

MICHAEL ROBERTS

Sur quelques questions d'algèbre

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 23-26

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__23_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES QUESTIONS D'ALGÈBRE;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Étant donnée l'équation

$$(a, b, c, d, e, f, \dots)(x, 1)^n = 0,$$

dont les racines sont (x_1, x_2, \dots, x_n) ; soient $s_0, s_1, s_2 \dots$
les sommes des puissances zéro, première, deuxième, . . .
de ces racines.

Calculons les valeurs de la fonction symétrique
 $\sum (x_1 - x_2)^{2p}$, ou bien de l'invariant quadratique
 (\sum_p) de la forme (*)

$$(s_0, s_1, s_2, \dots, s_{2p})(x, y)^{2p},$$

pour $p=1, p=2, p=3, p=4$.

Nous trouvons

$$a^2 \sum_1 = n^2(n-1)(b^2 - ac),$$

$$a^4 \sum_2 = n^2(n-1) \left[\begin{array}{l} n^2(b^2 - ac)^2 - \frac{(n-2)(n-3)}{6} a^2 \\ \times (ae - 4bd + 3c^2) \end{array} \right],$$

$$a^6 \sum_3 = n^2(n-1) \left\{ \begin{array}{l} n^4(b^2 - ac)^3 - \frac{1}{4} n^2(n-2)(n-5)a^2 \\ \times (b^2 - ac)(ae - 4bd + 3c^2) \\ - \frac{n(n-2)(7n-15)}{4} \\ \times (ad^2 + eb^2 + c^3 - 2bcd - ace) a^3 \\ - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ \times (ag - 6bf + 15ec - 10d^2) a^4 \end{array} \right\},$$

(*) *Vou t XVIII*, p. 304.

$$a^4 \sum_i = n^2(n-1) \left\{ \begin{array}{l} n^6(b^2-ac)^4 - \frac{1}{3}n^4(n-2)(n-7)a^2 \\ \times (b^2-ac)^2(ae-4bd+3c^2) \\ + 2n^3(n-2)(3n-7)a^5 \\ \times (b^2-ac)(ad^2+eb^2+c^3-2bcd-ace) \\ + \frac{1}{72}n^2(n-2)(n-3)(n^2+8n-21)a^4 \\ \times (ae-4bd+3c^2)^2 \\ - \frac{n^2(n-2)(n-3)(n-4)(n-21)}{90}a^4 \\ \times (b^2-ac)(ag-6bf+15ec-10d^2) \\ - \frac{n(n-2)(n-3)(n-4)(3n-7)}{9}a^5 \\ \times \left(\begin{array}{l} h^2g-2cd^2+bde-3bcf-acg \\ + 3adf-2ae^2+3c^2e \end{array} \right) \\ - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4.5.6.7}a^6 \\ \times (ak-8bh+28cg-56df+35e^2) \end{array} \right.$$

On trouve aussi pour l'invariant cubique (I_3) de la forme

$$(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)(x, y)^4,$$

l'expression suivante

$$12a^4I_3 = n^3(n-1)^2(n-2) \times \left[\begin{array}{l} n(b^2-ac)(ae-4bd+3c^2) \\ - 3(n-2)a \\ \times (ad^2+eb^2+c^3-2bcd-ace) \end{array} \right].$$

Posons $n=3$, $e=0$, l'on retombe sur le discriminant de la fonction cubique homogène à deux variables (*).

Pour $n=4$, nous avons

$$a^4I_3 = 192 \times \left[\begin{array}{l} 2(b^2-ac)(ae-4bd+3c^2) \\ - 3a(ad^2+cb^2+c^3-2hcd-ace) \end{array} \right].$$

(*) Résultat connu.

(26)

Or, en nous reportant à l'équation au carré des différences des racines d'une équation biquadratique que j'ai déjà donnée (*), nous tirons l'équation suivante.

$$\begin{aligned} & \sum (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_1 - x_4)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2 \\ & = 6 (ae - 4bd + 3c^2) \times \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

en sorte que la relation entre les racines d'une équation du quatrième degré exprimée par l'équation

$$\sum \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} = 0$$

entraîne l'une ou l'autre des conditions

$$ac - 4bd + 3c^2 = 0, \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0.$$
