

DESBOVES

**Lieu des pôles des cordes qui dans les courbes du second degré joignent les pieds des normales à ces courbes menées d'un point de la développée. Théorèmes**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 19 (1860), p. 253-269

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1860\\_1\\_19\\_\\_253\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__253_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---



---

**LIEU DES POLES DES CORDES**

qui dans les courbes du second degré joignent les pieds des normales à ces courbes menées d'un point de la développée. — Théorèmes ;

PAR M. DESBOVES.

---

*Ellipse.* Rappelons d'abord les formules de la page 51

$$(1) \quad y = \frac{c^2 \beta (\alpha^2 - a^2)}{a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2}, \quad x = \frac{c^2 \alpha (b^2 - \beta^2)}{a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2} (*).$$

$a, b, c$  ont leur signification ordinaire dans les coniques à centre,  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coordonnées du pôle d'une corde quelconque de l'ellipse, et  $x$  et  $y$  celles du point d'intersection des normales menées par les extrémités de la corde.

On aura immédiatement l'équation du lieu demandé, en remplaçant, dans l'équation de la développée de l'ellipse

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

$x$  et  $y$  par les valeurs que donnent les formules (1). On obtient ainsi pour équation du lieu

$$(2) \quad \frac{[a\alpha(b^2 - \beta^2)]^{\frac{2}{3}}}{[a^2\beta^2 + b^2\alpha^2]^{\frac{2}{3}}} + \frac{[b\beta(\alpha^2 - a^2)]^{\frac{2}{3}}}{[a^2\beta^2 + b^2\alpha^2]^{\frac{2}{3}}} = 1.$$

En chassant les radicaux on trouverait une équation du 18<sup>e</sup> degré, c'est-à-dire que le degré atteint le maximum fixé par le théorème II (p. 45).

Mais cette équation peut se décomposer en facteurs.

---

(\*) Voyez la note page 268.

En effet, posant

$$\alpha = a \rho \cos \omega, \quad \beta = b \rho \sin \omega,$$

et faisant disparaître les radicaux, on obtient

$$\begin{aligned} & 27 \rho^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega (\rho^2 - 1 - \rho^4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega)^2 \\ &= (\rho^2 - 1 - \rho^4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega + 4 \rho^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega)^3, \end{aligned}$$

et si l'on pose

$$\rho^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega = u, \quad \rho^2 - 1 = z,$$

il vient

$$z(1-u)[z(1-u) - 9u]^2 = 0.$$

Le lieu cherché se compose donc des trois courbes

$$z = 0, \quad u = 1, \quad z = \frac{9u}{1-u};$$

si l'on remet pour  $z$  et  $u$  leurs valeurs en  $\rho$ ,  $\sin \omega$  et  $\cos \omega$ , puis pour ces dernières quantités leurs valeurs en  $\alpha$  et  $\beta$ , on obtient pour équations en coordonnées rectangulaires

$$(3) \quad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$(4) \quad \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - 1 = 0,$$

$$(5) \quad \left( \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 \right) \left( \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - 1 \right) = 9.$$

En laissant de côté la solution qui donne la courbe elle-même, on voit que le lieu se compose de deux courbes distinctes (4) et (5), faciles à construire (\*).

---

(\*) La construction de la courbe (5) se ramène facilement à celle de la courbe dont l'équation polaire est

$$\cos 4\omega = \frac{\rho^4 + 8}{\rho^2(\rho^2 + 8)}.$$

Il reste à expliquer pourquoi on trouve deux courbes. Pour cela nous allons déterminer successivement les lieux des cordes qui joignent, les premières, les pieds d'une normale double et d'une normale simple, et, les secondes, les pieds des deux normales simples, et on verra que les deux lieux ont précisément pour équation les équations (5) et (4). (J'appelle normale *double* celle des trois normales qui est tangente à la développée au point de départ, et normales *simples* les deux autres.)

