hominibus percipiantur; utantur iis quæ sunt apud homines in confesso, ad insinuandum alia sublimiora et divina.*

« L'Écriture sainte, quant aux choses vulgaires, n'a pas pour but de les enseigner aux hommes; elle parle aux hommes comme il est d'usage chez eux, afin que ces hommes puissent comprendre. Elle emploie des termes vulgairement connus chez eux, afin de leur inculquer par là des vérités plus élevées et de nature divine. »

Il est malheureux qu'en 1633 les cardinaux, juges de Galilée, n'aient pas eu égard à ce que Kepler disait en 1609. En effet, Dieu ayant créé l'homme à son image, c'est-à-dire en ayant fait un être intelligent, a voulu qu'il se servît de cette intelligence pour découvrir de lui-même les sciences; le but de la Bible ne saurait donc être d'enseigner aucune science, son but unique est de nous apprendre nos devoirs envers les hommes et envers Dieu; ce qu'il faut faire pour plaire au Créateur, et ce qu'il faut éviter pour ne pas lui déplaire : voilà ce qu'on doit chercher dans l'Écriture sainte et pas autre chose. Les essais que l'on fait, avec de bonnes intentions sans doute, pour appuyer les sciences sur la Bible et la Bible sur les sciences, sont des essais malencontreux, qui font du tort à l'une et à l'autre; il suffit de lire les tentatives que l'on a faites pour concilier le I^{er} chapitre de la Genèse avec les sciences naturelles. En dénaturant le but de la Bible, on ne rencontre que des difficultés insurmontables. La Bible doit perfectionner l'homme moral et la science l'homme intellectuel; à chacune sa part (*).

Revenons à Kepler qui termine ainsi :

« Voici ce que j'ai à dire relativement à l'autorité de l'Écriture sainte; quant aux opinions des *Saints*, je répondrai par un seul mot : en théologie, il faut peser les *autorités*, mais en philosophie il faut peser les *raisons.* Saint Lactance nie la rondeur de la terre, saint Augustin admet la rondeur et nie les antipodes; le Saint-Office accorde la petitesse de la terre et nie son mouvement. Mais pour moi la terre est ronde, il y a des antipodes, la terre est d'une extrême petitesse et se meut dans l'espace, car, en philosophie, la sainte vérité doit être l'autorité prépondérante. »

Le célèbre Borelli, qui le premier a trouvé la loi du choc des corps durs (*De vi percussionis*, Bononiæ, 1667), l'auteur du célèbre ouvrage sur le mouvement des animaux (*De motu animalium*, 2 vol. Romæ, 1681), et qui est mort (1679, 30 déc.) dans la dernière misère dans un couvent de Rome, en enseignant l'astronomie, était obligé de dire : « *Ita sancta docet Ecclesia, ita credendum.* »

M. Lieber, libraire, vient de faire tirer un portrait authentique de l'immortel astronome wurtembergeois; sur cette belle page, le grand artiste de là-haut a mis en relief une haute intelligence, une extrême bonté et les traits d'une naissance distinguée. Au premier aspect, on devine un homme d'élite, brillant par la pensée, par la fermeté du caractère, par la persévérance, dons du génie créateur. Toutefois Kepler a passé une partie de sa vie à tendre la main à ses augustes protecteurs pour obtenir du pain,

(*) Les données numériques de la Bible ne s'accordent presque jamais entre elles.

dont sa famille manquait souvent; il est mort, luttant contre une extrême pénurie.

Albert Girard a succombé sous les dures étreintes d'une profonde misère.

Borelli expire dans un obscur hôpital de Rome.

A l'âge de 70 ans, Galilée est stigmatisé, non par les tortures, mais par les angoisses et les terreurs effrayantes de l'inquisition, fille de l'enfer.

Leibniz, recherché de tous les souverains de l'Europe, mourant disgracié, est enterré nuitamment, n'ayant pour tout cortége qu'un obscur juif, son fidèle disciple (t. XII, p. 418).

De nos jours, l'inventeur de l'hélice maritime, qui a brisé le sceptre de Neptune entre les mains de l'Anglais, s'est éteint dans une maison de santé d'un faubourg de Paris. Où est sa statue? Celle de Madame Dubarry brille parmi les gloires de la France à Versailles.

Parmi les hauts enseignements que nous devons à l'Écriture sainte, un des plus instructifs est à mon sens celui-ci : « Dieu se repentit d'avoir fait l'homme (Genèse, VI, 6). »

JOACHIMSTHAL.

Dans le *Journal de Crelle-Borchardt* qui vient de paraître (t. LIX, cah. 2, p. 111), on lit un Mémoire de vingt-cinq pages sur cette question épineuse : Déterminer le nombre des normales *réelles* qu'on peut abaisser d'un point donné sur un ellipsoïde. Une puissante et lucide analyse fait disparaître ces épines. C'est le chant du cygne. Il n'a pas été donné au célèbre géomètre de voir la publication de son Mémoire : déjà il avait terminé sa carrière terrestre.

