

ABEL TRANSON

**Sur la résolution numérique de deux
équations du second degré**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 414-418

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__414_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE DEUX ÉQUATIONS
DU SECOND DEGRÉ ;**

PAR M. ABEL TRANSON.

1. L'exposition de la méthode géométrique exigée par les programmes pour la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues présente, dans les Traités les meilleurs et les plus récents, soit d'*Algèbre*, soit de *Géométrie analytique*, une lacune qu'il m'a paru utile de signaler.

2. La résolution numérique de deux équations du second degré se ramène par l'élimination immédiate de l'une des inconnues à la résolution d'une équation du quatrième degré. Mais une autre méthode bien connue conduit, soit à résoudre deux équations du second degré après avoir calculé préalablement une quantité qui dépend elle-même d'une équation auxiliaire du troisième degré, soit à résoudre quatre équations du premier degré construites à l'aide de deux des racines de cette même équation auxiliaire.

3. Cette seconde méthode, interprétée géométrique-

ment, consiste à chercher un ou deux des trois couples de sécantes communes aux deux courbes du second ordre que représentent les équations proposées, parce qu'alors il ne reste plus qu'à calculer, soit les rencontres de l'une de ces courbes avec un système de deux lignes droites, soit les rencontres de deux tels systèmes entre eux.

4. A chaque racine de l'équation auxiliaire du troisième degré que fournit la méthode dont il s'agit, correspond un couple de sécantes communes, couple réel ou imaginaire. A une racine imaginaire correspond toujours un couple de sécantes imaginaires ; mais à une racine réelle ne correspond pas toujours un couple de sécantes réelles. Car il faut, pour que les sécantes existent effectivement, que la racine réelle qui leur correspond rende positive une certaine fonction des paramètres des équations proposées.

5. Lorsque les deux courbes du second degré se rencontrent en quatre points, les trois couples de sécantes communes sont nécessairement réels. Et comme l'existence de deux de ces couples entraîne forcément celle du troisième, on saura que cette circonstance de quatre rencontres a lieu si les trois racines de l'équation auxiliaire sont réelles, et si en même temps deux d'entre elles rendent positive la fonction dont nous venons de parler.

6. Quand les courbes ne se rencontrent pas en quatre points, elles se rencontrent en deux, ou bien elles ne se rencontrent pas du tout. Mais dans l'un comme dans l'autre de ces deux derniers cas, on sait a priori qu'il existe un couple de sécantes réelles, les deux autres étant imaginaires.

7. Dans cette circonstance d'un seul couple de sécantes réelles, comment vider la question de savoir s'il y a deux

rencontres, ou s'il n'y en a pas? On n'indique pas d'autre moyen que de chercher les intersections de chacune des sécantes réelles avec l'une des deux courbes proposées. De sorte que, si effectivement il n'y a pas de rencontres, on aura fait un calcul inutile. C'est ici que je crois pouvoir signaler une lacune.

8. En effet, deux cas distincts donnent lieu à l'existence d'un seul couple de sécantes réelles, savoir :

1°. Les trois racines de l'équation auxiliaire étant réelles, une seule rend positive la fonction dont il a été question précédemment;

2°. L'équation auxiliaire n'a qu'une seule racine réelle.

Or on peut démontrer que dans le premier cas il n'y a aucune rencontre, et qu'il y en a deux dans le second.

9. Pour démontrer ce théorème, j'observe d'abord que la nature des rencontres, et que par suite la nature et les propriétés des racines de l'équation auxiliaire sont indépendantes du choix des coordonnées; que, de plus, l'un des systèmes de sécantes communes est toujours réel; de sorte qu'on peut étudier la question en supposant les deux courbes rapportées à deux sécantes communes prises pour axes de coordonnées.

10. Les deux équations de ces courbes ne diffèrent alors que par un seul paramètre, et peuvent être discutées sous la forme suivante :

$$ay^2 + Bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

$$ay^2 + B_1xy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Leur combinaison est :

$$a(1 + \lambda)y^2 + (B + \lambda B_1)xy + c(1 + \lambda)x^2 + d(1 + \lambda)y + e(1 + \lambda)x + f(1 + \lambda) = 0.$$

(417)

Et l'équation auxiliaire, débarrassée du facteur $1 + \lambda$ qui, égalé à zéro, donne la racine réelle correspondante au système de sécantes prises pour axes de coordonnées, se trouve abaissée au second degré comme il suit :

$$(ac^2 + cd^2 - 4acf)(1 + \lambda)^2 \\ - de(B + \lambda B_1)(1 + \lambda) + f(B + \lambda B_1)^2 = 0.$$

D'ailleurs la réalité des deux racines de cette équation, se confondant avec la réalité du rapport $\frac{1 + \lambda}{B + \lambda B_1}$, entraîne une condition qui se transforme aisément dans la suivante :

$$(e^2 - 4cf)(d^2 - 4af) > 0.$$

Or les facteurs binômes $e^2 - 4cf$, et $d^2 - 4af$, sont respectivement ceux dont le signe décide la réalité des rencontres de chacun des axes de coordonnées avec les courbes proposées. Et par là on voit que, si les quatre rencontres sont imaginaires, les trois racines de l'équation auxiliaire sont réelles, et que si deux des rencontres seulement sont imaginaires, cette même équation n'a qu'une seule racine réelle.

11. Je termine par une simple réflexion. La méthode que je viens d'étudier est certainement intéressante et instructive; mais peut-elle être d'un grand secours dans la pratique des équations numériques? Je crois qu'il est permis d'en douter. En effet, l'équation auxiliaire du troisième degré pourra bien n'avoir aucune racine commensurable; même il pourra arriver que les deux sécantes qui correspondent à une racine commensurable de l'équation auxiliaire aient des équations à coefficients incommensurables. Et alors, si on a besoin de résoudre avec un degré d'approximation déterminé les deux équations

(418)

du second degré, ne vaudrait-il pas mieux s'en tenir à l'équation du quatrième degré fournie par l'élimination de l'une des inconnues?