

CUENOUD

## **Solution de la question 323 et annuités**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19  
(1860), p. 336-342

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_336\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__336_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION 525 ET ANNUITES**

(voir page 233),

PAR M. CUENOUD, DE LAUSANNE.

---

Une somme  $C$  placée à intérêts simples pendant  $n$  années, à  $i$  pour 100 par an, devient, au bout de ce temps

$$C \left( 1 + \frac{ni}{100} \right),$$

en sorte qu'une somme  $C$ , payable dans  $n$  années, vaut

actuellement

$$\frac{C}{1 + \frac{ni}{100}} \quad \text{ou} \quad \frac{100C}{100 + ni}$$

En appliquant le résultat ci-dessus aux diverses sommes mentionnées dans l'énoncé, on trouve que

$$\begin{array}{llll} \text{La somme } C_1, & \text{payable dans } n_1 \text{ ann.,} & \text{vaut actuel.} & \frac{100C_1}{100 + n_1i} \\ \text{» } C_2 & \text{» } n_2 & \text{»} & \frac{100C_2}{100 + n_2i} \\ \text{» } C_p & \text{» } n_p & \text{»} & \frac{100C_p}{100 + n_pi} \end{array}$$

En ajoutant ces divers nombres, et désignant leur somme par  $V$ , on a

$$V = 100 \left( \frac{C_1}{100 + n_1i} + \frac{C_2}{100 + n_2i} + \frac{C_3}{100 + n_3i} + \dots + \frac{C_p}{100 + n_pi} \right)$$

Cette somme  $V$  vaudra, dans  $t$  années,  $V \left( 1 + \frac{it}{100} \right)$ , et comme cette valeur doit être précisément égale à  $C_1 + C_2 + \dots + C_p$ , on aura

$$V \left( 1 + \frac{it}{100} \right) = C_1 + C_2 + \dots + C_p;$$

d'où

$$it = \frac{100}{V} (C_1 + C_2 + \dots + C_p - V),$$

ou

$$it = \frac{100}{V} \left[ \left( C_1 - \frac{100C_1}{100 + n_1i} \right) + \left( C_2 - \frac{100C_2}{100 + n_2i} \right) + \dots + \left( C_p - \frac{100C_p}{100 + n_pi} \right) \right],$$

ou

$$it = \frac{100}{V} \left( \frac{C_1 n_1 i}{100 + n_1 i} + \frac{C_2 n_2 i}{100 + n_2 i} + \dots + \frac{C_p n_p i}{100 + n_p i} \right),$$

ou enfin

$$(1) \quad t = \frac{100}{V} \left( \frac{n_1 C_1}{100 + n_1 i} + \frac{n_2 C_2}{100 + n_2 i} + \dots - \frac{n_p C_p}{100 + n_p i} \right) (*).$$

*Remarque.* On peut présenter le calcul d'une manière un peu différente, qui conduit à un autre résultat.

Désignons par  $k$  un nombre d'années plus grand que les nombres  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_p, t$ . Le créancier qui recevra la somme  $C_1$  dans  $n_1$  années pourra placer immédiatement cette somme, en sorte qu'à la fin de la  $k^{\text{ième}}$  année il pourra disposer d'une valeur

$$(a) \quad C_1 \left( 1 + \frac{(k - n_1)i}{100} \right).$$

S'il place de même la somme  $C_2$ , après l'avoir reçue, elle vaudra, à la fin de la  $k^{\text{ième}}$  année,

$$(b) \quad C_2 \left( 1 + \frac{(k - n_2)i}{100} \right),$$

et ainsi de suite. La dernière somme  $C_p$  vaudra également, à la fin de la  $k^{\text{ième}}$  année,

$$(l) \quad C_p \left( 1 + \frac{(k - n_p)i}{100} \right).$$

Afin que le créancier ne subisse ni gain ni perte en recevant la somme totale  $C_1 + C_2 + \dots + C_p$  au bout de  $t$  années, il faut qu'à la fin de la  $k^{\text{ième}}$  année cette somme totale ait la même valeur que la somme des nombres (a),

---

(\*) MM. V. Nadal, professeur à l'école de Sorèze, et Th. Vannier, de Bourg-la-Reine, donnent la même solution

( $b$ ), ..., ( $l$ ). On a donc

$$\begin{aligned} & (C_1 + C_2 + \dots + C_p) \left( 1 + \frac{(k-t)i}{100} \right) \\ &= C_1 \left( 1 + \frac{(k-n_1)t}{100} \right) + C_2 \left( 1 + \frac{(k-n_2)t}{100} \right) + \dots \\ &+ C_p \left( 1 + \frac{(k-n_p)t}{100} \right), \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$(C_1 + C_2 + \dots + C_p)t = C_1 n_1 + C_2 n_2 + \dots + C_p n_p;$$

d'où

$$(2) \quad t = \frac{C_1 n_1 + C_2 n_2 + \dots + C_p n_p}{C_1 + C_2 + \dots + C_p}.$$

Telle est la formule que l'on emploie dans le commerce pour la recherche de l'*échéance commune* de plusieurs billets. Le résultat qu'elle fournit diffère assez peu de celui que donne la formule (1). Du reste, l'une et l'autre sont vraies, suivant le point de vue auquel on se place : la formule (1) est celle qu'établirait le débiteur, tandis que la formule (2) est celle que doit trouver le créancier. En effet, le débiteur cherche quelle est la somme qu'il doit placer actuellement pour obtenir  $C_1$  dans  $n_1$  années, ou pour obtenir  $C_2$  dans  $n_2$  années, etc. Il ne dispose donc que des valeurs actuelles, plus petites que les nombres  $C_1, C_2$ , etc., et ce sont les intérêts que peuvent rapporter ces valeurs actuelles qu'il doit chercher à équilibrer pour établir l'équation en  $t$ . Le créancier, au contraire, pourra disposer des sommes  $C_1, C_2, \dots, C_p$ , et ce sont les intérêts de ces sommes qui doivent donc entrer dans l'équation. Les deux résultats doivent donc être différents, et aucun ne peut avoir la prétention d'être plus exact que l'autre. Si la formule (2) est toujours employée dans le commerce,

elle le doit à sa plus grande simplicité et au peu de différence qu'elle présente avec la formule (1). Il y a ici une différence analogue à celle qui existe entre l'escompte en dedans et l'escompte en dehors.

