

MARIE-PIERRE-ADOLPHE GUIBERT

**Remarques sur quelques produits dont les
facteurs sont en progression arithmétique**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 213-215

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__213_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REMARQUES

sur quelques produits dont les facteurs sont en progression arithmétique;

PAR M. MARIE-PIERRE-ADOLPHE GUIBERT.

I. Si n, r sont premiers entre eux, et $r^4 < 2^m - 1$, le produit $(n-r)n(n+r)$ ne sera pas la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un entier.

Admettons que ce produit soit une puissance exacte du degré m : comme n est premier avec les deux autres facteurs $n-r, n+r$, il faudra que n, n^2-r^2 soient des puissances $m^{\text{ièmes}}$ exactes a^m, b^m ; on aurait alors

$$(a^2)^m - b^m < 2^m - 1,$$

ce qui ne peut être.

II. Le produit P de huit entiers consécutifs n'est point un carré.

Soit

$$P = (n-3)(n-2) \dots (n+3)(n+4).$$

Ce produit équivaut à

$$(n^4 + 2n^3 - 9n^2 - 10n + 4)^2 - 16(2n+1)^2;$$

donc

$$P < (n^4 + 2n^3 - 9n^2 - 10n + 4)^2.$$

La différence $P - (n^4 + 2n^3 - 9n^2 - 10n + 3)^2$, égale à $2n^4 + 4n^3 - 82n^2 - 84n - 9$, reste positive tant que n est supérieur à 6; donc, pour $n > 6$,

$$P > (n^4 + 2n^3 - 9n^2 - 10n + 3)^2.$$

Ces inégalités prouvent que pour $n > 6$, P n'est point un carré, par conséquent P n'est jamais un carré, puisque d'ailleurs on n'obtient aucun carré, en prenant n égal à l'un quelconque des nombres 4, 5, 6.

On déduit de là que le *produit de trois nombres entiers consécutifs n'est une puissance exacte d'aucun degré.*

III. *Le produit de trois nombres entiers en progression arithmétique n'est jamais un cube.*

Le produit en question est susceptible d'être représenté par

$$d^3 (n - r) n (n + r),$$

d étant le plus grand commun diviseur entre la raison et l'un quelconque des termes de la progression.

Supposons que ce produit soit un cube; $n - r$ et $n + r$ étant premiers avec n , $(n - r)$, $(n + r)$ et n devant être des cubes. Soit

$$n = a^3.$$

Si l'un des nombres n , r est pair, $n - r$ et $n + r$ n'auront pas de diviseur commun, chacun de ces facteurs devra être un cube; mais leur somme est égale à $2n$, c'est-à-dire à $2a^3$, on aurait donc la somme de deux cubes égale au double d'un cube, ce qui est impossible.

Si les deux nombres n , r sont impairs, le plus grand commun diviseur de $n - r$ et de $n + r$ sera 2; leur produit ne pourra être un cube que si l'un est le double d'un cube et l'autre égal à quatre fois un cube, ce qui donne toujours une égalité semblable à celle-ci :

$$2n = 2\alpha^3 + 4\beta^3,$$

de laquelle on tire

$$\alpha^3 - \beta^3 = 2\beta^3,$$

résultat encore impossible.

IV. *Le produit de six, de neuf nombres entiers consécutifs n'est point un cube.*

Soit d'abord

$$P = (u - 2)(n - 1)n(n + 1)(u + 2)(n + 3).$$

Ce produit n'est pas un cube quand $n = 3$; nous allons prouver qu'il n'en est pas un si n est plus grand que 3.

On a identiquement

$$3^3 P = (3n^2 + 3n - 8)^3 - (252n^2 + 252n + 512),$$

d'où

$$3^3 P < (3n^2 + 3n - 8)^3;$$

mais la différence $3^3 P - (3n^2 + 3n - 8)^3$, égale à

$$27n^4 + 54n^3 - 378n^2 - 405n - 295,$$

est positive tant que n est supérieur à 3; par conséquent, dans cette hypothèse,

$$3^3 P > (3n^2 + 3n - 8)^3;$$

donc P n'est jamais un cube.

En dernier lieu, considérons le produit de neuf nombres entiers consécutifs

$$P = (n - 4)(n - 3) \dots (n + 3)(n + 4);$$

observons qu'on n'obtient aucun cube, en faisant $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$: il suffira de prouver qu'on n'en obtient pas non plus lorsque n est plus grand que 10.

Or P revient à

$$(n^3 - 10n)^3 - (27n^5 - 180n^3 - 576n), \text{ d'où } P < (n^3 - 10n)^3;$$

car $27n^5 - 180n^3 - 576n$ est une quantité positive, si, comme on le suppose, on a $n > 10$; mais, en soustrayant de P le cube immédiatement inférieur au précédent, on obtient la différence

$$3n^6 - 27n^5 - 60n^4 + 177n^3 + 300n^2 + 30n + 576,$$

laquelle est aussi positive dès que n est supérieur à 10, ce qui donne

$$P > (n^3 - 10n - 1)^3.$$

Par conséquent P n'est un cube dans aucune circonstance.