Déterminons un point X, Y de l'ellipse par des équations de la forme  $X = a \cos \varphi$ ,  $Y = b \sin \varphi$ . L'angle d'anomalie  $\varphi$  caractérisera alors un point de l'ellipse que nous appellerons, pour abrégé, le point  $\varphi$ .

Soient  $x'$ ,  $y'$  les coordonnées du point de la développée d'où l'on mène les trois normales,  $\varphi'$  le pied de la normale double et  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$  les pieds des deux normales simples. Soient aussi  $\alpha'$ ,  $\beta'$  les coordonnées du pôle d'une corde de l'ellipse qui passe par deux points  $\varphi'$  et  $\varphi''$ , et  $x$  et  $y$  les coordonnées du point d'intersection des normales menées par les extrémités de la même corde.

L'équation de la corde ( $\varphi'$   $\varphi''$ ) sera

$$(6) \quad \frac{\cos \varphi' - \cos \varphi''}{\sin (\varphi'' - \varphi')} \frac{y}{b} - \frac{\sin \varphi' - \sin \varphi''}{\sin (\varphi'' - \varphi')} \frac{x}{a} = 1,$$

et on aura les coordonnées du pôle de la corde par les équations

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\alpha'}{a} = \frac{\sin \varphi'' - \sin \varphi'}{\sin (\varphi'' - \varphi')}, \\ \frac{\beta'}{b} = - \frac{\cos \varphi'' - \cos \varphi'}{\sin (\varphi'' - \varphi')}. \end{cases}$$

Si d'un autre côté on cherche les coordonnées du point  $x$ ,  $y$ , point d'intersection des normales menées par les

points  $\varphi', \varphi''$ , il vient

$$(8) \quad \begin{cases} y = \frac{c^2 \sin \varphi' \sin \varphi'' (\cos \varphi'' - \cos \varphi')}{b \sin (\varphi'' - \varphi')}, \\ x = \frac{c^2 \cos \varphi' \cos \varphi'' (\sin \varphi'' - \sin \varphi')}{a \sin (\varphi'' - \varphi')}. \end{cases}$$

En faisant dans les équations précédentes  $\varphi' = \varphi''$ , on trouve pour les coordonnées  $x', y'$  du point de la développée correspondant au point  $\varphi'$

$$(9) \quad x' = \frac{c^2}{a} \cos^3 \varphi', \quad y' = -\frac{c^2}{b} \sin^3 \varphi';$$

mais les points  $x, y$  étant sur la développée, on a

$$x' = x, \quad y' = y,$$

et par suite il vient

$$(10) \quad \frac{\sin \varphi'' - \sin \varphi'}{\sin (\varphi'' - \varphi')} = \frac{\cos^2 \varphi'}{\cos \varphi''}, \quad \frac{\cos \varphi'' - \cos \varphi'}{\sin (\varphi'' - \varphi')} = -\frac{\sin^2 \varphi'}{\sin \varphi''},$$

ou

$$(11) \quad \sin \varphi'' \cos^3 \varphi' + \sin^3 \varphi' \cos \varphi'' - \cos \varphi'' \sin \varphi'' = 0.$$

Remplaçant maintenant dans cette dernière équation  $\sin \varphi''$  par sa valeur  $\sqrt{1 - \cos^2 \varphi''}$ , faisant disparaître le radical et divisant les deux membres de l'équation résultante par le facteur double  $(\cos \varphi'' - \cos \varphi')^2$ , il viendra

$$(12) \quad \cos^2 \varphi'' + 2 \cos \varphi' \sin^2 \varphi' \cos \varphi'' - \cos^4 \varphi' = 0,$$

et une équation semblable en changeant  $\varphi''$  en  $\varphi'''$ .

D'ailleurs, en vertu des équations (10), les équations (7) deviennent

$$(13) \quad \frac{\alpha'}{a} = \frac{\cos^2 \varphi'}{\cos \varphi''}, \quad \frac{\beta'}{b} = \frac{\sin^2 \varphi'}{\sin \varphi''}.$$

Nous pouvons maintenant obtenir séparément les deux lieux, et d'abord le premier.

