

CHARLES KESSLER

Solution de la question 488

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 80-83

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__80_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 488

(voir t. XVIII, p. 359);

PAR M. CHARLES KESSLER,

Élève du Prytanée Militaire.

On donne : 1^o une conique; 2^o deux tangentes fixes à cette conique; 3^o deux points fixes dans le plan de la conique; 4^o une tangente mobile rencontre les deux tangentes fixes en deux points variables formant avec les points fixes les sommets d'un quadrilatère variable; les diagonales de ce quadrilatère se coupent suivant des points situés sur une conique passant par les points fixes; et énoncer le théorème correspondant d'après le principe de dualité.

Solution. Je rapporte la conique aux deux tangentes fixes prises pour axes coordonnés; son équation sera

$$xy + \lambda (ax + by - 1)^2 = 0,$$

$ax + by - 1 = 0$ étant l'équation de la ligne des contacts.

Soient

$$A(x = \alpha, y = \beta), \quad C(x = \gamma, y = \delta),$$

les deux points fixes, O l'origine.

L'équation d'une tangente en un point (x', y') est

$$x[y' + 2a\lambda(ax' + by' - 1)] + y[x' + 2b\lambda(ax' + by' - 1)] - 2\lambda(ax' + by' - 1) = 0,$$

ou, en réduisant,

$$xy' + yx' + 2\lambda(ax' + by' - 1)(ax + by - 1) = 0.$$

Faisons successivement

$$x = 0, \quad y = 0$$

dans cette équation, nous aurons pour l'ordonnée et l'abscisse à l'origine

$$OB = \frac{2\lambda(ax' + by' - 1)}{x' + 2\lambda b(ax' + by' - 1)},$$

$$OD = \frac{2\lambda(ax' + by' - 1)}{y' + 2a\lambda(ax' + by' - 1)};$$

on aura donc, pour les équations de AB et de CD,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(AB)} \quad y - \frac{2\lambda(ax' + by' - 1)}{x' + 2\lambda b(ax' + by' - 1)} \\ \beta - \frac{2\lambda(ax' + by' - 1)}{x' + 2\lambda b(ax' + by' - 1)} \\ = \frac{\beta}{\alpha} x, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \text{(CD)} \quad y - \delta = \frac{-\delta}{\frac{2\lambda(ax' + by' - 1)}{y' + 2a\lambda(ax' + by' - 1)} - \gamma} (x - \gamma).$$

Éliminant x' et y' entre l'équation (1), (2) et l'équation

$$(3) \quad x' y' + \lambda(ax' + by' - 1)^2 = 0,$$

on obtient l'équation du lieu cherché.

De l'équation (3) on tire

$$y' = -\frac{\lambda(ax' + by' - 1)^2}{x'},$$

par suite, l'équation (2) se met sous la forme

$$y - \delta = \frac{\delta(x - \gamma) \left(2a - \frac{ax' + by' - 1}{x'} \right)}{2 - 2a\gamma + \gamma \left(\frac{ax' + by' - 1}{x'} \right)}, \quad *$$

d'où l'on tire

$$\frac{ax' + by' - 1}{x'} = \frac{2a(\gamma y - \delta x) - 2(y - \delta)}{\gamma y - \delta x}.$$

Or divisant certains termes de l'équation (1) haut et bas par $(ax' + by' - 1)$, on peut la mettre sous la forme

$$(\alpha y - \beta x) \frac{x'}{ax' + by' - 1} = 2\lambda(\alpha - x) + (\beta x - \alpha y) 2b\lambda,$$

et substituant la valeur de $\frac{x'}{ax' + by' - 1}$, on a

$$\begin{aligned} (\alpha y - \beta x)(\gamma y - \delta x) &= 4\alpha\lambda(\alpha - x)(\gamma y - \delta x) \\ &- 4\lambda(y - \delta)(\alpha - x) + 4ab\lambda(\beta x - \alpha y)(\gamma y - \delta x) \\ &- 4b\lambda(\beta x - \alpha y)(y - \delta), \end{aligned}$$

c'est l'équation du lieu : on voit facilement à son inspection que c'est une conique passant par les points fixes donnés.

Si maintenant je transforme cette propriété par la méthode des rayons vecteurs réciproques, j'aurai cette nouvelle proposition :

On donne une conique tangente à deux droites fixes, deux points fixes, un cercle tangent à cette conique et passant par le point de concours O des deux tangentes rencontre ces deux dernières en deux points. Par l'un de ces points, le sommet O et l'un des points fixes, je fais passer un cercle ; de même par l'autre point, le sommet O et l'autre point fixe : ces deux circonférences se rencontrent suivant une corde passant par O et dont l'autre extrémité est toujours sur une conique passant par les points fixes. On peut encore transformer cette proposition par la méthode des polaires réciproques.

Étant donnée une conique, une corde fixe AB et deux

droites fixes A' , B' dans le plan de la conique, on prend un point variable O dans ce plan, on joint OA qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre C avec A' , OB qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre D avec B' ; la droite CD est constamment tangente à une conique tangente aux deux droites A' , B' .

Il est facile de voir que c'est la réciproque de la question proposée.