

AELT

Note sur quelques courbes à double courbure

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 19 (1860), p. 100-107

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1860_1_19__100_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1860, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR QUELQUES COURBES A DOUBLE COURBURE ;

PAR M. AELT

I.

Déterminer, parmi les diverses courbes isopérimètres tracées sur une surface quelconque, celle qui renferme une aire maximum sur cette surface.

Ce problème a été traité à l'aide du calcul des variations, par M. Delaunay (*Journal de M. Liouville*, t. VIII, p. 241). Quelques considérations de géométrie infinitésimale me permettront d'en donner une solution en quelque sorte élémentaire.

Je pose d'abord en principe que, deux surfaces S et S' se touchant suivant une courbe AB , s'il arrive que cette courbe AB jouisse d'une propriété de maximum ou de minimum par rapport à toutes les courbes voisines tracées sur S , elle jouira de la même propriété par rapport aux courbes voisines tracées sur S' .

En effet, conformément à la théorie des maxima et minima, les lignes tracées sur S et qu'il faudrait comparer à la ligne AB pour vérifier dans celle-ci une propriété de maximum ou de minimum, doivent en être *infinitement voisines*. En d'autres termes, les éléments de ces courbes voisines sont nécessairement compris sur les divers plans qui touchent la surface S le long de AB . Ces éléments appartiennent donc aussi à la surface S' ; ce qui prouve le principe.

On pourrait établir cette vérité au moyen du calcul des variations; mais ce serait faire perdre à cette Note le caractère que j'ai voulu lui donner.

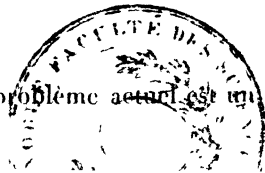
Quant au problème de tracer sur une surface une ligne de périmètre donné passant par des points fixes A et B, et comprenant une aire maximum, il faut entendre qu'entre ces deux points on a tracé une première courbe, par exemple une ligne géodésique. L'aire maximum sera limitée par cette première courbe et par la courbe cherchée qui doit avoir un périmètre donné. On peut aussi ne donner sur la surface en question aucun point, et demander d'y tracer une courbe fermée qui sous un périmètre donné renferme la plus grande aire, ou bien qui circonscrive une aire donnée dans le plus petit périmètre; car ces deux questions n'en font qu'une.

Si la surface donnée est un plan, on sait que toutes ces questions se résolvent par des arcs de cercle ou par des circonférences. Dans le cas général j'imagine une surface développable touchant la surface donnée tout le long de la ligne demandée. Considérée comme appartenant à la surface auxiliaire, cette ligne, en vertu du principe ci-dessus énoncé, y jouira de la même propriété que sur la surface donnée, c'est-à-dire qu'elle y renfermera sous un périmètre donné la plus grande aire possible. Dès lors il est clair que si l'on fait le développement (sur un plan) de la surface auxiliaire, la ligne en question deviendra soit un arc de cercle, soit une circonférence entière.

Admettons d'ailleurs, ce que je démontrerai à l'instant, que, si l'on fait la transformée plane d'une courbe tracée sur une surface développable, on a entre le rayon ρ de première courbure de cette courbe, l'angle α de son plan osculateur avec le plan tangent à la surface développable, et le rayon de courbure r de la transformée plane, la relation

$$\rho = r \cos \alpha.$$

Comme la transformée dans le problème actuel est un



arc de cercle, r est constant; et l'on obtient aussitôt ce résultat que M. Delaunay tire de l'équation différentielle de la courbe, et qui au besoin pourrait faire retrouver cette même équation, savoir que : *En chacun de ses points, le rayon de courbure de la courbe demandée est proportionnel au cosinus de l'angle formé par son plan osculateur avec le plan tangent à la surface.*

L'auteur imagine ensuite une sphère contenant le cercle osculateur de la courbe cherchée, et, de plus, ayant son centre sur le plan tangent de la surface. Il est aisé de voir que le rayon de cette sphère est égal à $\frac{\rho}{\cos \alpha}$. Il est donc constant, ce qui est une très-belle propriété, et notamment il est égal au rayon du cercle dans lequel la courbe cherchée se transforme par le développement de notre surface auxiliaire.