Pour cela, remplaçons dans les équations (11) et (12)  $\cos \varphi'$  et  $\sin \varphi'$  par leurs valeurs tirées des équations (13), il viendra

$$(14) \quad \frac{\alpha'}{a} \cos \varphi' + \frac{\beta'}{b} \sin \varphi' = 1, \quad \frac{a}{\alpha'} \cos \varphi' + \frac{b}{\beta'} \sin \varphi' = -1,$$

et éliminant  $\cos \varphi'$  et  $\sin \varphi'$  entre ces équations et l'équation

$$\sin^2 \varphi' + \cos^2 \varphi' = 1,$$

on aura

$$(b^2 \alpha'^2 - a^2 \beta'^2)^2 = a^2 \alpha'^2 (b^2 + \beta'^2)^2 + b^2 \beta'^2 (\alpha^2 + \alpha'^2)^2,$$

et il est facile de voir que cette équation peut se ramener à la forme

$$\left( \frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} - 1 \right) \left( \frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\beta'^2} - 1 \right) = 9,$$

sous laquelle nous l'avons d'abord trouvée.

Cherchons maintenant le second lieu. Soient  $\alpha''$ ,  $\beta''$  les coordonnées du pôle des cordes ( $\varphi''$ ,  $\varphi'''$ ). Si dans les équations (7) et (8) on remplace  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\varphi'$  par  $\alpha''$ ,  $\beta''$ ,  $\varphi''$  et que  $x$  et  $y$  représentent maintenant les coordonnées du point d'intersection des normales menées par les points  $\varphi''$ ,  $\varphi'''$ , on déduira de ces équations

$$y = -\frac{c^2}{b^2} \beta'' \sin \varphi'' \sin \varphi''', \quad x = \frac{c^2}{a^2} \alpha'' \cos \varphi'' \cos \varphi'''.$$

En égalant les valeurs précédentes de  $y$  et  $x$  respectivement à  $-\frac{c^2}{b} \sin^3 \varphi'$  et  $\frac{c^2}{a} \cos^3 \varphi'$ , il vient

$$(15) \quad \frac{b}{\beta''} \sin^3 \varphi' = \sin \varphi'' \sin \varphi''', \quad \frac{a}{\alpha''} \cos^3 \varphi' = \cos \varphi'' \cos \varphi''';$$

mais l'équation (12) étant une équation du second degré en  $\cos \varphi''$  qui admet à la fois pour racines  $\cos \varphi''$  et  $\cos \varphi'''$ ,

on a

$$(16) \quad \cos \varphi'' \cos \varphi''' = -\cos^2 \varphi',$$

et par un calcul semblable on a de même

$$(17) \quad \sin \varphi'' \sin \varphi''' = -\sin^2 \varphi';$$

remplaçant maintenant dans les équations (15)  $\cos \varphi'' \cos \varphi'''$ ,  $\sin \varphi'' \sin \varphi'''$  par les valeurs que donnent les équations précédentes, il vient

$$(18) \quad \frac{a}{\alpha''} = -\cos \varphi', \quad \frac{b}{\beta''} = -\sin \varphi',$$

et par suite

$$\frac{a^2}{\alpha''^2} + \frac{b^2}{\beta''^2} = 1.$$

C'est ce qu'il fallait trouver.

Nous allons donner maintenant deux équations très-simples qui lient entre eux, la première, les angles  $\varphi'$  et  $\varphi''$ , et la seconde, les angles  $\varphi''$  et  $\varphi'''$ .

