

PAINVIN

**Propriétés des tétraèdres conjugués dans
les surfaces du second degré et solution
de la question 524 (Faure)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 290-298

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__290_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**PROPRIÉTÉS DES TÉTRAÈDRES CONJUGUÉS DANS LES
SURFACES DU SECOND DEGRÉ**

et solution de la question 524 (Faure);

PAR M. PAINVIN,
Professeur.

1. Un tétraèdre est dit *conjugué* lorsque chacun de ses sommets est le pôle du plan qui passe par les trois autres.

Je désignerai par M_1, M_2, M_3, M_4 les quatre sommets d'un semblable tétraèdre, et par $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4)$ leurs coordonnées respectives.

1°. *Surfaces à centre.*

2. Prenons, par exemple, l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Posons

$$(1) \quad D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \quad \text{où} \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1,$$

et

$$(2) \quad D_r = \frac{dD}{da_r}.$$

Si l'on se rappelle que l'équation d'un plan passant par les trois points M_2, M_3, M_4 peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

qu'on identifie cette équation avec celle du plan polaire

du point M_1 , savoir :

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1,$$

et qu'on opère de la même manière pour les quatre sommets M_1, M_2, M_3, M_4 , on obtient les douze relations suivantes

$$(3) \quad D_r x_r = -a^2 \frac{dD}{dx_r}, \quad D_r y_r = -b^2 \frac{dD}{dy_r}, \quad D_r z_r = -c^2 \frac{dD}{dz_r},$$

où

$$r = 1, 2, 3, 4.$$

Remarquons tout de suite que D est égal à six fois le volume du tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$; D_1 à six fois le volume du tétraèdre $OM_2 M_3 M_4$; D_2 à six fois le volume de $OM_3 M_4 M_1$, etc.; O est le centre de l'ellipsoïde.

3. Les formules bien connues du développement d'un déterminant au moyen de ses déterminants dérivés, appliquées au déterminant D , en ayant égard aux relations (3), nous conduisent aux égalités suivantes :

$$(4) \quad D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = D;$$

$$(5) \quad \begin{cases} D_1 x_1^2 + D_2 x_2^2 + D_3 x_3^2 + D_4 x_4^2 + a^2 D = 0, \\ D_1 y_1^2 + D_2 y_2^2 + D_3 y_3^2 + D_4 y_4^2 + b^2 D = 0, \\ D_1 z_1^2 + D_2 z_2^2 + D_3 z_3^2 + D_4 z_4^2 + c^2 D = 0; \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} D x_1 y_1 + D_2 x_2 y_2 + D_3 x_3 y_3 + D_4 x_4 y_4 = 0, \\ D_1 x_1 z_1 + D_2 x_2 z_2 + D_3 x_3 z_3 + D_4 x_4 z_4 = 0, \\ D_1 y_1 z_1 + D_2 y_2 z_2 + D_3 y_3 z_3 + D_4 y_4 z_4 = 0; \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{x_r^2}{a^2} + \frac{y_r^2}{b^2} + \frac{z_r^2}{c^2} - 1 = -\frac{D}{D_r}, \\ r = 1, 2, 3, 4; \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{x_r x_s}{a^2} + \frac{y_r y_s}{b^2} + \frac{z_r z_s}{c^2} = 1, \\ r, s = 1, 2, 3, 4; \quad r \geq s. \end{cases}$$

Les six dernières relations (8) sont suffisantes pour exprimer que le tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$ est conjugué; car elles indiquent que le plan polaire d'un quelconque de ses sommets passe par les trois autres.

4. Cherchons maintenant l'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre en question. Si,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0$$

étant l'équation de cette sphère, on exprime qu'elle passe par les quatre sommets, l'élimination de m, n, p, q entre les cinq équations obtenues nous donnera pour l'équation de la sphère circonscrite

$$(9) \quad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & 2x & 2y & 2z & 1 \\ r_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 1 \\ r_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & 1 \\ r_3^2 & 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 & 1 \\ r_4^2 & 2x_4 & 2y_4 & 2z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

on a posé

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^2 = \overline{OM_i}^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \\ i = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right.$$

On voit facilement qu'en représentant par X, Y, Z les coordonnées du centre de la sphère et par L^2 le carré de la tangente menée de l'origine à cette sphère, on a les relations suivantes :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2DX = r_1^2 \frac{dD}{dx_1} + r_2^2 \frac{dD}{dx_2} + r_3^2 \frac{dD}{dx_3} + r_4^2 \frac{dD}{dx_4}, \\ 2DY = r_1^2 \frac{dD}{dy_1} + r_2^2 \frac{dD}{dy_2} + r_3^2 \frac{dD}{dy_3} + r_4^2 \frac{dD}{dy_4}, \\ 2DZ = r_1^2 \frac{dD}{dz_1} + r_2^2 \frac{dD}{dz_2} + r_3^2 \frac{dD}{dz_3} + r_4^2 \frac{dD}{dz_4}, \\ -DL^2 = r_1^2 D_1 + r_2^2 D_2 + r_3^2 D_3 + r_4^2 D_4. \end{array} \right.$$

5. Les formules que je viens d'établir permettent de constater de nombreuses propriétés relatives aux tétraèdres conjugués. Je signalerai les suivantes.

