

CREMONA

Solution de la question 464

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 149-151

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__149_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 464

(voir t. XVIII, p. 117);

PAR M. CREMONA,
Professeur à Crémone (*).

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les distances d'un point quelconque à quatre plans donnés; il est évident que l'équation la plus générale d'une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre formé par les quatre plans

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

(*) Maintenant professeur, au lycée à Milan.

sera

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta + \lambda x\delta + \mu\beta\delta + \nu\gamma\delta = 0.$$

Cette surface est coupée par le plan $\delta = 0$ suivant la conique

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0.$$

Soient α' , β' , γ' les distances d'un point quelconque du plan $\delta = 0$ aux côtés du triangle $\delta = 0$ ($\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$) : triangle formé par l'intersection du plan δ avec les plans α , β , γ ; on a

$$\alpha = \alpha' \sin \alpha\delta, \quad \beta = \beta' \sin \beta\delta, \quad \gamma = \gamma' \sin \gamma\delta,$$

où $\alpha\delta$ est l'angle des plans $\alpha = \delta = 0$, etc. Donc l'équation de la conique rapportée au triangle inscrit sera

$$\frac{l}{\alpha' \sin \alpha\delta} + \frac{m}{\beta' \sin \beta\delta} + \frac{n}{\gamma' \sin \gamma\delta} = 0 \quad (\text{Salmon}).$$

Les angles du triangle sont $\beta\delta\gamma$, $\gamma\delta\alpha$, $\alpha\delta\beta$ où $\beta\delta\gamma$ (*) exprime l'angle que fait l'intersection des faces $\beta = \delta = 0$ avec l'intersection des faces $\gamma = \delta = 0$. On sait que la conique représentée par l'équation ci-dessus est une circonférence, si l'on a

$$l : m : n = \sin \alpha\delta \cdot \sin \beta\delta\gamma : \sin \beta\delta \cdot \sin \gamma\delta\alpha : \sin \gamma\delta \cdot \sin \alpha\delta\beta.$$

(Salmon.)

De même, si les plans $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ coupent la surface suivant des circonférences, on aura

$$\begin{aligned} l : \mu : \nu &= \sin \delta\alpha \cdot \sin \beta\alpha\gamma : \sin \gamma\alpha \cdot \sin \delta\alpha\beta : \sin \beta\alpha \cdot \sin \gamma\alpha\delta, \\ m : \nu : \lambda &= \sin \delta\beta \cdot \sin \gamma\beta\alpha : \sin \alpha\beta \cdot \sin \delta\beta\gamma : \sin \gamma\beta \cdot \sin \alpha\beta\delta, \\ n : \lambda : \mu &= \sin \delta\gamma \cdot \sin \alpha\gamma\beta : \sin \beta\gamma \cdot \sin \delta\gamma\alpha : \sin \alpha\gamma \cdot \sin \beta\gamma\delta. \end{aligned}$$

(*) $\beta\delta\gamma$ est l'angle qui, dans l'énoncé de la question, a été désigné par ($\delta\delta$, $\gamma\delta$). P.

De là on tire immédiatement que $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ sont proportionnelles aux quantités

$$\frac{\sin \alpha \delta}{\sin \beta \gamma} \sin \beta \alpha \gamma . \sin \beta \delta \gamma ,$$

$$\frac{\sin \beta \delta}{\sin \gamma \alpha} \sin \gamma \beta \alpha . \sin \gamma \delta \alpha ,$$

$$\frac{\sin \gamma \delta}{\sin \alpha \beta} \sin \alpha \gamma \beta . \sin \alpha \delta \beta ,$$

$$\frac{\sin \beta \gamma}{\sin \alpha \delta} \sin \alpha \beta \delta . \sin \alpha \gamma \delta ,$$

$$\frac{\sin \gamma \alpha}{\sin \beta \delta} \sin \beta \gamma \delta . \sin \beta \alpha \delta ,$$

$$\frac{\sin \alpha \beta}{\sin \gamma \delta} \sin \gamma \alpha \delta . \sin \gamma \beta \delta ,$$

ce qui démontre le théorème de M. Prouhet.