

POUDRA

Homographie

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19
(1860), p. 108-111

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__108_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

HOMOGRAPHIE;

PAR M. POUDDRA.

PROBLÈME. *Étant donnés cinq points a, b, c, d, e appartenant à une figure quelconque de l'espace, et les cinq points homologues a', b', c', d', e' d'une figure homographique à la première, on demande de construire cette deuxième figure par des moyens analogues à ceux de la perspective.*

Les quatre points a, b, c, d peuvent être considérés comme sommets d'une pyramide triangulaire; soit abc la base et d le sommet.

Soit de même a', b', c', d' la pyramide homologue, et $a'b'c'$ la base, et d' le sommet.

La droite de qui joint le cinquième point e de la première figure à d , rencontrera le plan abc en un point f , qui sera homologue du point f' , où la droite $d'e'$ de la deuxième figure rencontrera le plan $a'b'c'$.

Supposons dans le plan abc une figure appartenant au sujet donné, et dont font partie les quatre points a, b, c, f homologues à ceux a', b', c', f' contenus dans le plan $a'b'c'$ de la deuxième figure.

Ces deux figures planes situées dans les plans $abc, a'b'c'$ sont homographiques entre elles, et par suite homologues; il s'ensuit qu'elles peuvent se mettre en perspective; il suffit pour cela de placer en perspective les deux quadrilatères $abcf, a'b'c'f'$.

Soit O le point de vue. Regardons ce point comme appartenant à la première figure; il lui correspondra dans la deuxième un point O' , qu'on déterminera ainsi : On

joint o à d et à e ; ces deux droites od , oe rencontrent le plan abc aux points respectifs g et h , qui ont pour homologues les points g' et h' , où ces mêmes droites rencontrent le plan $a'b'c'$. Joignons g' à d' et h' à e' . Ces deux droites $g'd'$, $h'e'$ seront dans le même plan, déterminé par les deux droites $f'g'h'$ et $f'e'd'$; donc elles se rencontreront en un point O' homologue de O .

D'après cela, il est très-facile de déterminer le point M' de la deuxième figure, qui est l'homologue d'un point quelconque M de la première. En effet, 1° la droite MO rencontre le plan abc en un point m , et le plan $a'b'c'$ en un point homologue m' . La droite $O'M'm'$ est donc l'homologue de la droite OMm , et passera par le point M' cherché. 2°. Joignons le point M à un point de la première figure, tel que d , dont on connaît l'homologue d' ; cette droite Md rencontrera le plan abc en un point i , dont l'homologue i' sera à l'intersection du plan $a'b'c'$ et de la droite $O'i'$; il en résultera que la droite Mdi aura pour homologue la droite $M'd'i'$ passant par le point M' , il sera donc à l'intersection de $O'M'm'$ et de $M'd'i'$.

Il résulte de la construction : 1° que la perspective plane de la première figure, sur le plan $a'b'c'$ prise du point O , est la même que celle de la deuxième figure, sur le même plan prise du point O' homologue de O ; et 2° que la perspective plane de la première figure, prise d'un point quelconque M de l'espace, considéré comme appartenant à la première figure, sur le plan abc , étant mise en perspective sur le plan $a'b'c'$ pour le point O , donne sur ce plan $a'b'c'$ une figure qui est la perspective plane de la seconde figure sur ce plan, pour le point M' , homologue de celui M .

Ce qui donne un moyen très-simple de construction d'une figure homographique à une figure donnée, lorsqu'on connaît cinq points homologues des deux figures.

Au moyen des cinq points homologues dans chaque figure, on les place dans la position indiquée ci-dessus, où deux des plans homologues tels que abc , $a'b'c'$ sont en perspective pour un point O ci-dessus déterminé. On construit ensuite deux points homologues tels que M , M' . Alors la construction s'achève comme il suit :

Pour déterminer d'abord le point K' homologue d'un point k , on mène : 1^o la droite KO qui rencontre le plan abc en K et $a'b'c'$ en K' , homologue de K . La droite $K'O'$ passe par le point K' cherché; 2^o on fait la perspective de K sur le plan abc pour le point M . Soit n cette perspective; la droite nO rencontrera le plan $a'b'c'$ au point n' , homologue de n , de sorte que $n'M'$ sera l'homologue de nM , et passera par le point K' .

Pour avoir la droite L' , homologue d'une droite L , on fait d'abord passer par O et la droite L un plan qui coupe $a'b'c'$ suivant une droite, par laquelle et par O' faisant passer un plan, il contiendra la droite cherchée. Ensuite par L et M un autre plan qui coupe celui abc suivant une droite, par laquelle et O on fait passer un plan qui coupe $a'b'c'$ suivant une droite; par cette droite et M' faisant passer un autre plan, il contiendra la droite cherchée; donc, etc.

Entre deux figures homographiques ainsi placées, il existe, outre les relations métriques connues, les relations descriptives suivantes :

1^o. Les deux figures ont pour droite commune l'intersection des deux plans abc , $a'b'c'$.

2^o. Elles ont la droite OO' commune, mais seulement en direction; on voit, en effet, que O' est l'homologue de O .

3^o. Dans deux figures homologues, les droites et les plans homologues étant prolongés, se rencontrent sur le plan dit d'*homologie*; dans les deux figures homographi-

ques ci-dessus, les deux plans abc , $a'b'c'$ font l'office de plans homologues de la manière suivante, c'est que les droites et les plans de la première figure étant prolongés jusqu'au plan abc , et celles homologues de la deuxième jusqu'au plan homologue $a'b'c'$, il en résultera deux figures planes qui sont en perspective.

4°. La perspective plane de la première figure sur le plan abc pris d'un point quelconque de l'espace, et celle de la deuxième sur le plan $a'b'c'$ pris du point de vue homologue, sont deux figures en perspective pour le même point de vue O ; d'où résulte que si les points de vue homologues sont O et O' , la perspective de la première figure sur le plan $a'b'c'$, prise de O , sera la même que celle de la deuxième, sur le même plan, prise de O' .

5°. Au plan à l'infini de la première figure correspond dans la deuxième un plan I à distance finie, et réciproquement aux points à l'infini de la deuxième, correspondent des points situés dans un plan J à une distance finie.

Dans les figures homologues de l'espace, ou ce que j'ai nommé *perspectives-reliefs*, il y a un plan d'homologie et les deux plans I et J qui sont tous les trois parallèles; dans les deux figures homographiques, il y a deux plans d'homologie et les deux plans I et J , et ces quatre plans ne sont généralement pas parallèles; de sorte que si les deux plans d'homologie se réunissent en un seul, les points O et O' se réunissent aussi, les plans I , J et le plan d'homologie deviennent parallèles, et alors les deux figures sont homologues.