Joachimsthal (Ferdinand), né à Goldberg (Silésie) le 9 mars 1818, est mort, professeur à l'université de Breslau, le 5 avril 1861, âgé de quarante-trois ans. Les professeurs connaissent les beaux théorèmes sur les normales à l'ellipse dont il a enrichi les *Nouvelles Annales*. Il a inséré dans la collection Crelle onze Mémoires sur les sujets les plus variés. Sa tendance principale le portait vers les applications géométriques. Non content d'établir d'élégants et nouveaux théorèmes, il s'efforçait de ramener tout aux principes fondamentaux. Il procédait de la même manière dans ses lecons publiques, ce qui l'avait mis au premier rang dans l'enseignement des universités allemandes. Sa mort prématurée occasionne une double perte sous le rapport de la propagation de la science et de ses progrès.

BIBLIOGRAPHIE.

Tables portatives de Logarithmes, contenant les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 108000, etc.; par *François Callet*. Entièrement revues et corrigées par M. *Saigey*, édition stéréotype de Firmin Didot. In-8°, Paris, 1861 (*).

Dans des communications directes que j'ai eues en 1857 et 1858 avec MM. Ambroise et Hyacinthe Didot, sous les auspices de M. Biot, j'ai fait connaître à ces messieurs

(*) Ces Tables, chose singulière, n'ont pas de table des matières et ne contiennent aucun renseignement arithmologique. Tm.

558 fautes qui entachaient les Tables de Callet, et j'ai porté les corrections sur des feuilles d'épreuve qu'ils m'avaient remises à cet effet. Je leur annonçais, en même temps, que M. J. Hoüel, docteur ès sciences, qui avait collationné avec moi la dernière partie de la Table des logarithmes des nombres à 7 décimales sur le manuscrit des grandes Tables du Cadastre (*), s'occupait de vérifier les logarithmes des lignes trigonométriques du cinquième degré, très-inexactement calculés de seconde en seconde par Callet (**). J'engageais enfin MM. Didot, lorsqu'ils auraient donné aux Tables la correction matérielle qui leur manquait, à remplacer par une Introduction nouvelle le *Précis élémentaire sur l'explication des logarithmes et sur leur application, etc.*

Ces conseils ont porté, au moins en partie, leurs fruits. Les erreurs que j'avais signalées ont été corrigées, et M. Saigey a été chargé d'opérer une révision générale de l'ouvrage de Callet. Voici en quels termes, dans la Préface du tirage de 1861 sur laquelle MM. Firmin Didot frères, fils et Ce appellent l'attention publique, l'éditeur annonce la mission qui lui a été confiée, et la manière dont il l'a comprise et exécutée (***) :

« MM. Didot m'ayant chargé de surveiller les cor-
» rections indiquées par ces deux derniers géomètres
» (MM. Bremiker et Lefort), je pensai qu'il ne fallait
» pas s'en tenir là, mais réaliser enfin le vœu de leur
» père, en s'adressant, non plus à des collections d'hom-
» mes, qui ne font jamais rien de bon ni de complet, mais

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XVII, 1858; bibliographie, p. 41 et suivantes.

(**) *Ib.*, p. 18 et 19.

(***) Cette Préface, tirée à part et accompagnée d'une lettre d'envoi, paraît avoir été distribuée à un assez grand nombre d'exemplaires.

» à un seul calculateur, qui fît la chose pour elle-même, » et non pour favoriser quelque entreprise rivale, ou dans » un esprit de simple dénigrement.

» Ce travail, purement laborieux et sans mérite, je l'ai » exécuté en 1859 et 1860. J'ai préféré, généralement, » suivre les méthodes synthétiques des premiers calcula- » teurs; car j'attribue les nombreuses erreurs de Callet » à l'usage qu'il a fait des formules expéditives, mises en » vogue par les auteurs des grandes Tables du Cadastre, » surtout à cette méthode des différences et interpolations, » qui laisse toujours de l'incertitude sur les résultats, et » dans des cas particuliers ne peut assurer la dernière dé- » cimale d'un logarithme. »

L'incorrection grammaticale du premier paragraphe, qui tient sans doute à quelques fautes d'impression (*), permet difficilement d'assigner un sens précis à la longue phrase qui le compose. Toutefois, elle veut dire, ce me semble, que M. Saigey, par ses efforts individuels, a produit un travail bon et complet; qu'il n'a pas fait connaître les erreurs de Callet pour favoriser une entreprise rivale, comme M. Bremiker, ou dans un esprit de simple dénigrement, comme M. Lefort. Je doute que le D^r^ Bremiker éprouve plus que moi le besoin de répondre à de semblables imputations, mais il partagera certainement ma surprise, s'il vient à lire un remercîment stéréotypé en pareils termes, à l'occasion de corrections dont nous avons fait, l'un et l'autre, la majeure partie des frais (**).

(*) La supposition est légitime, car il existe une faute d'impression très-réelle, page 6, ligne 33, et elle s'applique précisément à la correction d'une faute d'impression :

Au lieu de.............	log 52943	(5 lisez 6)
Il faut..................	log 52943	(6 lisez 5)

(**) Fautes reconnues par le travail de M. Bremiker........... 1378

» » M. Lefort................ 558

Ensemble....... 1936

Je ne puis être d'aussi facile composition sur la rédaction du second paragraphe. Les jeunes gens auxquels la nouvelle édition des Tables est principalement destinée, doivent être mis en garde contre les appréciations erronées qu'elle renferme. Il est bon qu'ils sachent que Prony et Legendre sont les principaux auteurs des grandes Tables du Cadastre; que tous deux étaient de très-habiles calculateurs; que le second était de plus un profond géomètre; qu'ils n'ont *mis en vogue* aucune formule expéditive capable d'induire en erreur; que la méthode des différences qu'ils ont employée ne laisse jamais d'incertitude sur les résultats, quand on sait s'en servir; que cette méthode est la seule à suivre pour le calcul de Tables un peu étendues; que les nombreuses erreurs commises par Callet (*) tiennent à ce qu'il était un très-médiocre géomètre, et qu'il a fait un mauvais usage d'une méthode défectueuse, assez peu clairement exposée par lui aux pages 64, 65, 66 et 67 de son *Précis élémentaire*.

