

VANNSON

**Propriétés des coniques sphériques
homofocales**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 197-206

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__197_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

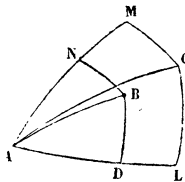
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS DES CONIQUES SPHÉRIQUES HOMOFOCALES;

PAR M. VANNSON,
Professeur au lycée de Versailles.

Lemme. Étant donnés deux grands cercles AL, AM et

FIG. 1.



deux points B, C d'où l'on a abaissé les quatre arcs perpendiculaires BD, BM, CL, CM, si l'on accorde que leurs sinus soient proportionnels, les trois points A, B, C seront sur une circonférence de grand cercle; car supposons que AB et AC soient deux arcs distincts l'un de l'autre,

on aura

$$\frac{\sin \text{BAD}}{\sin \text{BAN}} = \frac{\sin \text{CAL}}{\sin \text{CAM}},$$

d'où

$$\frac{\sin \text{BAD} + \sin \text{BAN}}{\sin \text{BAD} - \sin \text{BAN}} = \frac{\sin \text{CAL} + \sin \text{CAM}}{\sin \text{CAL} - \sin \text{CAM}},$$

ou

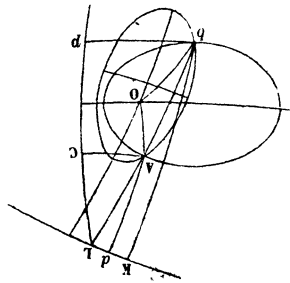
$$\frac{\text{tang} \frac{A}{2}}{\text{tang} \left(\frac{\text{BAD} - \text{BAN}}{2} \right)} = \frac{\text{tang} \frac{A}{2}}{\text{tang} \left(\frac{\text{CAL} - \text{CAM}}{2} \right)};$$

on conclura de là facilement que $\text{BAD} = \text{CAL}$. Donc les trois points A, B, C sont sur un même grand cercle.

THÉORÈME. *Si deux coniques sphériques ont un foyer commun et qu'elles se coupent en deux points, ces deux points seront sur un arc de grand cercle passant par l'intersection des directrices correspondantes au foyer commun; et si elles se coupent en quatre points, on pourra, par deux d'entre eux, mener un arc de grand cercle passant par l'intersection des directrices; il en sera de même des deux autres.*

Soient O le foyer commun et A, B deux points d'inter-

FIG. 2.



section, AC, AD, etc., deux perpendiculaires abaissées

(109)

sur les directrices ; on a

$$\frac{\sin AC}{\sin bp} = \frac{\sin AO}{\sin bO}$$

et

$$\frac{\sin Ad}{\sin bK} = \frac{\sin AO}{\sin bO},$$

d'où

$$\frac{\sin Ad}{\sin bK} = \frac{\sin AC}{\sin bp};$$

donc les trois points b , A , L sont sur un grand cercle.

La même proposition peut aussi se démontrer par un calcul très-simple. En prenant le foyer commun pour origine, les deux coniques auront pour équations

$$y^2 + x^2 = (my + nx + p)^2,$$

$$y^2 + x^2 = (m'y + n'x + p')^2.$$

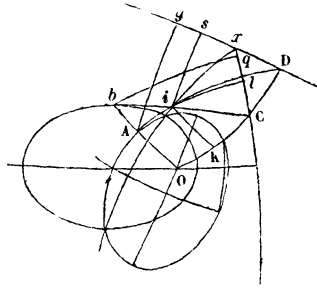
Les coordonnées réelles ou imaginaires communes à ces équations vérifieront l'équation qui résulte de la soustraction membre à membre, laquelle donne deux circonférences de grands cercles passant au point où se coupent les deux directrices, ce qui démontre le théorème même pour le cas où il n'y a pas de points réels communs aux deux courbes.

