

O. BOKLEN

Théorème sur les courbures des lignes

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 136-141

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__136_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LES COURBURES DES LIGNES;

PAR M. O. BOKLEN (DE SULZ, WURTEMBERG).

1. Étant donnée une ligne quelconque sur une surface, ρ' étant le rayon de courbure de la ligne, désignons par φ l'angle que son plan osculateur fait avec le plan tangent de la surface, par a l'angle que la ligne fait avec une ligne de courbure, par R et R' les rayons de courbure principaux; on a

$$(1) \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'} \right).$$

Pour le démontrer, soit ρ le rayon de courbure de la section normale de la surface qui passe par la tangente de la ligne; on a, d'après les théorèmes connus d'Euler et de Meunier,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}, \quad \rho' = \rho \cdot \sin \varphi;$$

donc, etc.

2. Le rayon de courbure ρ' de la ligne est donné ici par quatre variables φ , a , R et R' ; supposons, par exemple, que dans une certaine ligne φ soit une fonction donnée de ρ' , l'équation

$$(2) \quad f(\rho') = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}$$

exprimera toutes les lignes sur les surfaces où l'angle du plan osculateur de la courbe et du plan tangent à la surface est une fonction donnée du rayon de courbure de la ligne.

Si cet angle est constant, on a

$$(3) \quad \frac{1}{\rho'} = \text{const.} \times \left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'} \right),$$

et si la constante dans cette équation est égale à l'unité, nous avons

$$(4) \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}.$$

cette formule se rapporte aux lignes géodésiques, dont le plan osculateur est normal à la surface, c'est-à-dire où l'angle φ est égal à 90 degrés.

Pour montrer l'application de cette équation, prenons le cas des lignes géodésiques sur l'ellipsoïde; ici on a en coordonnées elliptiques

$$R = \frac{(\rho^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} (\rho^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho (\rho^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} (\rho^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad R' = \frac{(\rho^2 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho (\rho^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} (\rho^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}};$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (4), on trouve après quelques réductions

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\rho (\rho^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} (\rho^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}} [\rho^2 - (\mu^2 \cos^2 a + \nu^2 \sin^2 a)].$$

D'après M. Liouville, on a

$$\mu^2 \cos^2 a + \nu^2 \sin^2 a = \text{const.};$$

$D = (\rho^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}$, $D' = (\rho^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}$, sont les demi-diamè-

tres de l'ellipsoïde, parallèles aux lignes de courbure ; donc nous avons

$$\frac{D^3 D'^3}{\rho} = \text{const.}$$

pour les lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

3. Dans les surfaces où R et R' sont de même signe, d'après l'équation (1), ρ' ne peut pas devenir égal à l'infini, et par conséquent trois points consécutifs d'une courbe sur ces surfaces ne sont jamais en ligne droite.

Mais dans les cas où R et R' sont de signes différents, $\frac{1}{\rho'}$ est égal à zéro, si

$$\text{tang } a = \pm \sqrt{\frac{R'}{R}}.$$

4. Dans les surfaces développables, les formules précédentes se simplifient remarquablement ; on a alors au lieu de (1)

$$(5) \quad \rho' = \frac{\sin \varphi \cdot R}{\cos^2 a},$$

et pour les lignes géodésiques

$$(6) \quad \rho = \frac{R}{\cos^2 a}.$$

5. Soient X, Y, Z les quotients différentiels de l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

on a pour les lignes géodésiques

$$(Y dz - Z dy) d^2 x + (Z dx + X dz) d^2 y + (X dy - Y dx) d^2 z = 0,$$

et pour les lignes de courbure

$$Y dz - Z dy) dX + Z dx - X dz) dY + (X dY - Y dx) dZ = 0$$

Désignons, pour abréger, ces deux équations par

$$J = 0, \quad J' = 0;$$

M. Joachimsthal a prouvé (*), en employant une formule de Jacobi, que l'on a

$$J.J' = \frac{dX d^2x + dY d^2y + dZ d^2z}{dX dx + dY dy + dZ dz} + \frac{X dx + Y dy + Z dz}{X^2 + Y^2 + Z^2} - \frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0.$$

