

FLEURY

**Solution de la question : trouver la limite
vers laquelle tend le rapport du vide au plein
dans une pile de boulets, lorsque le nombre
des boulets augmente indéfiniment**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 9-11

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__9_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION :

Trouver la limite vers laquelle tend le rapport du vide au plein dans une pile de boulets, lorsque le nombre des boulets augmente indéfiniment ;

PAR M. FLEURY,
 Chef d'institution à Saint-Étienne.

Un boulet repose sur trois autres dans la pile triangulaire et sur quatre dans la pile quadrangulaire, ce qui pourrait faire croire que le rapport cherché ne sera pas le même dans les deux cas ; mais on peut remarquer que, dans l'un comme dans l'autre cas, chaque boulet de l'intérieur de la pile est en contact avec douze autres, et que les centres de ces douze boulets sont les sommets d'un polyèdre qui a pour faces six carrés et huit triangles équilatéraux. Le rapport du vide au plein dans un de ces polyèdres ne donne pas le résultat cherché, parce qu'on ne peut les juxtaposer sans laisser d'intervalles vides entre eux, tandis qu'on le peut très-bien pour les cubes formés en prolongeant jusqu'à leur rencontre les six faces carrées de chaque polyèdre. Je vais donc déterminer le rapport du vide au plein dans chacun de ces cubes.

En prenant pour unité le diamètre d'un boulet, l'arête du cube sera $\sqrt{2}$ et son volume $2\sqrt{2}$.

Le plein de ce cube se compose d'abord du boulet intérieur et ensuite du quart de chacun des douze boulets en contact avec lui ; car deux faces du cube passent par le centre de chacun de ces douze boulets : la première en retranche la moitié, et la seconde la moitié de l'autre moitié, en sorte qu'il ne reste dans le cube que le quart des douze boulets. On a donc trois boulets à ajouter au

boulet intérieur pour obtenir le volume du plein, qui se trouvera ainsi représenté par $\frac{2\pi}{3}$. Le rapport du cube à ce volume sera $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$, et celui du vide au plein $\frac{3\sqrt{2}}{\pi} - 1$, ce qui fait un peu plus de $\frac{1}{3}$.

Ce rapport sera la limite cherchée; car il ne pourrait être modifié que par la partie superficielle de la pile, qui est infiniment petite par rapport au volume total des cubes, quand le nombre des boulets devient infini.

La pyramide triangulaire ou quadrangulaire formée en joignant le centre d'un boulet qui repose sur trois ou quatre autres avec les centres de ceux-ci, est régulière et a toutes ses arêtes égales au diamètre d'un boulet. Le vide renfermé dans chacune de ces pyramides pourra se calculer en ôtant du volume de la pyramide celui de la partie occupée par les boulets. On observera ensuite que le nombre des vides de chacune de ces deux espèces est double du nombre de boulets, et cette considération conduira au résultat cherché, qui se déterminera exactement sans l'emploi des tables trigonométriques, en remarquant que dans la pyramide régulière à base carrée et à arêtes égales, les plus grands angles dièdres sont doubles des petits et suppléments de ceux du tétraèdre régulier.

Le moyen peut-être le plus expéditif, mais un peu détourné, d'arriver au résultat cherché, consiste à calculer, dans l'hypothèse d'un nombre infini de boulets, le rapport du volume d'une pile au volume des boulets qu'elle contient.

Je prends toujours pour unité le diamètre d'un boulet, et je désigne par n l'arête d'une pile triangulaire; $\frac{n^3\sqrt{2}}{12}$ en représente le volume et $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ le nom-

(11)

bre de boulets qu'elle renferme. L'hypothèse de n infini réduit cette dernière expression à $\frac{n^3}{6}$, par l'omission des termes qui s'effacent devant n^3 .

Le volume des boulets étant alors $\frac{\pi n^3}{36}$, le rapport de celui de la pile à ce dernier sera $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$, comme nous l'avons trouvé plus haut.