THÉORÈME. *Si deux coniques ont un foyer commun, que par ce point on mène un arc coupant les courbes en deux points A , B , qu'aux points A et b on mène deux tangentes, le lieu de leur point de rencontre sera une circonférence de grand cercle passant par la rencontre de directrices.*

Soient O le foyer commun, OCD une perpendiculaire sur Ob prolongée jusqu'à la rencontre des directrices aux points C et D , les arcs Cb et DA seront les tangentes aux

points b et A ; abaissons les arcs il et is perpendiculaires

FIG. 3.



sur les directrices, et iK perpendiculaire sur OC , enfin bq et ag perpendiculaires sur les directrices. Nous aurons

$$\frac{\sin il}{\sin iK} = \frac{\sin bq}{\sin bK} = \alpha, \text{ rapport constant,}$$

et

$$\frac{\sin iK}{\sin iS} = \frac{\sin AO'}{\sin Ag} = \frac{1}{\alpha'}, \text{ rapport constant ;}$$

de là en multipliant

$$\frac{\sin il}{\sin iS} = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Donc le lieu du point i est une circonférence de grand cercle passant au point x , intersection des bissectrices, et aussi par les deux points communs aux deux courbes.

PROBLEME. *Trouver l'équation générale des courbes du second degré passant par quatre points ADCD et le lieu de leurs centres.*

La première partie se traite comme pour les courbes planes, et l'on trouve, en prenant pour axe des x l'arc qui passe par deux des points A, B et CD pour axe

des y ,

$$(1) \left(\frac{y}{\beta} - 1\right) \left(\frac{y}{\beta'} - 1\right) + \left(\frac{x}{\alpha} - 1\right) \left(\frac{x}{\alpha'} - 1\right) + 2B \cdot xy = 1,$$

B est une indéterminée; $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ les coordonnées des points. Pour avoir le lieu des centres, on prendra les deux équations qui donnent ce point, et l'on éliminera B. On trouve ainsi une équation du troisième degré. Si l'on suppose

$$\beta = \beta', \quad \alpha = \alpha',$$

l'équation (1) deviendra

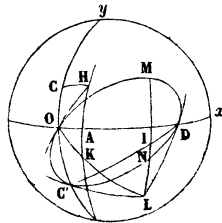
$$\left(\frac{y}{\beta} - 1\right)^2 + \left(\frac{x}{\alpha} - 1\right)^2 + 2Bxy = 1;$$

c'est l'équation des courbes du second degré, tangentes aux deux axes en deux points donnés. Le premier membre de l'équation du centre est alors divisible par le facteur $\frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} - 1$, qui, égal à zéro, représente la circonférence passant par les deux points de contact. Le lieu des centres est donc une conique sphérique dont l'équation est

$$y^2 - x^2 + \frac{y}{\beta} - \frac{x}{\alpha} = 0.$$

Nous allons construire cette courbe en supposant les axes Ox , Oy rectangulaires.

FIG. 4.



Soit $OA = \alpha'$, arc dont la tangente égale α , $OC = \beta'$; la courbe passe à l'origine, et pour trouver la tangente en ce point, il suffit de joindre l'origine au point H ayant pour coordonnées α' , β' . Si le rayon de la sphère devenait infini, le lieu des centres se réduirait à cette tangente, qui serait alors une ligne droite.

Si l'on fait $y = 0$, on trouve $x = -\frac{1}{\alpha}$; si donc on prend un quadrant à partir de A, on a un point D de la courbe. Si l'on calcule pour ce point le coefficient de la tangente, on trouve $-\frac{\beta}{\alpha}$, en sorte que si l'on joint O au point K symétrique de H, l'arc OK ira rencontrer la tangente en D, qui a le même coefficient que OK à 90 degrés de l'origine. Soit donc $OKL = \frac{\pi}{2}$, l'arc DL sera la tangente en D. On trouve de même la rencontre de la courbe avec l'axe des y ; elle se construit en prenant $OC' = \frac{\pi}{2} - CO$, et la tangente en C' s'obtient en joignant L au point C'. Ayant trois points et leurs tangentes, la courbe est déterminée, et l'on peut, au moyen du théorème de l'hexagone de Pascal, obtenir autant de points qu'on voudra géométriquement. On peut encore remarquer que le point L étant à $\frac{\pi}{2}$ de l'origine, si par ce point on mène des arcs sécants (m, n) , le centre des moyennes distances des points m, n et de leurs analogues sous une circonférence de grand cercle joignant les points de contact C' et D; en sorte que si nous appelons I la rencontre C'D avec mn , le point I satisfera à l'équation

$$\text{tang } y = \frac{\text{tang } y' + \text{tang } y''}{2},$$

$\gamma, \gamma', \gamma''$ étant les ordonnées des trois points L, m, n , et de même à l'équation

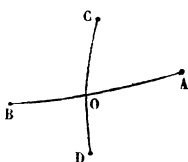
$$\text{tang } x = \frac{\text{tang } x' + \text{tang } x''}{2}.$$

On peut conclure du problème précédent, par la considération des ellipses supplémentaires, que le lieu des centres des ellipses tangentes à quatre grands cercles donnés est aussi une courbe du troisième degré.