En complétant deux carrés dans le premier membre de l'équation (12), on a

$$(\cos \varphi' + \cos \varphi'')^2 \sin^2 \varphi' = \cos^2 \varphi' \sin^2 \varphi'';$$

mais si on était parti de l'équation en  $\sin \varphi''$ , analogue à l'équation (12), on aurait eu de même

$$(\sin \varphi' + \sin \varphi'')^2 \cos^2 \varphi' = \sin^2 \varphi' \cos^2 \varphi'',$$

en extrayant les racines, on a donc

$$-\sin \varphi' \cos \varphi' = \sin(\varphi' \pm \varphi''), \quad -\sin \varphi' \cos \varphi' = \sin(\varphi'' \pm \varphi').$$

Pour que les résultats donnés par ces dernières équations soient d'accord, on doit avoir

$$(19) \quad -\sin \varphi' \cos \varphi' = \sin(\varphi' + \varphi''):$$

c'est la première équation que nous voulions obtenir.

On aurait évidemment de même

$$- \sin \varphi' \cos \varphi'' = \sin (\varphi' + \varphi'''),$$

et par suite

$$\sin (\varphi' + \varphi''') = \sin (\varphi' + \varphi''').$$

Mais pour que deux arcs aient le même sinus, il faut que leur différence soit un nombre pair ou que leur somme soit un nombre impair de demi-circonférences. Or la première hypothèse doit être rejetée, puisque les deux arcs  $\varphi''$  et  $\varphi'''$  étant tous deux plus petits que  $2\pi$  ou au plus égaux à  $2\pi$  (ce qu'on peut toujours supposer en géométrie), leur différence est toujours inférieure à  $2\pi$ . Cela a lieu aussi d'ailleurs dans le cas où l'un des angles est nul, parce qu'alors l'autre est nécessairement égal à  $\pi$ . La seule hypothèse possible est donc, en représentant par  $2k + 1$  un nombre impair quelconque,

$$2\varphi' + \varphi'' + \varphi''' = (2k + 1)\pi.$$

De l'équation précédente on tire

$$\begin{aligned} \cos (\varphi' + \varphi''') &= -\cos 2\varphi', \\ [(1 + \cos (\varphi'' + \varphi'''))]^2 &= 4 \sin^4 \varphi' = -4 \sin \varphi'' \sin \varphi''', \\ (20) \quad \cos^2 \frac{\varphi'' + \varphi'''}{2} + \sin \varphi'' \sin \varphi''' &= 0; \end{aligned}$$

l'équation (20) est la seconde équation demandée.

Les équations (19) et (20) peuvent être utiles dans la résolution de plusieurs problèmes.

*Hyperbole.* Les deux méthodes sont applicables; seulement, dans la seconde, on détermine un point X, Y de l'hyperbole par des équations

$$X = a \sec \varphi, \quad Y = b \tan \varphi.$$

*Parabole.* On trouve l'équation du lieu par la première méthode, c'est-à-dire en substituant dans l'équa-



tion de la développée

$$y^2 = \frac{8}{27p} (x - p)^3,$$

les valeurs de  $y$  et de  $x$  données par les formules

$$y = -\frac{2\alpha\beta}{p}, \quad x = \frac{2\beta^2 - \alpha p + p^2}{p} \quad (\text{page 51});$$

on a ainsi l'équation

$$(\beta^2 - 2p\alpha)(4\beta^2 + p\alpha)^2 = 0;$$

le lieu est donc la parabole

$$4\beta^2 + p\alpha = 0.$$

On peut aussi résoudre la question en supposant un point de la parabole déterminé par des équations

$$X = 2p \operatorname{tang}^2 \varphi, \quad Y = 2p \operatorname{tang} \varphi.$$

En désignant par  $\varphi'$  et  $\varphi''$  les angles qui déterminent les pieds de la normale double et de la normale simple, on voit immédiatement qu'on est ramené à éliminer  $\operatorname{tang} \varphi'$  et  $\operatorname{tang} \varphi''$  entre les trois équations

$$(21) \quad \begin{cases} \alpha = 2p \operatorname{tang} \varphi' \operatorname{tang} \varphi'', & \beta = p(\operatorname{tang} \varphi' + \operatorname{tang} \varphi''), \\ 2 \operatorname{tang} \varphi' + \operatorname{tang} \varphi'' = 0. \end{cases}$$