De reste, les deux formules sont identiquement de la même forme, comme on peut s'en assurer en remplaçant dans (1)  $V$  par sa valeur; elles sont toutes deux l'application du théorème des *moments*, l'une pour les valeurs actuelles, l'autre pour les valeurs à l'échéance. En désignant par  $C_a$  la valeur actuelle d'une somme  $C$  payable dans  $n$  années, les formules (1) et (2) peuvent se mettre sous la forme

$$(1) \quad t = \frac{\sum n C_a}{\sum C_a}.$$

$$(2) \quad t = \frac{\sum n C}{\sum C}.$$

*Annuités.* Voici maintenant un calcul assez intéressant relatif aux annuités. On trouve, dans tous les ouvrages d'algèbre, que pour rembourser en  $n$  années une somme  $C$ , il faut payer annuellement une somme

$$a = \frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

$r$  désignant l'intérêt annuel de 1 fr.

Pour appliquer cette formule au cas d'un emprunt contracté par *obligations*, je désignerai par  $m$  le nombre total d'obligations et par  $s$  la valeur de chacune d'elles; j'aurai alors

$$C = ms,$$

et, par suite,

$$a = \frac{msr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Je me propose de chercher combien d'obligations

( 341 )

peuvent être remboursées la 1<sup>re</sup>, la 2<sup>e</sup>, la 3<sup>e</sup>, ..., la *p*<sup>ème</sup> année.

La 1<sup>re</sup> année, il faut prendre sur la somme *a* l'intérêt de la somme *ms*, qui est *msr*, en sorte qu'il reste pour le service de l'amortissement une somme de

$$a - msr = \frac{msr}{(1+r)^n - 1}.$$

Le nombre *x*<sub>1</sub> d'obligations que l'on peut rembourser la 1<sup>re</sup> année s'obtient en divisant le résultat précédent par la valeur *s* d'une obligation; j'ai donc

$$x_1 = \frac{mr}{(1+r)^n - 1}.$$

Le nombre *x*<sub>2</sub> d'obligations que l'on peut rembourser la 2<sup>e</sup> année se compose du nombre *x*<sub>1</sub> remboursé la 1<sup>re</sup> année, augmenté du nombre d'obligations que peut donner l'intérêt de ces *x*<sub>1</sub> obligations, intérêt qu'il n'est plus nécessaire de payer la 2<sup>e</sup> année. J'ai donc

$$x_2 = x_1 + x_1 r = x_1 (1+r) = \frac{mr(1+r)}{(1+r)^n - 1}.$$

Le même raisonnement montrerait que le nombre *x*<sub>3</sub> d'obligations remboursables la 3<sup>e</sup> année serait

$$x_3 = x_2 (1+r) = \frac{mr(1+r)^2}{(1+r)^n - 1}.$$

En général, le nombre d'obligations à rembourser la *p*<sup>ème</sup> année serait

$$x_p = \frac{mr(1+r)^{p-1}}{(1+r)^n - 1}.$$

Le nombre d'obligations qui se trouveront remboursées à

la fin de la  $p^{\text{ième}}$  année sera

$$\frac{mr}{(1+r)^n - 1} + \frac{mr(1+r)}{(1+r)^n - 1} + \frac{mr(1+r)^2}{(1+r)^n - 1} + \dots + \frac{mr(1+r)^{p-1}}{(1+r)^n - 1},$$

soit

$$\frac{mr}{(1+r)^n - 1} [1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{p-1}],$$

ou

$$\frac{mr}{(1+r)^n - 1} \times \frac{(1+r)^p - 1}{r} = \frac{m[(1+r)^p - 1]}{(1+r)^n - 1}.$$

Cette formule montre immédiatement que le nombre d'obligations qui seront remboursées à la fin de la  $n^{\text{ième}}$  année est  $m$ .

Le nombre  $y_p$  d'obligations qu'il reste à rembourser à la fin de la  $p^{\text{ième}}$  année est

$$\begin{aligned} y_p &= m - \frac{m[(1+r)^p - 1]}{(1+r)^n - 1} = \frac{m[(1+r)^n - (1+r)^p]}{(1+r)^n - 1} \\ &= m(1+r)^p \times \frac{(1+r)^{n-p} - 1}{(1+r)^n - 1}. \end{aligned}$$

**Remarque.** Ces résultats ne sont pas entièrement nouveaux, mais ils sont peu connus. M. Boudsot est arrivé aux mêmes formules dans un travail fort intéressant qu'il a publié dans les Mémoires de la Société d'émulation du Doubs (1857), mais en suivant une marche différente : j'ai cru utile de vous communiquer ce petit calcul.

**Note du Rédacteur.** Dans les entreprises industrielles, le nombre annuel d'obligations à rembourser dépend aussi des bénéfices ou pertes.