PROBLÈME. *Trouver l'équation d'une conique sphérique passant par quatre points, connaissant en un de ces points la direction de la tangente.*

Choisissant les axes comme dans le problème précé-

FIG. 5.



dent, nous avons l'équation d'une courbe passant par les quatre points donnés, savoir

$$(\epsilon y - 1)(\epsilon' y - 1) + (\alpha x - 1)(\alpha' x - 1) + Bxy = 1,$$

en appelant, pour plus de simplicité, α la cotangente du segment OA, α' , etc. Si nous désignons par $\frac{1}{m}$ le coefficient angulaire de la tangente au point A, nous aurons

$$\frac{1}{m} = - \frac{\varphi'_x \left(0, \frac{1}{\alpha} \right)}{\varphi'_y \left(0, \frac{1}{\alpha} \right)};$$

tirant B de cette dernière relation, nous trouvons pour

équation de la courbe

$$(\epsilon y - 1)(\epsilon' y - 1) + (\alpha x - 1)(\alpha' x - 1) \\ + [\epsilon + \epsilon' + (\alpha - \alpha')m] \alpha x y = 1.$$

Remarque. On peut trouver l'équation générale des coniques passant par quatre points A, B, C, D, sans donner aux axes une position particulière. Pour cela soit

$$\epsilon y + \alpha x - 1 = 0$$

l'équation de la circonférence passant par deux des points A, B, et

$$\epsilon' y + \alpha' x - 1 = 0,$$

celle qui passe par les deux autres ; soit aussi

$$\gamma y + \delta x - 1 = 0,$$

la circonférence menée par A et C, et enfin

$$\gamma' y + \delta' x - 1 = 0,$$

l'équation de la circonférence menée par les points B et D; si nous posons l'équation

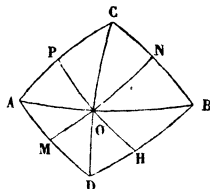
$$(\alpha x + \epsilon y - 1)(\alpha' x + \epsilon' y - 1) \\ + \lambda (\delta x + \gamma y - 1)(\delta' x + \gamma' y - 1) = 0$$

(analyse de MM. Briot et Bouquet), il est évident que les coordonnées d'un quelconque des quatre points donnés vérifieront cette équation; λ étant indéterminé : c'est donc l'équation générale des courbes du second degré passant par les quatre points; λ se détermine comme dans les problèmes précédents, si l'on donne un cinquième point, ou le coefficient angulaire de la tangente en un des quatre points donnés.

PROBLEME. *Trouver l'équation générale des coniques sphériques tangentes à quatre circonférences de grand cercle données.*

Nous prendrons pour axes les diagonales du quadrila-

FIG. 6.



tère formé par les quatre tangentes. Soit

$\text{tang } OB = \alpha$, $\text{tang } OA = \alpha'$, $\text{tang } OC = \epsilon$, $\text{tang } OD = \epsilon'$,

l'angle $COB = \theta$.

Représentons par

$$y = Ax$$

l'équation de l'arc MN passant par deux points de contact opposés; l'autre arc PH aura pour équation

$$y = -Ax;$$

nous l'avons démontré précédemment, en faisant voir que les quatre arcs se coupant au point O forment un faisceau harmonique.

Cela posé, il sera facile d'avoir les coordonnées du point N , intersection de deux cercles dont on a les équations, on trouve

$$x = \frac{\alpha \epsilon}{\epsilon + A\alpha}, \quad y = \frac{x \epsilon A}{\epsilon + A\alpha}.$$

Les coordonnées des points M , H , P se trouvent par des formules analogues. On connaît d'ailleurs le coefficient angulaire de la tangente en N . Or on sait, par une formule précédemment établie, trouver l'équation d'une conique passant par quatre points, connaissant le coefficient de la tangente en un de ces points; cette équation.

(206)

aura l'indéterminée Λ , ce sera donc l'équation générale des coniques tangentes à quatre circonférences données. Si on lui applique les deux équations qui donnent le centre en éliminant entre elles Λ , on aura le lieu des centres.