C'est une rude besogne que la révision d'une collection de Tables comme celles de Callet : il y a là autre chose qu'une simple correction d'épreuves. Je ne prends donc pas au mot M. Saigey, lorsqu'il appelle son œuvre, l'exécution d'un travail purement laborieux et sans mérite : je suis même tout disposé à croire que ses corrections ne laissent rien à désirer, partout où il a jugé convenable d'en faire; mais je ne puis comprendre sa prétention à une révision complète, alors qu'il signale lui-même des lacunes qui ne sont pas sans importance.

Si les quantités $\frac{\log \sin ax}{x}$, $\frac{\log \operatorname{tang} ax}{x}$, désignées par Callet sous les lettres S et T en tête des pages des logarithmes

---

(*) Callet (François), né à Versailles le 25 octobre 1744, mort à Paris le 14 novembre 1798. TM.

des nombres, ont été corrigées, les quantités V, qui expriment les variations pour 10″ de S et de T et qui n'étaient pas moins incorrectes qu'elles, ont été conservées. Ayant reculé devant un travail de remaniement aussi étendu, M. Saigey conseille aux calculateurs de ne pas tenir compte de ces variations. N'eût-il pas mieux valu les faire complétement disparaître?

Une des Tables de Callet contient les sinus naturels et leurs logarithmes à 15 figures, ou, pour parler plus exactement, donne les sinus naturels avec 15 décimales et les logarithmes avec 14 décimales. M. Saigey avertit que les sinus et les logarithmes ont été extraits de 9 en 9 de la *Trigonometria Britannica;* il ne dit pas de quelle manière Callet s'est procuré les nombres intermédiaires. Il annonce avoir conféré la Table de Callet avec celle de Briggs; qu'on (*) a pu corriger les sinus naturels de Callet d'après les grandes Tables du Cadastre; que les logarithmes de Briggs sont erronés de 1 à 4 unités sur la dernière décimale; que cette dernière décimale n'a pas été corrigée dans la Table de Callet. Mais il ne fait en aucune façon connaître le degré d'exactitude de la Table pour les logarithmes interpolés. On peut en conclure que tous ces logarithmes sont au moins aussi inexacts que les logarithmes de départ. Pourquoi inscrire des décimales incorrectes? Il eût été préférable sans doute d'opérer une collation complète sur les grandes Tables du Cadastre (**), et de se borner à inscrire les 12 décimales exactes que ces Tables peuvent assurer. Ce parti eût été d'autant plus sage que le degré de précision des logarithmes de la *Tri-*

(*) Qui *on?*

(**) On sait qu'un des exemplaires manuscrits des grandes Tables du Cadastre est déposé à la bibliothèque de l'Observatoire, et que j'ai obtenu le don du second exemplaire en faveur de la bibliothèque de l'Institut.

gonometria Britannica n'est pas tel que l'annonce M. Saigey, sur l'autorité de Delambre qu'il ne cite pas. Après avoir vérifié la totalité des points communs aux Tables de Briggs et aux Tables du Cadastre, j'ai reconnu que les logarithmes de Briggs étaient souvent en erreur de 6 à 10 unités du dernier ordre, et que l'erreur s'élevait jusqu'à 17 unités. Je citerai en particulier le log $0^q,186$, dont la valeur est très-fidèlement reproduite par Callet d'après Briggs. Les Tables de Callet n'assurent donc pas plus la 13^e décimale que la 14^e. J'ajouterai que la *Trigonometria Britannica* de Briggs est un ouvrage d'une correction très-rare, et que la faute signalée par M. Saigey, et depuis longtemps connue, ne suffit pas pour en infirmer la valeur.

C'est uniquement aux yeux des esprits superficiels que peuvent paraître futiles les minutieuses précautions prises par les éditeurs des Tables les plus recommandables, pour obtenir, à une demi-unité du dernier ordre près, la valeur des nombres qu'ils ont inscrits. Un calculateur intelligent doit toujours savoir le degré d'approximation qu'il recherche, et le degré d'approximation qu'il peut obtenir. Il ne peut parvenir à ce dernier résultat que par l'usage de Tables construites elles-mêmes suivant un ordre d'approximation nettement défini et scrupuleusement suivi. Des Tables exactes à 6 décimales, par exemple, offrent toutes sortes d'avantages sur des Tables à 7 décimales, dont la dernière figure serait incorrecte.

