

ABEL TRANSON

**Sur les formules d'interpolation de
Lagrange et de Newton**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 248-252

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__248_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE
ET DE NEWTON (*);**

PAR M. ABEL TRANSON.

1. Il faut, de la formule de Lagrange, déduire celle de Newton, lorsque les nombres x_0, x_1, \dots, x_m forment une progression arithmétique.

Cette déduction consistera à faire voir que si, dans la formule de Lagrange, on remplace u_1, u_2, \dots, u_m , par leurs valeurs en fonction de u_0 et de ses différences, le

(*) Voir t. XVI, p. 237, 398 ; t. XVIII, p. 26 à 193.

coefficient d'une différence d'ordre quelconque sera, pour la circonstance indiquée, le même que dans la formule de Newton. Le calcul s'appliquera d'ailleurs au cas où l'indice de la différence dont on étudie le coefficient est nul, c'est-à-dire qu'elle s'appliquera au coefficient de u_0 ; car u_0 est représenté par $\Delta_0 u_0$.

2. Pour abrégér l'écriture, je représenterai un produit de facteurs qui croissent en progression arithmétique et qui sont en nombre n , tel que le produit $a(a+h) \dots [a+(n-1)h]$ par le symbole usité $a^{n/h}$; et le produit de n facteurs décroissants, tel que $a(a-h) \dots [a-(n-1)h]$ par $a^{n/-h}$. Et à ce sujet je rappellerai qu'on a la formule suivante

$$(a-b)^{n/h} = a^{n/h} - \frac{n}{1} b^{1/-h} a^{n-1/h} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} b^{2/-h} a^{n-2/h} \dots$$

Priant le lecteur d'observer que les facteurs qui commencent par a dans chaque terme sont *croissants* au lieu que ceux dont le premier est b sont *décroissants*.

3. Je vais calculer le coefficient de $\Delta_p u_0$, et je remarque premièrement que par la substitution des valeurs de $u_1, u_2 \dots u_m$ en fonction de $u_0, \Delta u_0, \dots, \Delta_m u_0$, la différence $\Delta_p u_0$ ne s'introduira que par la valeur de u_p et par celles de u_{p+1}, \dots , jusqu'à u_m .

C'est pourquoi, avant de faire cette substitution, je vais transformer les coefficients fractionnaires de la formule de Lagrange, mais seulement à partir du terme qui contient u_p .

4. Tous les coefficients, à partir de celui de u_p , ont en facteur commun au numérateur le produit

$$(x) \quad (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{p-1}).$$

Ensuite le numérateur de l'un de ces coefficients, de celui par exemple qui multiplie u_{p+n} , se complète par cet autre produit

$$(x - x_p) \dots (x - x_{p+n-1})(x - x_{p+n+1}) \dots (x - x_m).$$

Ce nouveau produit contient $m - p$ facteurs; je le décompose en deux autres: l'un formé de n facteurs décroissants, savoir :

$$(x - x_p) \dots (x - x_{p+n-1}),$$

et l'autre de $m - n - p$ croissants, savoir :

$$(x - x_m)(x - x_{m-1}) \dots (x - x_{p+n+1}).$$

Donc je puis dire, en employant les symboles convenus, que le coefficient de u_{p+m} a pour numérateur le produit ci-dessus (α) multiplié par l'expression suivante :

$$(x - x_p)^{n-h} \cdot (x - x_m)^{m-p-u/h}.$$

5. Considérons maintenant le dénominateur de u_{p+n} , c'est-à-dire le produit

$$(x_{p+n} - x_0) \dots (x_{p+n} - x_{p+n-1})(x_{p+n} - x_{p+n+1}) \dots (x_{p+n} - x_m).$$

D'après la relation qui est entre les x_0, x_1, \dots, x_m , tous ces binômes en nombre m contiennent le facteur h ; de plus les $m - p - n$ derniers, c'est-à-dire les binômes à partir de $x_{p+n} - x_{p+n+1}$, sont négatifs. Ce produit reçoit donc la forme suivante :

$$(-1)^{m-p-n} \cdot h^m \cdot (p+n)(p+n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \dots (m-p-n).$$

Mais pour mettre en évidence ce qui est commun à tous ces dénominateurs, j'écris la même expression comme

il suit :

$$(-1)^{m-p} \cdot h^m \cdot (1 \cdot 2 \dots p) (1 \cdot 2 \dots m-p) \\ \times \frac{(p+1) \dots (p+n)}{(-1)^n (m-p-n+1) \dots (m-p)}$$

6. Finalement le coefficient de u_{p+n} se compose :
1° d'un facteur commun à tous les coefficients à partir de u_p , et que voici :

$$(\beta) \frac{(x-x_0)(x-x_0-h) \dots [x-x_0-(p-1)h]}{(-1)^{m-p} \cdot h^m \cdot (1 \cdot 2 \dots p) [1 \cdot 2 \dots (m-p)]}$$

et 2° du facteur suivant qui lui est propre

$$(-1)^n \frac{(m-p)(m-p-1) \dots (m-p-n+1)}{(p+1)(p+2) \dots (p+n)} \\ \times (x-x_p)^{n/h} (x-x_m)^{m-p-n/h}$$

7. Donc la formule de Lagrange reçoit des relations prescrites une première transformation telle que l'ensemble des termes à partir de celui qui contient u_p jusqu'au dernier, se trouve égal au facteur ci-dessus (β) multiplié par la suite des termes que voici :

$$(x-x_m)^{m-p/h} u_p - \frac{m-p}{p+1} (x-x_p)^{1/h} (x-x_m)^{m-p-1/h} u_{p+1} \\ + \frac{(m-p)(m-p-1)}{(p+1)p+2} (x-x_p)^{2/h} \\ \times (x-x_m)^{m-p-2/h} u_{p+2} \\ \dots \dots \dots$$

8. Et maintenant il est manifeste que pour avoir le terme en $\Delta_p u_0$ il faudra multiplier le même facteur (β) par la suite précédente dans laquelle on aura rem-

placé

$$\begin{aligned}
u_p & \text{ par } \Delta_p u_0, \\
u_{p+1} & \text{ par } \frac{p+1}{1} \Delta_p u_0, \\
u_{p+2} & \text{ par } \frac{(p+2)(p+1)}{1.2} \Delta_p u_0. \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Mais alors cette suite devient égale au produit de $\Delta_p u_0$ par

$$\begin{aligned}
& (x - x_m)^{m-p/h} - \frac{m-p}{1} (x - x_p)^{1/h} (x - x_m)^{m-p-1/h} \\
& + \frac{(m-p)(m-p-1)}{1.2} (x - x_p)^{2/h} (x - x_m)^{m-p-2/h} - \dots
\end{aligned}$$

c'est-à-dire par

$$[x - x_m - (x - x_p)]^{m-p/h} = (x_p - x_m)^{m-p/h},$$

expression égale à

$$(-1)^{m-p} \cdot h^{m-p} (m-p) (m-p-1) \dots 2.1.$$

Si on la combine avec le facteur (β) , on reconnaîtra que le coefficient de $\Delta_p u_0$ dans la formule de Lagrange transformée est égal à

$$\frac{(x - x_0)(x - x_0 - h) \dots [x - x_0 - (p-1)h]}{(1.2.3 \dots p) h^p},$$

ce qui est précisément son coefficient dans la formule de Newton.



.