

DEWULF

## **Solution de la question 522**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19  
(1860), p. 431-432

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_431\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__431_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 522

( voir p 195 );

PAR M. DEWULF.

Toutes les surfaces polaires d'un point d'une surface algébrique, prises par rapport à cette surface, ont même indicatrice en ce point ; les rayons de courbure des sections faites par un plan issu de ce point dans la surface et ses diverses polaires, sont en ce point inversement proportionnels aux degrés des surfaces diminués d'une unité. (TH. MOUTARD.)

Soit

$$u_0 t^n + u_1 t^{n-1} + u_2 t^{n-2} + \dots + u_n = 0$$

l'équation d'une surface :

$$\begin{aligned}
u_0 &= A, \\
u_1 &= B_1 x + B_2 y + B_3 z, \\
u_2 &= C_1 x^2 + C_2 y^2 + C_3 z^2 + C_4 xy + C_5 xz + C_6 yz. \\
\dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Prenant l'origine en un point de la surface, le plan tangent à la surface en ce point pour plan de  $xy$ , on a  $u_0 = 0, B_1 = 0, B_2 = 0$ , et l'équation de la surface devient

(1)  $U = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 0.$

Nous savons que l'équation de l'indicatrice en un point quelconque  $xyz$  d'une surface est

$$r(X - x)^2 + 2s(X - x)(Y - y) + t(Y - y)^2 = C;$$

posons  $x = 0, y = 0, z = 0$ , et cette équation devient

$$rX^2 + 2sXY + tY^2 = C;$$

or, en calculant  $r, s, t$ , on a :

$$(2) \quad C_1 X^2 + C_2 Y^2 + C_3 XY = CB_3.$$

La polaire d'ordre  $k$  de l'origine des coordonnées, par rapport à la surface (1), a pour équation

$$\begin{aligned} \frac{d^k U}{dt^k} &= A_1 u_1 + A_2 u_2 + \dots + A_{n-k} u_{n-k} = 0, \\ A_1 &= (n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-k), \\ A_2 &= (n-2)(n-3)\dots(n-k)(n-k-1), \end{aligned}$$

et l'équation de l'indicatrice à l'origine de cette surface est

$$(3) \quad C_1 X^2 + C_2 Y^2 + C_3 XY = CB_3 \frac{A_1}{A_2}.$$

Cette équation fait voir que l'indicatrice ne varie pas avec  $k$ , donne des courbes semblables, ce qui démontre la première partie du théorème. Quant à la seconde, elle résulte aussi immédiatement de l'équation (3). On sait que les rayons de courbure des sections normales passant par un point sont proportionnels aux demi-diamètres que ces sections déterminent dans l'indicatrice ; or ces demi-diamètres sont proportionnels à  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{n-1}{n-k-1} ct$ , par suite, inversement proportionnels à  $(n-k) - 1$ .

Le théorème de Meusnier étend ce que nous venons de dire aux sections obliques.