Les égalités (5), ajoutées membre à membre, donnent
 (12) $D_1 r_1^2 + D_2 r_2^2 + D_3 r_3^2 + D_4 r_4^2 + D(a^2 + b^2 + c^2) = 0$.

D'où

THÉORÈME I. *Désignant par V le volume d'un tétraèdre conjugué $M_1 M_2 M_3 M_4$, par V_1 celui de $OM_2 M_3 M_4$, par V_2 celui de $OM_3 M_4 M_1$, etc., on aura entre ces volumes la relation constante*

$$V(a^2 + b^2 + c^2) = V_1 \cdot \overline{OM_1}^2 + V_2 \cdot \overline{OM_2}^2 + V_3 \cdot \overline{OM_3}^2 + V_4 \cdot \overline{OM_4}^2.$$

Les volumes V_1, V_2, V_3, V_4 doivent être affectés d'un signe tel, que leur somme soit égale $V(4)$; O est le centre de l'ellipsoïde.

6. Le déterminant D peut s'écrire des deux manières suivantes :

$$D = abc \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{x_2}{a} & \frac{x_3}{a} & \frac{x_4}{a} \\ \frac{y_1}{b} & \frac{y_2}{b} & \frac{y_3}{b} & \frac{y_4}{b} \\ \frac{z_1}{c} & \frac{z_2}{c} & \frac{z_3}{c} & \frac{z_4}{c} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-D = abc \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{x_2}{a} & \frac{x_3}{a} & \frac{x_4}{a} \\ \frac{y_1}{b} & \frac{y_2}{b} & \frac{y_3}{b} & \frac{y_4}{b} \\ \frac{z_1}{c} & \frac{z_2}{c} & \frac{z_3}{c} & \frac{z_4}{c} \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Effectuons par colonnes la multiplication de ces deux dé-

terminants ; en faisant intervenir les relations (7) et (8), on trouve

$$-D^2 = a^2 b^2 c^2 \frac{D'}{D_1 D_2 D_3 D_4}.$$

On en conclut que

THÉORÈME II. *Entre les volumes V, V_1, V_2, V_3, V_4 et le tétraèdre construit sur les axes de l'ellipsoïde, on a la relation constante*

$$\frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^2} = \left(\frac{abc}{6} \right)^2.$$

7. Eu égard à la relation (12), la dernière des égalités (11) nous donne

$$(13) \quad L^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

d'où

THÉORÈME III. *Le carré de la tangente menée du centre de l'ellipsoïde à la sphère circonscrite à un tétraèdre conjugué quelconque est constante et égale à*

$$(a^2 + b^2 + c^2).$$

C'est la généralisation du beau théorème énoncé par M. Faure sur les coniques (p. 234) (*).

8. Si l'on multiplie les égalités (11) par $x_i, y_i, z_i, 1$, respectivement, et qu'on ajoute les résultats, on obtient les quatre relations suivantes :

$$(14) \quad \begin{cases} 2(Xx_i + Yy_i + Zz_i) = r_i^2 + a^2 + b^2 + c^2, \\ i = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

D'où

THÉORÈME IV. *Si l'on se donne un point fixe, M_4 par exemple, les centres des sphères circonscrites aux tétraè-*

(*) Origine de tout ce travail. 1 m.

dres conjugués en nombre infini, ayant un de leurs sommets au point fixe, seront constamment dans un plan perpendiculaire à \overline{OM}_4 et à une distance de l'origine égale à

$$\frac{\overline{OM}_4^2 + a^2 + b^2 + c^2}{2\overline{OM}_4}.$$

2°. Surfaces dénuées de centre.

9. Prenons, par exemple, le paraboloidé elliptique

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0.$$

Conservant toujours les notations (1), (2), les conditions qui expriment que le tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$ est conjugué pourront s'écrire

$$(15) \left(D_r = x_r \frac{dD}{dx_r}, \quad \frac{dD}{dy_r} = -\frac{y_r}{p} \frac{dD}{dx_r}, \quad \frac{dD}{dz_r} = -\frac{z_r}{q} \frac{dD}{dx_r} \right),$$

où

$$r = 1, 2, 3, 4.$$

Remarquons encore que $\frac{dD}{dx_1}, \frac{dD}{dx_2}, \frac{dD}{dx_3}, \frac{dD}{dx_4}$ représentent le double de la projection sur le plan des xy des triangles $M_2 M_3 M_4, M_3 M_4 M_1, M_4 M_1 M_2, M_1 M_2 M_3$.

