

**Théorème d'inégalité sur un produit continu
; d'après M. le Dr Schlomilch**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 280-281

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__280_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME D'INÉGALITÉ SUR UN PRODUIT CONTINU;
D'APRÈS M. LE D^r SCHLOMILCH.

THÉORÈME. $1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots n^2 > n^n$.

Démonstration. On a l'inégalité

$$ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b},$$

lorsque $a > b > 0$.

Faisant

$$b = m, \quad a = m + 1,$$

il vient

$$m(m+1)^{m-1} > (m+1)^m - m^m,$$

$$m^m > (m+1)^{m-1} \text{ (excepté pour } m = 1),$$

$$m^m(m+1)^2 > (m+1)^{m+1},$$

$$(m+1)^2 > \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}.$$

Faisant successivement m égal à $1, 2, 3, \dots, n-1$, et multipliant ces inégalités, on obtient

$$1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots n^2 > n^n.$$

Corollaire. La série

$$S_n = \frac{\log 1}{n+1} + \frac{\log 2}{n+2} + \dots + \frac{\log n}{n+n}$$

devient infinie lorsque $n = \infty$.

En effet

$$S_n > \frac{\log 1 + \log 2 + \dots + \log n}{2n},$$

$$S_n > \frac{\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)}{2n}.$$

(281)

Or $2 \log 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n > n \log n$ (*voir ci-dessus*), donc

$$S_n > \frac{\log n}{4},$$

donc, etc.