#### THÉORÈMES.

I.  $X', Y'$  étant les coordonnées du pied de la normale double dans l'ellipse, si on remplace dans les équations (14)  $\cos \varphi'$  et  $\sin \varphi'$  par  $\frac{X'}{a}$ ,  $\frac{Y'}{b}$ , il vient

$$\frac{\alpha' X'}{a^2} + \frac{\beta' Y'}{b^2} = 1, \quad \frac{-X'}{\alpha'} + \frac{-Y'}{\beta'} = 1,$$

d'où résulte ce théorème :

*Si on projette un point de la courbe (5) sur les deux axes de l'ellipse, la ligne droite qui joint les deux projections passe toujours par le point de l'ellipse diamétralement opposé au pied de la normale double correspondante.*

II. Si on remplace dans les équations (18)  $\cos\varphi'$  et  $\sin\varphi'$  par leurs valeurs  $\frac{X'}{a}$ ,  $\frac{Y'}{b}$ , il vient

$$a^2 = -X'\alpha'', \quad b^2 = -Y'\beta'',$$

et on a le théorème suivant :

*Si on projette un point de la courbe (4) sur les deux axes de l'ellipse, la ligne qui joint les projections touche l'ellipse donnée en un point diamétralement opposé au pied de la normale double correspondant au point de la courbe (4).*

Les mêmes théorèmes ont lieu pour l'hyperbole.

III. Les équations (21), dans lesquelles on remplace  $\tan\varphi'$  par  $\frac{Y'}{2p}$ ,  $\tan^2\varphi'$  par  $\frac{X'}{2p}$ , donnent évidemment

$$\beta = -\frac{Y'}{2}, \quad \alpha = -2X'.$$

De là on déduit facilement ce théorème :

*Si on mène une tangente quelconque à la parabole et qu'on la prolonge, à partir de sa rencontre avec l'axe, d'une longueur égale à sa moitié, l'extrémité de cette longueur engendrera une courbe identique au lieu des pôles des cordes qui joignent les pieds des normales menées d'un point de la développée.*

IV. Il a été démontré que les angles d'anomalie correspondant aux pieds des trois normales menées d'un point

de la développée de l'ellipse sont liés entre eux par l'équation

$$2\varphi' + \varphi'' + \varphi''' = (2k + 1)\pi.$$

On peut prouver de plus que le nombre  $2k + 1$  est 5 ou 3 suivant que le point de la développée est au-dessus ou au-dessous du grand axe de l'ellipse. Mais ce théorème est un corollaire évident d'un théorème plus général qu'on peut énoncer ainsi :

*Si d'un point intérieur à la développée de l'ellipse on mène les quatre normales à cette courbe, la somme des quatre angles d'anomalie correspondant aux pieds des normales (chacun d'eux variant entre 0 et  $2\pi$ ) est égale à  $5\pi$  ou  $3\pi$  suivant que le point est situé au-dessus ou au-dessous du grand axe.*

En effet, si d'un point  $x, y$  du plan de l'ellipse on mène les normales à cette courbe, et qu'on désigne par  $X, Y$  les coordonnées d'un des pieds des normales, on sait que les pieds se trouveront sur une hyperbole équilatère

$$(22) \quad c^2 XY + b^2 y X - a^2 x Y = 0.$$

En remplaçant dans cette équation  $X$  et  $Y$  par  $a \cos \varphi$  et  $b \sin \varphi$ , puis  $\cos \varphi$  et  $\sin \varphi$  par leurs valeurs en  $\text{tang} \varphi$ , il vient

$$\begin{aligned} a^2 x^2 \text{tang}^4 \varphi - 2abx \text{tang}^3 \varphi + (a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^2) \text{tang}^2 \varphi \\ - 2abxy \text{tang} \varphi + b^2 y^2 = 0. \end{aligned}$$