Dans le tirage de 1861, l'*Avertissement* de Callet et le *Précis élémentaire* sont restés ce qu'ils étaient en 1795, c'est-à-dire entachés d'une fausse érudition (*), et absolument impropres à autre chose qu'à enseigner l'usage

(*) Par exemple, on apprend dans l'avertissement de Callet que les logarithmes des sinus de seconde en seconde pour les quatre premiers de-matériel des Tables. En voyant le respect scrupuleux de MM. Didot et C[e] pour les indigestes élucubrations de Callet, quelques personnes pourront regretter qu'ils n'aient pas montré le même sentiment de réserve à l'égard de la Géométrie de Legendre. Serait-ce parce que les *Éléments de Géométrie* n'ont pas été clichés?

Ces critiques me paraissent établir surabondamment que la révision de l'ouvrage de Callet n'a pas été complète. On pourrait même penser que toutes les précautions n'ont pas été prises pour assurer la parfaite exactitude d'une révision partielle. M. Saigey relève en effet, à la charge de M. Bremiker, 4 fautes dans la 40[e] édition des Tables de Véga, qui lui a servi pour corriger Callet. Pourquoi M. Saigey n'a-t-il pas fait usage de la 43[e] édition des mêmes Tables, publiée en 1859? Il n'y aurait trouvé aucune des quatre fautes qu'il signale, car elles ont disparu dans les tirages faits depuis 1857. M. Saigey ne dit pas un mot du recueil de Schrön (Braunschweig, 1860); il méritait cependant une mention, et une mention honorable.

Je ne m'attacherai pas à discuter les procédés de calcul qui sont vantés dans la Préface au détriment de la méthode des différences, mais je ne puis laisser attribuer à Gardiner un mérite qui appartient tout entier à Vlacq. Gardiner, cet habile calculateur, comme l'appelle M. Saigey, n'a pas donné le premier les logarithmes trigonométriques de $10''$ en $10''$; il ne les a pas calculés; il les a pris dans la *Trigonometria Artificialis* (*). C'est là qu'il

grés ont été calculés par le *citoyen* Mouton; que le C. Lalande a fait connaître le manuscrit au P. Pezenas, etc. On se douterait difficilement après cette lecture que le *citoyen* Mouton, né en 1618 et mort en 1694, était un chanoine de la collégiale de Saint-Paul de Lyon, et un contemporain du *citoyen* Newton.

(*) *Trigonometria Artificialis*... ab Adriano Vlacco.... Goudæ, 1633. In-fol.

a trouvé log cos $24^{\circ}55'30'' = 9.95754\ 03500$, dont il a fait 9.9575404. Il est d'ailleurs assez curieux de remarquer que le nombre de Vlacq est correctement écrit avec 10 décimales et que le nombre de Gardiner est incorrectement écrit avec 7, comme l'a prouvé le calcul du Dr Bremiker.

Gardiner, pas plus que Callet et tant d'autres, n'a calculé à nouveau les Tables de Logarithmes, il s'est borné à être l'éditeur intelligent des Tables déjà construites, et à en prolonger quelques-unes. Sous ce double rapport, Gardiner est resté très-supérieur à Callet.

Que MM. Didot et Ce me permettent de leur adresser, en terminant cette Note, un conseil d'autant plus désintéressé que je me propose de publier moi-même des Tables de logarithmes à 7 décimales. Je les engage à modifier par un *carton* la nouvelle Préface, qui laisse bien quelque chose à désirer; à faire sauter les chiffres incertains; à ne conserver du Précis de Callet que ce qui est relatif à l'usage des Tables; à suppléer enfin, par de grands soins dans le tirage et dans le choix du papier, à l'usure évidente des caractères stéréotypes qu'ils continuent à employer. A ces conditions, ils donneront une nouvelle édition des Tables de Callet supérieure encore à l'édition de 1861, quoique je n'osasse affirmer qu'elle ne contiendra plus la moindre erreur (*). F. Lefort (**).

(*) *Extrait de la lettre d'avertissement publiée par MM. Firmin Didot frères, fils et Ce :*

« La révision générale que M. Saigey a faite de ces Tables, en utilisant » les recherches récentes de calculateurs habiles, et en recommençant tout » le travail de Callet, par des procédés plus certains, nous permet d'affirmer que cet ouvrage, qui jusqu'à présent avait été considéré comme » le plus correct en ce genre, est maintenant d'une exactitude plus scrupuleuse encore, et ne contient plus la moindre erreur. »

(**) Pierre-Alexandre-Francisque Lefort, né à Paris le 13 mars 1809.

Tm.

Note du Rédacteur. Cette critique judicieuse et spirituelle, outre son mérite scientifique, donne une excellente leçon de *morale* sur la réserve que nous autres *nains* devons mettre en parlant des *géants.*

Principe général. Dans une Table de nombres *incommensurables,* la dernière décimale doit être exacte à une demi-unité près de l'ordre de cette décimale, et un point placé sur cette décimale doit faire connaître si cette demi-unité est par *excès* ou par *défaut*; pour les logarithmes, il est essentiel de tenir compte des diverses corrections indiquées sur les Tables de Bremiker et autres dans les *Astronomische Nachrichten.*

MÉMOIRE SUR LE MOUVEMENT DES NOEUDS DE LA LUNE et sur l'inégalité en latitude qui donne la mesure de l'aplatissement de la terre; par *M. G. Lespiault*, professeur à la Faculté de Bordeaux. In-8° de 54 pages; Paris, 1861 avec figures dans le texte.