Supposons que

$$(7) \quad F(p, p', \dots) = C$$

soit une intégrale de cette équation différentielle; C est une constante, p, p', \dots sont certains paramètres, par exemple : les diamètres de la surface qui sont parallèles aux tangentes ou aux tangentes conjuguées des lignes géodésiques et de courbure auxquelles l'équation (7) se rapporte; des rayons de courbure de sections normales qui passent par ces tangentes; des perpendiculaires abaissées du centre sur ces tangentes ou sur les plans tangents; des distances polaires (Journal de M. Liouville, t. XIII, p. 415), etc. Comme l'équation (7) représente en même temps les lignes de courbure et les lignes géodésiques, elle doit établir la liaison intime qui existe entre ces deux espèces de lignes; et l'on pourra en général dire, du moins dans tous les cas où il n'y a pas d'autres paramètres dans l'équation (7) que ceux que je viens de citer, que la constante C a la même valeur pour toutes les lignes géodésiques qui sont tangentes à la même ligne de courbure. Maintenant nous pourrions distinguer plusieurs espèces de surfaces :

1°. Surfaces où à chaque ligne de courbure convient une valeur spéciale de C, différente des autres.

(*) Nous nous proposons de donner cette démonstration. Tm.

Une ligne géodésique ne peut être tangente qu'à une seule ligne de courbure; elle coupera toutes les autres qu'elle rencontre. Pour toutes les lignes géodésiques qui sont tangentes à la même ligne de courbure dans les points où elles rencontrent une autre ligne de courbure, la constante C aura la même valeur dont nous avons l'équation

$$F(p, p', \dots) = F(p_0, p'_0, \dots),$$

qui établit des rapports entre les paramètres p, p', \dots et p_0, p'_0, \dots pour les points de rencontre.

Si la surface a un ombilic, ce sera de même une valeur particulière de C qui lui correspond; donc toutes les lignes géodésiques qui passent par un ombilic couperont les lignes de courbure sans toucher aucune d'elles. Prenons, par exemple, une surface conique et développons-la dans un plan. Les lignes de courbure se changeront en cercles concentriques et les lignes géodésiques en droites, et comme une droite ne peut toucher qu'un seul des cercles concentriques, et qu'elle coupe tous les autres cercles, les lignes géodésiques sur les surfaces coniques ne touchent qu'une seule ligne de courbure et coupent toutes les autres.

2°. Surfaces où une même valeur de C correspond à deux lignes de courbure.

Chaque couple de telles lignes divisera la surface en trois parties ou zones, Z, Z', Z'' , dont elles enferment la moyenne Z' . Toutes les lignes géodésiques qui touchent la première ligne de courbure traverseront la zone Z' en coupant toutes les lignes de courbure qui s'y trouvent, puis elles toucheront la seconde ligne de courbure qui limite cette zone, et après elles parcourront une seconde fois cette zone, et ainsi de suite, en y formant des tours innombrables qui sont limités par les deux lignes de courbure. Si ces surfaces ont des ombilics, elles en auront en général quatre, auxquels convient la même va-

leur de C ; toutes les lignes géodésiques qui partent d'un même ombilic se coupent dans un autre ombilic. Voici des exemples de ces surfaces : la sphère, l'ellipsoïde, les hyperboloïdes ; les surfaces de révolution qui sont symétriques par rapport à un plan équatorial, perpendiculaire à l'axe de révolution, et en général aussi les autres surfaces qui sont symétriques par rapport à un plan.

3°. Si la même valeur de C convient à plus de deux lignes de courbure, on ne pourra en général dire que les lignes géodésiques sont enfermées dans des zones limitées par deux lignes de courbure seulement ; mais il peut arriver que la même ligne géodésique touche trois ou plus de lignes de courbure. Développons, par exemple, une surface développable dans un plan, l'arête de rebroussement se changera en une courbe plane ; les tangentes de cette courbe et celles des courbes parallèles qui coupent orthogonalement les tangentes à l'arête de rebroussement, sont les transformées des lignes de courbure, des lignes droites tracées dans le plan sont les transformées des lignes géodésiques. Or il arrivera souvent que les droites touchent trois ou plus des courbes parallèles, et dès lors on conclura que dans une surface développable les lignes géodésiques peuvent toucher trois ou plus de lignes de courbure (*).