Les coefficients de  $\text{tang}^4 \varphi$  et  $\text{tang} \varphi$  étant égaux dans l'équation précédente, on en conclut, en désignant par  $\varphi', \varphi'', \varphi''', \varphi^{iv}$  les quatre valeurs de  $\varphi$  correspondant aux pieds des quatre normales, et représentant par  $k$  un nombre entier quelconque,

$$\varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi^{iv} = k\pi;$$

mais si l'on se rappelle que par hypothèse les angles

d'anomalie sont compris entre 0 et  $2\varpi$ , et que le centre de courbure d'un point de l'ellipse a toujours une ordonnée de signe contraire à l'ordonnée du point lui-même, on voit sans difficulté que, suivant que le point de départ des quatre normales est au-dessus ou au-dessous du grand axe de l'ellipse, la somme  $\varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi^{iv}$  est toujours comprise entre  $4\varpi$  et  $6\varpi$  ou entre  $2\varpi$  et  $4\varpi$ ; elle est donc  $5\varpi$  dans le premier cas et  $3\varpi$  dans le second.

V. Si l'on suppose qu'un point de l'hyperbole est déterminé par des équations de la forme

$$X = a \sec \varphi, \quad Y = b \tan \varphi,$$

l'angle  $\varphi$  étant toujours un angle compris entre 0 et  $2\varpi$ , et tellement choisi, que  $a \sec \varphi$  et  $b \tan \varphi$  donnent X et Y à la fois en grandeur et en signe, on prouve par une démonstration toute semblable à la précédente que la somme  $\varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi^{iv}$ , correspondant aux pieds des quatre normales menées d'un point du plan de l'hyperbole à cette courbe, est égale à  $5\varpi$  ou  $3\varpi$ , suivant que le point de départ des quatre normales est situé dans le premier et le troisième angle des coordonnées, ou dans le second et le quatrième.

VI. Quant à la parabole, si l'on suppose, comme précédemment, un de ses points X, Y déterminé par des équations

$$X = 2p \tan^2 \varphi, \quad Y = 2p \tan \varphi,$$

on trouve, pour déterminer les valeurs de  $\tan \varphi$  correspondant aux pieds des normales menées d'un point  $x, y$  du plan, l'équation

$$4p \tan^3 \varphi + 2(p - x) \tan \varphi - y = 0;$$

on a donc

$$\tan \varphi' + \tan \varphi'' + \tan \varphi''' = 0,$$

et si l'on suppose le point de départ des normales sur la développée, on retrouve l'équation précédemment citée

$$2 \operatorname{tang} \varphi' + \operatorname{tang} \varphi'' = 0.$$

VII. On a trouvé que la somme des angles d'anomalie était égale à  $k\pi$  pour les points d'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole équilatère (22); on est conduit alors à se demander, en général, par quelles courbes du second degré on doit couper l'ellipse pour que la même relation subsiste. Cette question, avec plusieurs autres du même genre énoncées par M. Joachimstal, a été résolue par M. Terquem (*Annales*, t. IX, p. 170). Les démonstrations sont semblables à celle que nous avons donnée tout à l'heure. On voit, en particulier, que la somme des quatre angles d'anomalie est toujours égale à  $k\pi$  quand la seconde courbe est un cercle.

J'ajouterai ici que lorsque les quatre points d'intersection sont d'un même côté du grand axe, la somme des angles d'anomalie (supposés toujours compris entre 0 et  $2\pi$ ) est égale à  $2\pi$  ou  $6\pi$ , suivant que les quatre points sont au-dessus ou au-dessous du grand axe, et que la somme est égale à  $4\pi$ , lorsque deux points sont au-dessus et les deux autres au-dessous du grand axe.