De récentes discussions d'astronomie donnent à ce Mémoire un intérêt de circonstance dont le mérite intrinsèque est parfaitement indépendant. L'auteur considère le couple qui fait tourner la terre et son satellite autour de leur centre de gravité commun; par ce point menant les trois parallèles, à l'axe de l'écliptique, aux axes de rotation de la terre et de la lune, il admet, d'après Cassini, que ces trois axes sont sensiblement dans le même plan; de là on déduit facilement la position et l'intensité du couple. Or deux forces poussent les deux planètes vers le soleil; si l'on transporte ces forces au centre commun des deux planètes, il naît une résultante et un couple infiniment petit perturbateur du premier couple, de sorte qu'à chaque instant il y a un couple résultant, variable de position et d'intensité. Décomposant ce couple en trois autres, l'auteur en déduit les trois inégalités : 1° la variation ; 2° la rétrogradation de la ligne des nœuds ; 3° l'oscillation de l'orbite lunaire. Viennent ensuite les expressions analytiques de ces divers couples et les équations différentielles et intégrées, correspondant à chacune des trois inégalités, qui sont chacune à part soigneusement discutées et élucidées.

Dans le calcul du couple primitif, on a fait abstraction des deux couples provenant des deux couples résultant des rotations de la terre et de la lune chacune autour de son axe : abstraction permise en supposant invariables les directions de ces axes ; mais on sait que l'axe terrestre a une nutation due à son ménisque et qui, influant sur le mouvement de la lune, y produit une variation en latitude. La variation de Tycho-Brahé est en longitude.

On trouve dans l'ouvrage du bon Père Mersenne, *Harmonia* (et que n'y trouve-t-on pas !), les relations suivantes entre les phases lunaires et les tons musicaux.

	ANGLES.		
Conjonction...	0	$\frac{360}{360}$	$= 1$ tonique,
Demi-sextil...	30	$\frac{360-30}{360}$	$= \frac{11}{12}$,
Décil........	36	$\frac{360-36}{360}$	$= \frac{9}{10}$ ton mineur,
Octant, octil..	45	$\frac{360-45}{360}$	$= \frac{7}{8}$,
Sextil.......	60	$\frac{360-60}{360}$	$= \frac{5}{6}$ tierce mineure,
Quintil......	72	$\frac{360-72}{360}$	$= \frac{4}{5}$ tierce majeure,

	ANGLES.		
Quadrature...	90	$\frac{360-90}{360}=\frac{3}{4}$	quarte,
Tredecil.....	108		
Trin.........	120	$\frac{360-120}{360}=\frac{2}{3}$	quinte,
Sesquarré....	135	$\frac{360-135}{360}=\frac{5}{8}$	sexte mineure,
Biquintil....	144	$\frac{360-144}{360}=\frac{3}{5}$	sexte majeure,
Quincunx....	150	$\frac{360-150}{360}=\frac{1}{36}$,	
Opposition....	180	$\frac{360-180}{360}=\frac{1}{2}$	octave.

KEPPLER ET WALLENSTEIN.

Il est généralement admis que Keppler s'est mis au service de Wallenstein, et cela en qualité d'*astrologue*. Un document qu'on vient de découvrir prouve que la première assertion est complétement fausse et des lettres de Keppler prouvent que la seconde assertion n'est pas plus vraie que la première. Tout ceci exige quelques explications préliminaires. En 1613, Keppler habitait Prague en qualité d'astronome, d'abord de l'empereur Rudolphe qui aimait beaucoup l'astronomie et très-peu les affaires, par incapacité; et ensuite de l'empereur Mathias qui détrôna son frère Rodolphe en 1611. Les appointements étaient rarement payés et laissaient Keppler toujours dans la gêne. Sous Mathias l'arriéré se montait à 12000 florins. De sorte que Keppler fut obligé d'accepter une chaire de professeur à Linz, où il resta jusqu'à 1626, mais toujours avec le titre d'astronome impérial. Vers ce temps, il obtint de l'empereur de se rendre à Ulm pour achever l'impression des *Tables Rudolphines*, suspendue pendant les troubles de la guerre de trente ans, dans Linz et dans les environs. Cette impression terminée en 1627, il demanda où il devait désormais résider. La chancellerie parut vouloir lui indiquer la ville de Mecklembourg (aujourd'hui village) dont on venait de faire la conquête, et même on lui assigna sur les revenus du duché de Mecklembourg de quoi toucher son arriéré; mais en ce temps Wallenstein, duc de Friedland, acheta, à deniers comptants, ce duché ainsi que le duché de Sagan en Silésie, et l'empereur lui en accorda l'investiture en 1628. Keppler, protestant, ne se croyait pas très en sûreté dans les États héréditaires de l'Autriche; il préféra donc se rendre dans les domaines de Wallenstein; mais choisit en 1628 pour résidence la ville de Sagan, où le duc tenait sa cour. On sait que ce personnage avait une confiance servile et stupide dans les prédictions astrologiques qui n'ont pas peu contribué à sa perte. Or, il avait à son service l'astrologue Zeno; mais Keppler n'a jamais cessé d'être au service de l'empereur. C'est ce que montre un document que le docteur Michael, professeur au gymnase de Sagan, vient de trouver en 1858 dans les archives de cette ville. C'est un ordre que donne le duc à Graben de Recheren, son capitaine-gouverneur du duché de Sagan, de permettre à Keppler, *mathématicien de S. M. Impériale*, d'habiter Sagan. Voici la traduction *littérale* de ce document :

« Noble et cher serviteur, par ce présent vous faisons
» connaître que *le mathématicien de S. M. Impériale*,

» le très-honorable, éminentissime savant Johan Kepple-
» rus désire habiter notre ville de Sagan; ce que nous lui
» accordons, parce que c'est un homme qualifié et très-
» expert en mathématique et en astronomie; c'est pour
» cela que nous vous donnons ordre non-seulement de
» lui procurer un logement commode et à un prix mo-
» déré, mais aussi de lui prêter aide en toute occasion,
» et qu'il vous soit intimement recommandé. Votre af-
» fectionné avec grâces princières.

