PROUHET

Note sur l’article précédent

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 19 (1860), p. 281-283

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__281_1>

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

PAR M. PROUHET,
Professeur.

Les limites les plus approchées du produit $1.2.3\ldots n$ sont fournies par la série de Stirling, dont M. A. Serret vient de donner une belle démonstration, complétée par M. Bonnet (*); cependant des limites moins approchées, mais plus simples comme celle de M. Schlomilch, peuvent être utiles dans des recherches particulières. En voici deux qui se prêtent à une démonstration tout à fait élémentaire.

1°. Lorsque n est supérieur à 5, on a

$$1.2.3\ldots n < \left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

ou

$$\frac{1.2.3\ldots n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n} < 1.$$

Représentons le premier membre de cette inégalité par x_n. On aura

$$x_n = \frac{1.2.3\ldots n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. L (1860), p. 662 et 862.

et

$$x_{n+1} = \frac{1.2.3\ldots n(n+1)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n},$$

et par suite

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Le second membre est égal à 1 pour $n = 1$, et diminue quand n augmente; donc $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ est toujours moindre que 1. Ainsi les fonctions désignées par x_n vont en diminuant. Or déjà x_5 est moindre que 1, donc x_n sera moindre que 1 lorsque n sera plus grand que 5 : ce qu'il fallait démontrer.

2°. Quand n est > 5, on a

$$1.2.3\ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

e désignant la base des logarithmes népériens.

En effet, en posant

$$x_n = \frac{1.2.3\ldots n}{5\left(\frac{n}{e}\right)^n},$$

on trouvera, comme dans le cas précédent,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Le second membre est toujours plus grand que 1. Donc x_n augmente avec n. Mais pour $n = 5$, on trouve $x_5 > 1$. Donc, etc.

En suivant la même marche, on pourrait trouver des valeurs plus approchées, pour $n > 6, 7, 8$, etc. Mais ces limites finissent toujours par être en dehors des suivantes

$$1 . 2 . 3 \ldots n > \sqrt{2\pi} . n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

$$1 . 2 . 3 \ldots n < \sqrt{2\pi} . n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}},$$

qui résultent d'une formule donnée par M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. IV, p. 321).