Le théorème est évident lorsque les quatre points sont symétriques deux à deux par rapport à l'un des axes; et lorsque la symétrie n'existe pas, on remarque qu'en remplaçant deux des points par les symétriques des deux autres, on ne pourrait qu'augmenter ou diminuer la somme des angles d'anomalie d'une quantité plus petite que  $\pi$ , et que par conséquent la somme qui est un multiple de  $\pi$  doit rester la même. Les réciproques sont évidentes.

En rapprochant le théorème actuel de celui que nous avons démontré sur les pieds des normales à l'ellipse, on

arrive à une démonstration très-simple d'un autre théorème dû à M. Joachimstal, et dont voici l'énoncé :

*Dans l'ellipse, trois des pieds des normales à cette courbe menées d'un point de son plan, et le point diamétralement opposé au pied de la quatrième normale, sont sur une même circonférence.*

En effet, supposons, pour fixer les idées, qu'on ait mené les quatre normales d'un point situé au-dessous du grand axe. Trois des pieds des normales sont au-dessus de l'axe et le quatrième au-dessous. Alors, suivant qu'on remplacera l'un des trois premiers pieds ou le quatrième par le point diamétralement opposé, on augmentera ou on diminuera de  $\pi$  la somme des angles d'anomalie. Dans le premier cas on aura deux points au-dessus de l'axe et deux au-dessous, et la somme des angles d'anomalie sera égale à  $4\pi$ . Dans le second cas les quatre points seront au-dessus de l'axe, et la somme sera égale à  $2\pi$ . Les quatre points sont donc, dans les deux cas, sur une même circonférence. Le cas où le point de départ des normales est au-dessous de l'axe conduit à la même conclusion.

Pour l'hyperbole, les mêmes théorèmes ont lieu encore, et se démontrent d'une manière analogue.

#### *Détermination du lieu par la géométrie.*

**THÉORÈME I.** *Si deux points pris dans le plan d'une conique à centre sont tels, que les rapports de leurs coordonnées aux demi-axes sur la direction desquels on les compte sont inverses et de signe contraire, les deux polaires correspondantes coupent la courbe en quatre points, dont les normales vont concourir en un même point du plan.*

Le théorème est une conséquence évidente des formules (1). En effet les valeurs de  $x$  et  $y$  données par ces

formules ne changent pas, quand on y remplace  $\alpha$  et  $\beta$  par  $-\frac{a^2}{\alpha}$  et  $-\frac{b^2}{\beta}$ .

**THÉORÈME II.** *Deux points étant donnés sur une conique à centre, si l'on trace la corde qui joint les deux points diamétralement opposés aux premiers, que par les points où cette corde rencontre les axes on mène des parallèles à ces lignes, et, par le point d'intersection des deux parallèles, des tangentes à la conique, les deux points de contact et les deux points donnés seront tels, que les normales des quatre points se couperont en un même point du plan.*

En effet, les cordes qui joignent respectivement les deux premiers et les deux derniers points ont pour pôles deux points dont les coordonnées satisfont à la condition indiquée par le premier théorème.

**THÉORÈME III.** *Étant donné un quadrilatère circonscrit à une conique à centre dont les points de contact avec la courbe sont les pieds de normales menées d'un même point du plan, si on projette les quatre sommets sur les axes et qu'on mène les droites qui joignent les projections d'un même sommet, les quatre droites ainsi obtenues formeront un quadrilatère inscrit dans la conique et dont les sommets seront diamétralement opposés aux points de contact du premier quadrilatère.*

Soient A, B, C, D les quatre points de contact; A', B', C', D' les points diamétralement opposés; (A, B), (B, C), (C, D), (D, A) les quatre sommets; (A, B) désignant le sommet situé entre A et B; (B, C) le sommet entre B et C, etc. Les deux droites qui réunissent les projections sur les axes des points (A, B) et (A, D) viendront toutes deux passer par le point C' (théorème II). Pour les autres,

la démonstration est évidemment la même. On a donc un quadrilatère inscrit  $A', B', C', D'$ .