(*Suit le paraphe du duc.*)

» Donné à Prague, le 26 avril 1628. »

Voici donc maintenant authentiquement établi que jamais Keppler n'était astrologue de Wallenstein; il est vrai que le duc lui payait une solde, mais en quelque sorte à titre de restitution. Voici le motif. L'empereur avait donné un écrit à Keppler par lequel les villes impériales de Kempten, Nuremberg, Memmingen devaient lui fournir 6000 florins pour les frais d'impression des Tables Rudolphines. Nuremberg était taxé à 4000 florins; mais Wallenstein s'opposa au payement. De sorte qu'il voulut réparer cette opposition en accordant une subvention.

Venons à l'astrologie. Dans ses Tables on lit :

« L'astrologie n'est pas digne qu'on y perde son temps;
» mais les gens ont l'opinion chimérique qu'elle convient
» à un mathématicien. »

Interrogé pourquoi la publication des Tables Rudolphines souffrait tant de retard, il répond :

« C'est pour ménager l'honneur de l'empereur, car
» tous ses ordres de payement me laisseraient mourir de
» faim; j'écrivis donc forcément de misérables calen-
» driers avec des pronostics; cela vaut mieux que de
» mendier. »

Et ensuite :

« Les chambellans me laissent dans l'embarras, l'as-
» tronomie est obligée de chercher protection chez la
» prostituée, sa prétendue sœur l'astrologie. Aussi mon
» éditeur s'attache à faire disparaître toutes mes pré-
» dictions. »

Les deux assertions dont il est question au commencement de cet article sont donc radicalement détruites. Ces deux taches dans la vie du grand homme sont complétement effacées. (*Astr. Nach.*, n° 1178, p. 19, t. L; 1859.)

M. Michael a fait cette communication à A. de Humboldt qui a chargé M. Bruhns, connu par sa comète périodique, d'en faire part aux *Astronomische Nachrichten.*

Tous les papiers de Keppler sont réunis à l'observatoire de Pulkova. M. Otto Struve vient de publier à Saint-Pétersbourg trois lettres de Wallenstein à Keppler. Elles confirment que l'astronome n'a jamais été au service du prince, mais il régnait entre eux une intimité fondée sur des motifs astrologiques. M. Struve rapporte même deux prédictions *in extenso*. On sait le cas que faisait Keppler de ces misères, seuls moyens qu'on lui laissait pour lutter contre la misère. On voit aussi par cette correspondance que le prince se doutait de la perfidie du roi de Hongrie devenu empereur sous le nom de Ferdinand III et fidèle à la politique autrichienne : *embrasser pour étouffer* (*).

Note. M. Le Bègue vient de confier aux presses de M. Mallet-Bachelier, hors ligne pour les sciences exactes, un Commentaire étendu sur les *Disquisitiones* avec les travaux subséquents de Gauss, Jacobi, Eisenstein, Dirichlet, etc. A paraître en 1862. M. le prince de Polignac se charge des frais d'impression.

(*) Wallenstein, Sobiesky, Napoléon Ier.

HISTORIQUE DE LA LOGOCYCLIQUE;

D'après M. Barnaba TORTOLINI.

Ann. di Mat. pura ed applicata, t. III, sept. et oct. 1860.

Voici la liste par ordre chronologique des ouvrages où l'on trouve soit des problèmes dont la solution mène à la construction de la logocyclique, soit l'équation de cette courbe.

1748. Maria-Gaetana Agnesi. *Istituzioni analitiche*, t. I, p. 378. Milano.

1757. Gregorius Casali. *Instituti Bononiensis Commentarii*, t. IV, p. 13. Bononiæ.

1765. Riccati et Saladini. *Institutiones analyticæ*, t. I, p. 328, problema nonum. Bononiæ.

1819. Quetelet. *Dissertatio de quibusdam locis geometricis nec non de curva focali*. Gand.

1823. Edmundos Kulp. *Hæssus*. Mannhemii.

1844. Midy. *Nouvelles Annales*, t. III, p. 293 (déduit du *folium* de Descartes).

1846. Montucci. *Nouvelles Annales*, t. V, p. 470 (sous le nom de *strophoïde*).

1858 et **1859.** Booth. *Quarterly Journal of Mathematics*, novembre 1858, n° 9, p. 38; mai 1859, n° 10, p. 127. London. M. Booth est le premier qui ait découvert les relations de cette courbe avec le cercle et la logarithmique et lui ait donné par cette raison le nom de *logocyclique*.