10. Les formules relatives aux déterminants, combinées avec les relations (15), nous donneront ici

$$(16) \quad \frac{dD}{dx_1} + \frac{dD}{dx_2} + \frac{dD}{dx_3} + \frac{dD}{dx_4} = 0;$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 \frac{dD}{dx_1} + x_2^2 \frac{dD}{dx_2} + x_3^2 \frac{dD}{dx_3} + x_4^2 \frac{dD}{dx_4} = 0, \\ y_1^2 \frac{dD}{dy_1} + y_2^2 \frac{dD}{dy_2} + y_3^2 \frac{dD}{dy_3} + y_4^2 \frac{dD}{dy_4} + pD = 0, \\ z_1^2 \frac{dD}{dz_1} + z_2^2 \frac{dD}{dz_2} + z_3^2 \frac{dD}{dz_3} + z_4^2 \frac{dD}{dz_4} + qD = 0; \end{array} \right.$$

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} x_1 y_1 \frac{dD}{dx_1} + x_2 y_2 \frac{dD}{dx_2} + x_3 y_3 \frac{dD}{dx_3} + x_4 y_4 \frac{dD}{dx_4} = 0, \\ x_1 z_1 \frac{dD}{dx_1} + x_2 z_2 \frac{dD}{dx_2} + x_3 z_3 \frac{dD}{dx_3} + x_4 z_4 \frac{dD}{dx_4} = 0, \\ y_1 z_1 \frac{dD}{dx_1} + y_2 z_2 \frac{dD}{dx_2} + y_3 z_3 \frac{dD}{dx_3} + y_4 z_4 \frac{dD}{dx_4} = 0; \end{array} \right.$$

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} 2x_r - \frac{y_r^2}{p} - \frac{z_r^2}{q} = \frac{D}{\frac{dD}{dx}}, \\ r = 1, 2, 3, 4; \end{array} \right.$$

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} (x_r + x_s) - \frac{y_r y_s}{p} - \frac{z_r z_s}{q} = 0, \\ r, s = 1, 2, 3, 4; \quad r \geq s. \end{array} \right.$$

11. Les égalités (17), ajoutées membre à membre, conduisent à

$$(21) \quad r_1^2 \frac{dD}{dx_1} + r_2^2 \frac{dD}{dx_2} + r_3^2 \frac{dD}{dx_3} + r_4^2 \frac{dD}{dx_4} + (p + q) D = 0.$$

D'où

THÉOREME V. Désignant par V le volume d'un tétraèdre conjugué $M_1 M_2 M_3 M_4$, par S_1, S_2, S_3, S_4 les projections, sur le plan des yz , des faces $M_2 M_3 M_4, M_3 M_4 M_1, M_4 M_1 M_2, M_1 M_2 M_3$, on a entre ces quantités la relation constante

$$3(p + q)V + S_1 \cdot \overline{OM_1}^2 + S_2 \cdot \overline{OM_2}^2 + S_3 \cdot \overline{OM_3}^2 + S_4 \cdot \overline{OM_4}^2 = 0.$$

Les surfaces S_1, S_2, S_3, S_4 doivent être affectées de signes tels, que leur somme soit nulle (16).

12. Le déterminant D peut encore s'écrire sous les

deux formes suivantes :

$$D = \sqrt{pq} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{y_1}{\sqrt{p}} & \frac{y_2}{\sqrt{p}} & \frac{y_3}{\sqrt{p}} & \frac{y_4}{\sqrt{p}} \\ \frac{z_1}{\sqrt{q}} & \frac{z_2}{\sqrt{q}} & \frac{z_3}{\sqrt{q}} & \frac{z_4}{\sqrt{q}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-D = \sqrt{pq} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{-y_1}{\sqrt{p}} & \frac{-y_2}{\sqrt{p}} & \frac{-y_3}{\sqrt{p}} & \frac{-y_4}{\sqrt{p}} \\ \frac{-z_1}{\sqrt{q}} & \frac{-z_2}{\sqrt{q}} & \frac{-z_3}{\sqrt{q}} & \frac{-z_4}{\sqrt{q}} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

Effectuant, par colonnes, la multiplication de ces deux déterminants et faisant intervenir les relations (19) et (20), on trouve

$$-D' = pq \frac{D'}{\frac{dD}{dx_1} \cdot \frac{dD}{dx_2} \cdot \frac{dD}{dx_3} \cdot \frac{dD}{dx_4}}$$

On en conclut que

THÉORÈME VI. *Entre le volume V et les surfaces S₁, S₂, S₃, S₄, on a la relation constante*

$$\frac{S_1 S_2 S_3 S_4}{V^2} = \frac{9}{4} pq.$$

13. La première des relations (11) comparée avec la relation (21) nous donne

$$(22) \quad X = -\frac{p+q}{2}.$$

D'où

THÉORÈME VII. *Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre conjugué quelconque est constamment dans un plan perpendiculaire à l'axe de la surface et à une distance du sommet égale à*

$$-\left(\frac{p+q}{2}\right).$$