**THÉORÈME IV.** *Si l'on projette sur les axes le point d'intersection d'une normale simple et d'une normale double, et celui de deux normales simples, et qu'on joigne les projections de chaque point par une droite, les deux droites passeront par le point diamétralement opposé au pied de la normale double, et de plus la deuxième sera tangente à l'ellipse.*

En effet, si l'un des points de contact, D par exemple, se confond avec le sommet voisin A, D' se confond avec A', et le quadrilatère A'B'C'D' est remplacé par la figure formée du triangle A'B'C' et d'une tangente en A'; mais alors le point de départ des quatre normales est sur la développée, et la normale partant de A est la normale double. Le théorème est donc démontré.

Le théorème IV comprend les deux théorèmes démontrés par le calcul p. 261, § I et § II.

Il est facile maintenant d'obtenir les équations des deux courbes. En effet, si l'on désigne par X et Y les coordonnées du point A, par  $\alpha', \beta'$  celles du point (A, B), par  $\alpha'', \beta''$  celles du point (B, C), on a évidemment, d'après le théorème IV, les équations suivantes :

$$\frac{-X}{\alpha'} + \frac{-Y}{\beta'} = 1, \quad \frac{X\alpha'}{a^2} + \frac{Y\beta'}{\pm b^2} = 1, \quad \alpha'' = \frac{-X}{a^2}, \quad \beta'' = \frac{-Y}{\pm b^2}.$$

En substituant dans l'équation de la conique les valeurs de X et de Y déduites des deux premières, et aussi celles qui sont déduites des deux dernières, on aura immédiatement les équations du double lieu.

*Remarque.* On peut aussi déduire du théorème I une démonstration très-simple du théorème de M. Joachimstal (§ VII, p. 265).



En effet, conservant les mêmes notations que précédemment, nous voyons, d'après le théorème I, que si le coefficient de AD est  $m$ , celui de BC est  $\frac{b^2}{a^2 m}$ , et par suite celui de BC', corde supplémentaire de BC, est  $-m$ . Les droites AD et BC' sont donc également inclinées sur les axes, et par conséquent, d'après un théorème connu, le quadrilatère ADBC' est inscriptible dans une circonférence.

## NOTE.

*Démonstration des formules (1).* Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les coordonnées du pôle d'une corde quelconque ( $\varphi'$   $\varphi''$ ); des équations (7) et (8), dans lesquelles on efface les accents de  $\alpha$  et  $\beta$ , on déduit

$$y = -\frac{c^2}{b^2} \beta \sin \varphi' \sin \varphi'', \quad x = \frac{c^2}{a^2} \alpha \cos \varphi' \cos \varphi'';$$

d'un autre côté, en introduisant dans les équations (7) les angles  $\frac{\varphi'}{2}$  et  $\frac{\varphi''}{2}$ , il vient

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\cos \frac{\varphi' + \varphi''}{2}}{\cos \frac{\varphi' - \varphi''}{2}}, \quad \frac{\beta}{b} = \frac{\sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2}}{\cos \frac{\varphi' - \varphi''}{2}},$$

et on en tire immédiatement

$$\frac{a' - \alpha^2}{a^2} = \frac{\sin \varphi' \sin \varphi''}{\cos^2 \frac{\varphi' - \varphi''}{2}}, \quad \frac{b^2 - \beta^2}{b^2} = \frac{\cos \varphi' \cos \varphi''}{\cos^2 \frac{\varphi' - \varphi''}{2}},$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi' - \varphi''}{2}},$$

et par suite

$$\sin \varphi' \sin \varphi'' = \frac{b^2(a^2 - \alpha^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}, \quad \cos \varphi' \cos \varphi'' = \frac{a^2(b^2 - \beta^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}$$

substituant maintenant dans les deux premières équations les valeurs de  $\sin \varphi' \sin \varphi''$ ,  $\cos \varphi' \cos \varphi''$ , on aura les formules (1).