1860. ***Nouvelles Annales***, **t. XIX, p. 28.**

Le Mémoire de M. Tortolini renferme d'autres renseignements bibliographiques très-instructifs.

BIBLIOGRAPHIE.

JOURNAL FUR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK

(CRELLE-BORCHARDT, t. LIX, 2e cahier, 1861.)

(voir p. 41).

Géométrie.

JOACHIMSTHAL (p. 111-124). *Nombre de normales* réelles *abaissées d'un point donné sur un ellipsoïde.*

L'auteur résout la question à l'aide de ces trois lemmes, qu'il démontre.

Lemme I. α, β, γ, δ étant les racines d'une équation biquadratique ayant des racines réelles α et β, posons

$$\Delta = (\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2.$$

Si Δ est positif, les quatre racines sont réelles, et si Δ est négatif, il n'y a que deux racines réelles.

Si Δ est nul, l'équation a des racines multiples. Dans la question des normales, lorsque $\Delta = 0$, chaque point de la développée doit donner deux racines coïncidant; l'équation biquadratique de la développée doit renfermer Δ comme facteur, et M. Cauchy a prouvé que si l'on a l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0;$$

alors

$$a^6 \Delta = J^3 - 27 J_1^2,$$

$$J = ae - 6bd + 3c^2, \quad J_1 = ace - ad^2 - eb^2 - 2c^3 + 2bcd.$$

Lemme II.

$$U = 0, \quad U_1 = 0$$

étant les équations de deux coniques,

$$U + \lambda U_1 = 0$$

l'équation d'une conique passant par l'intersection des deux coniques, si l'on détermine λ de manière que cette dernière équation soit le produit de deux facteurs linéaires, λ depend d'une équation du troisième degré. *Connu.*

Lemme III. Soient

$$\varphi(u) = 0,$$

φ fonction entière de u; V une fonction de u telle, qu'on ait la relation

$$\varphi - V\varphi' + \varphi'' = 0;$$

a et b deux nombres quelconques et $a < b$; on suppose que dans cet intervalle V et φ'' restent *finis* et que φ ne change ni de signe ni ne devienne nul. Alors, 1° φ n'aura pas de racines multiples; 2° l'équation

$$\varphi(u) = 0$$

aura autant de racines réelles que la série $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$ présentera plus de changements de signes que la série $\varphi(b)$, $\varphi'(b)$, $\varphi''(b)$, ainsi au plus deux.

L'auteur applique ce lemme à une certaine équation du huitième degré et parvient à ce résultat final,

Soient F_1 la surface lieu des extrémités des plus grands rayons de courbure principaux; F_2 la surface lieu des extrémités des plus petits rayons de courbure principaux ; si le point donné est dans l'espace commun aux deux surfaces, on pourra mener six normales réelles; si le point est dans l'une de ces surfaces seulement, on ne pourra mener que quatre normales réelles, et s'il est hors des deux, il n'y a lieu qu'à des normales réelles.

Ce résultat est analogue à ce qui a lieu pour l'ellipse, selon la position du point d'où partent les normales relativement à la développée.

A. Clebsch (p. 125-145). *Sur les courbes du quatrième ordre.*

On sait que chaque courbe de degré n a $n - 1$ polaires (Bobillier) ; la première polaire du degré quatrième est de troisième degré et a deux invariants que nous désignerons par S et T; S est du quatrième et T du sixième degré. Nommons *déterminant polaire* la courbe que l'on obtient en égalant à zéro le déterminant d'une polaire; $S = 0$ est le lieu des pôles dont les déterminants polaires se réduisent à des triangles ; $T = 0$ est le lieu des pôles dont les polaires et les déterminants polaires ont cette relation de réciprocité, savoir les tangentes d'inflexion de l'une de ces courbes touchent l'autre courbe.

Posons

$$R = T^2 - S^3;$$

R sera du douzième degré, $R = 0$ est le lieu des pôles dont les polaires ont un *double* point; le lieu de ces doubles points du sixième degré passe par les points d'inflexion de la courbe du quatrième degré et est l'invariant de la seconde polaire.

Les trois courbes R, S, T jouent un rôle très-important dans les lignes du quatrième ordre, et, en se fondant sur ce principe évident que les *invariants* (*) de diverses polaires d'une courbe de degré n sont les covariants de cette dernière courbe, l'auteur établit les propriétés des polaires, points d'inflexion, de rebroussement, etc., que le savant géomètre Painvin fera connaître aux géomètres français.

SIEBECK, à Liegnitz (p. 173-184). *Sur une espèce de courbes du quatrième degré qui ont des relations avec les fonctions elliptiques.*

C'est la continuation d'un Mémoire inséré dans le t. LIII, p. 359, du Journal.

Étant donnée une conique, le lieu du point d'où l'on voit une conique sous le même angle ou sous son supplément est une de ces espèces de courbes.

Théorème I. Si un point se meut dans un plan de manière qu'une conique à centre donnée est vue de ce point sous un angle μ réel ou imaginaire, il existe encore une seconde conique vue de ce point sous un angle constant μ'; si la première conique est une ellipse, la seconde est une hyperbole, et *vice versâ;* les axes principaux coïncident, l'axe focal de l'une peut coïncider avec l'axe transverse de l'autre. Les quatre foyers réels et les quatre foyers imaginaires de deux coniques sont les foyers de l'orbite décrite par le point; e, e' étant les distances des foyers réels aux centres respectifs, on a

$$\frac{\operatorname{tang}^2\mu}{\operatorname{tang}^2\mu'} = \frac{e^2}{e'^2}.$$

(*) Bonne nouvelle! La *Théorie des Déterminants,* de Baltzer, si renommée pour sa didactique simplicité, vient de sortir des élégantes et fécondes presses Mallet-Bachelier, traduction Hoüel, fidélité garantie. Nous en parlerons prochainement.

