

CHARLES KESSLER

Solution de la question 534

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 433-434

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__433_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 534

(voir p 248);

PAR M. CHARLES KESSLER.

THÉORÈME. Soient

$$y^m = F(x)$$

l'équation d'une courbe algébrique,

$$y - y_1 = F'(x_1)(x - x_1)$$

l'équation d'une tangente au point x_1, y_1 ; X, Y un point quelconque de cette tangente: $\frac{Y^m}{F(X)}$ est un maximum ou un minimum lorsque $Y = y_1, X = x_1$.

Démonstration. Je remarque que l'équation ci-dessus de la tangente à la courbe est inexacte; pour qu'il en fût autrement, il faudrait que l'équation de cette courbe parabolique fût $y = F(x)$: c'est du reste à cette dernière forme que je vais la ramener. Je pose

$$y = \sqrt[m]{F(x)} = f(x).$$

L'équation de la tangente est $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$, et je dis que $\frac{Y^m}{F(X)} = \left(\frac{Y}{f(X)}\right)^m$ ou $\frac{Y}{f(X)}$ est maximum ou minimum pour $X = x_1, Y = y_1$.

Ceci peut être considéré comme évident à priori, car pour tous les points de la courbe $\frac{y}{f(x)} = 1 = \text{constante}$, et par conséquent la dérivée est nulle: ce qui indique que tous les points de la courbe, et en particulier le point x_1, y_1 ,

jouissent de cette propriété qu'ils rendent maximum ou minimum la fonction précédente.

En voici du reste une autre démonstration, ou plutôt une extension. Le numérateur de la dérivée de $\frac{Y}{F(X)}$ est

$$Y'f(X) - Yf'(X),$$

ou, en remarquant qu'entre l'ordonnée et l'abscisse à l'origine, on a la relation

$$\frac{Y}{y_1 - x_1 f'(x_1)} = \frac{\frac{x_1 F'(x_1) - y_1 - X}{f'(x_1)}}{\frac{x_1 f'(x_1) - y_1}{f'(x_1)}}.$$

d'où

$$Y = X f'(x_1) - x_1 + y_1$$

$$f'(x_1) f(X) - X f'(x_1) f'(X) + x_1 f'(x_1) f'(X) - y_1 f'(X);$$

et comme

$$y_1 = f'(x_1),$$

on voit que cette expression est nulle pour $x = x_1, y = y_1$.
