

G. SALMON

**Sur le théorème Faure et courbes  
parallèles (voir page 234)**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19  
(1860), p. 345-349

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_345\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__345_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## SUR LE THÉORÈME FAURE ET COURBES PARALLÈLES

(voir page 234),

PAR LE RÉVÉREND G. SALMON.

---

*Note du Rédacteur.* Le raisonnement porte sur des formules du savant ministre ; ses ouvrages, d'un mérite hors rang, connus dans toute contrée civilisée, sont presque totalement inconnus en France.

Plusieurs éminents professeurs ont fait des traductions, mais qui ne trouvent pas d'éditeurs, et cela pour une raison commerciale très-naturelle. Désormais tout ouvrage qui ne porte pas pour enseigner *conforme* n'a qu'un minime nombre d'acquéreurs. Commerçant, voudriez-vous vous charger d'une marchandise qui n'a pas de chance de débit ? Par contre, les ouvrages de physique, de chimie, d'industrie, en général, tout ce qui peut enseigner à confectionner quelque objet matériel, *vendable*, jouissent d'une grande faveur en librairie.

Nous croyons donc nécessaires quelques explications : nous nous servirons de quelques expressions que nous avons déjà expliquées (t. XVIII, p. 249), et sur lesquelles nous ne reviendrons pas.

1°. Soient

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

les équations de trois côtés d'un triangle ;

$$L^2 + M^2 = N$$

représentera l'équation d'une conique. Le triangle est conjugué à la conique. En effet, on aura

$$L^2 = N^2 - M^2 = (N + M)(N - M);$$

les droites représentées par les équations

$$N + M = 0, \quad N - M = 0$$

touchent la conique, et

$$L = 0$$

est l'équation de la corde de contact. Mais l'intersection de ces tangentes est la même que celle des droites  $M, N$ ; donc ce point d'intersection est le pôle de la droite  $L$ ; on démontre que l'intersection de  $N$  et de  $L$  est le pôle de la droite  $M$ ; de même l'intersection de  $M$  et de  $L$  est le pôle de la droite  $N$ ; alors les deux tangentes  $N + L\sqrt{-1}$ ,  $N - L\sqrt{-1}$  sont imaginaires; c'est que ce pôle est situé dans l'intérieur de la conique.

La conique

$$aLM + bLN + cMN = 0$$

passé évidemment par les sommets du triangle conjugué.

2°. Soit

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy \\ = (a, b, c, d, e, f)(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une conique.

Représentons par  $\Delta$  son discriminant ou invariant principal; on a

$$\Delta = abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2.$$

Soit  $V = 0$  une seconde conique ayant pour coefficients  $a', b', c', d', e', f'$ , et soit  $\Delta'$  son discriminant,  $U + \lambda V = 0$ , où  $\lambda$  est une constante arbitraire, est l'équation d'une troisième conique passant par les quatre points d'intersection des deux premières coniques. Désignant par  $\Delta''$  le discriminant de cette troisième conique,

ordonnée suivant les puissances de  $\lambda$ , on a

$$\begin{aligned}\Delta'' &= \Delta + \lambda \Theta + \lambda^2 \Theta' + \lambda^3 \Delta', \\ \Theta &= \left( a' \frac{d}{da} + b' \frac{d}{db} + c' \frac{d}{dc} + d' \frac{d}{dd} + e' \frac{d}{de} + f' \frac{d}{df} \right) \Delta \\ &= a' (be - d^2) + b' (ca - e^2) + c' (ab - f^2) \\ &\quad + 2d' (ef - ad) + 2e' (fd - be + 2f' (de - cf)).\end{aligned}$$

On dérive de même  $\Theta'$  de  $\Delta'$ .

$\Theta$  et  $\Theta'$  sont deux invariants du système des deux coniques.

Si  $\Theta = 0$ , alors la conique V passe par les sommets d'un triangle conjugué à U.

Car, si cela a lieu, la conique U pourra se mettre, au moyen d'une transformation linéaire, sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \text{ (voir § 1),}$$

et la conique V sous la forme

$$2d'yz + 2e'zx + 2f'xy = 0,$$

et alors

$$a' = b' = c' = d = e = f = 0,$$

et  $\Theta = 0$  par cette transformation ; mais  $\Theta$  étant un *invariant* s'annule donc pour une transformation linéaire quelconque des deux équations U et V.

La même condition  $\Theta = 0$ , exprime que les côtés d'un triangle conjugué à V touchent U.

Voici maintenant la lettre du Révérend Salmon :

J'ai lu avec plaisir le beau théorème du capitaine Faure, n° 524, *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 234.

On le déduit très-facilement par la méthode que je donne *Lessons on higher Algebra*, p. 107. Qu'on forme le discriminant de

$$U + \lambda V.$$

Qu'il soit

$$\Delta + \lambda \Theta + \lambda^2 \Theta' + \lambda^3 \Delta'.$$

$\Theta = 0$  est la condition, ou que les sommets d'un triangle conjugué à U soient à la circonférence de V, ou bien que les côtés d'un triangle conjugué à V touchent U.

Formons donc le discriminant de

$$\left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \lambda [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2].$$

Nous trouvons

$$\Delta = -\frac{1}{a^2 b^2},$$

$$\Theta = \frac{1}{a^2 b^2} (\alpha^2 + \beta^2 - r^2 - a^2 - b^2),$$

$$\Theta' = \frac{\alpha^2 - r^2}{a^2} + \frac{\beta^2 - r^2}{b^2} - 1,$$

$$\Delta' = -r^2.$$

$\Theta = 0$  donne le théorème du capitaine Faure.

$\Theta' = 0$  est la relation entre les coordonnées du centre et le rayon d'un cercle inscrit à un triangle conjugué de l'ellipse.

Ainsi :

*On donne un triangle conjugué à une hyperbole équilatère : le centre du cercle inscrit au triangle est sur la circonférence de l'hyperbole.*

*On donne un triangle conjugué à une parabole, le centre du cercle circonscrit est sur la directrice. Etc., etc.*

Je remarque aussi que la méthode la plus facile de former l'équation de la courbe parallèle à une ellipse (c'est-à-dire la courbe dont la distance à l'ellipse mesurée sur les normales de l'ellipse est constante =  $r$ ) est comme suit :

Il est seulement nécessaire de former le discriminant de l'équation

$$\Delta + \lambda \Theta + \lambda^2 \Theta' + \lambda^3 \Delta' = \sigma,$$

où  $\Delta$ , etc., ont les valeurs données ci-dessus.

De même, on trouve l'équation de la surface parallèle à

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

en formant le discriminant en  $\lambda$  du discriminant de

$$\left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) + \lambda [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - r^2].$$

Ainsi on trouve l'équation de la surface parallèle, sous la forme,

$$S^2 = T^2.$$