Théorème II. Si un point se meut dans un plan de manière qu'une hyperbole équilatère donnée soit vue de ce point sous un angle constant, si cet angle est imaginaire, il existe sur l'axe focal deux points fixes tels, que le produit des distances du point mobile à ces deux points est constant; si cet angle est réel, les deux points fixes sont sur le second axe.

Théorème III. Si une droite se meut dans le plan d'une conique de telle sorte que le segment intercepté par la conique soit vu du centre sous un angle constant (réel ou imaginaire), il existe encore une seconde conique où le segment intercepté est vu sous un angle constant, les axes principaux des deux coniques coïncident, les pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une de ces coniques sur la droite mobile sont sur une courbe du quatrième degré de l'espèce mentionnée.

SUR L'ORTHOGRAPHE DU NOM DE CLAIRAUT;

Par un ANONYME.

Un article consacré à la dynastie Clairaut, page 49 du *Bulletin bibliographique,* se termine ainsi :

« Quelle est la vraie orthographe du nom? est-ce Clairaut ou Clairault? »

Nous avons sous les yeux les ouvrages suivants :

La 2e édition de la *Théorie de la Lune,* publiée chez Desaint. Paris, 1765. Elle contient une dédicace adressée au duc de Choiseul et un avertissement de l'auteur qui prouve qu'il a surveillé lui-même cette 2e édition.

La 3e édition des *Éléments d'Algèbre,* publiée chez Durand. Paris, 1760.

Une traduction allemande de ces Éléments, publiée chez Nicolaï. Berlin, 1752.

Une édition des *Éléments de Géométrie,* publiée chez Durand neveu. Paris, 1765. Elle contient une dédicace adressée au comte de Maurepas.

Dans chacun de ces quatre ouvrages le nom est écrit Clairaut.

Dans les Mémoires de l'abbé Morellet, ce même nom est toujours écrit Clairault. On trouve à la page 120 du Ier volume de ces Mémoires les passages suivants :

« M. de Montigny m'avait fait aussi connaître Clai-
» rault, chez qui nous dînions quelquefois avec une de-
» moiselle G... qui demeurait chez lui, parce que, en
» homme laborieux et appliqué, il voulait avoir sous la
» main toutes les choses dont il avait besoin.

. . . .

» Il lui avait enseigné assez de calcul pour qu'elle pût
» l'aider dans ses études astronomiques.

. . . .

» Je faisais des chansons pour le géomètre et sa so-
» ciété; je conserverai ici deux couplets, les seuls dont
» je me souvienne :

Clairault emporté dans les cieux,
Au plus haut de son apogée,
Est moins admirable à mes yeux
Qu'avec nous à son périgée;
Il ne perd rien de mes respects,
Lorsqu'en suivant ma théorie,
Il substitue à ses *y* grecs
Un moment de folie.

Parmi des mondes inconnus,
Quand il a fourni sa carrière,
On dit qu'il s'arrête à Vénus
Avant de descendre à la Terre.
Mais l'Amour y conduit ses pas
Au lieu de la chaste Uranie,
Et ce Dieu ne calcule pas
Les moments de folie.

Note du Rédacteur. Voltaire, dans l'Épître à madame du Chatelet qui précède sa tragédie d'*Alzire*, écrit (1736):

« L'esprit philosophique fait tant de progrès en France » depuis quarante ans, que si Boileau vivait encore, lui » qui osait se moquer d'une femme de condition parce » qu'elle voyait en secret Roberval et Sauveur, il se- » rait obligé de respecter et d'imiter celles qui pro- » fitent publiquement des lumières des Maupertuis, des » Réaumur, des Mairan, des du Fay et des Clairault. »

Il paraît que la vraie orthographe est Clairault avec la lettre *l*. Poggendorff écrit dans son Dictionnaire Clairault. Possède-t-on un autographe?

Si Voltaire vivait encore, que dirait-il de notre philosophie, de notre littérature?

AVIS.

Nous engageons les Professeurs qui veulent se délasser de la monotonie de l'enseignement rudimentaire à lire la *Notice sur les petites planètes* que vient de publier M. Lespiault, professeur à Bordeaux. Érudition germanique, élégance française, sublimité astronomique, tout est réuni dans cet opuscule instructif.

M. Burat, professeur provisoire au lycée Louis-le-Grand, a collaboré à cette attrayante production dont les hypothèses ne semblent pas être dénuées de probabilité. Un astronome attaché à l'Observatoire impérial veut bien en rendre compte.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME VII.)

Analyse algébrique.

Arithmétique; Arithmologie.

Analyse infinitésimale.

Géométrie élémentaire.

Géométrie de l'espace; Lignes et Surfaces.

Mécanique et Mécanique céleste.

Historique et Bibliographie.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des Collaborateurs sont précédés d'un astérisque.)

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.