II.

Pour établir la propriété dont nous venons de faire usage, considérons deux faces consécutives du polyèdre infinitésimal que, conformément à la méthode des infiniment petits, on substitue idéalement à la surface développable. Soit A le point où la courbe proposée rencontre l'intersection de ces deux faces. J'appelle AT le prolongement au delà du point A de l'élément de courbe qui est sur la première de ces deux faces, et AT' l'élément même qui est sur la seconde. Ainsi le plan des deux lignes AT, AT' est le plan osculateur; il forme avec le plan de la première face un angle dièdre α dont l'arête est la ligne AT. Cependant rabattons la deuxième face sur la première; la ligne AT' viendra y prendre une position AT'' qui est en réalité la projection de AT' sur cette première face; l'angle trièdre AT'T'' a donc un angle droit suivant l'arête AT'', et un angle représenté par α suivant l'arête AT.

D'ailleurs les faces TAT' et TAT'' sont respectivement les angles de contingence de la courbe primitive et de sa transformée plane. Si on les appelle ε et θ , la propriété connue des triangles sphériques rectangles donnera

$$\text{tang } \theta = \text{tang } \varepsilon \cdot \cos \alpha,$$

ou plutôt, à cause des infiniment petits,

$$\theta = \varepsilon \cdot \cos \alpha.$$

Soit maintenant ds l'élément de la courbe primitive, élément qui ne change pas de grandeur dans la transformation; on a à la fois

$$ds = \rho \varepsilon \quad \text{et} \quad ds = r \cdot \theta;$$

de là il est aisé de conclure (*) la relation

$$\rho = r \cos \alpha.$$

III.

De la ligne géodésique sur une surface quelconque.
 Concevons une surface développable tangente à la sur-

(*) Depuis longtemps (1843) M. Catalan a déduit de l'équation différentielle donnée par M. Delaunay pour la courbe qui, parmi celles de longueur donnée, comprend sur une surface quelconque une aire maximum, la propriété de cette même courbe d'avoir pour transformée plane un arc de cercle lorsqu'on la considère comme appartenant à la surface développable que j'ai définie dans le texte sous le nom de *surface auxiliaire* (voir *Journal de l'École Polytechnique*, 29^e cahier, p. 151). M. Catalan a démontré aussi la relation entre le rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface développable et celui de sa transformée plane (*Comptes rendus*, t. XVII, p. 738). Mais outre que la démonstration donnée par M. Catalan pour ce second théorème est aussi purement analytique, M. Catalan n'a pas montré l'emploi de la relation $\rho = r \cos \alpha$ pour établir les théorèmes de M. Delaunay. D'après tout cela, j'ai pu croire que mon travail offrirait au moins par sa forme, sinon par la nouveauté du fond, quelque intérêt aux lecteurs des *Nouvelles Annales*. On peut voir aussi pour la relation $\rho = r \cos \nu$ l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* de Monge, 5^e édition (1850); notes de M. Liouville, p. 576.

face proposée tout le long de la ligne géodésique; celle-ci sera également géodésique par rapport à la surface auxiliaire, et par conséquent sa transformée plane sera une ligne droite. Ainsi dans le cas actuel r est infini, de sorte que $\cos \alpha$ est nul; d'où on peut déduire ce résultat bien connu, que le plan osculateur de la ligne géodésique est constamment perpendiculaire au plan tangent.

IV.

En 1851 on a proposé pour le concours d'agrégation la question suivante, traitée avec élégance par M. Dieu dans les *Nouvelles Annales* (t. IX, p. 33) : *Trouver l'équation différentielle des courbes planes qui, enroulées sur un cylindre droit à base circulaire, donnent des courbes dont le rayon de première courbure est constant.*

Pour résoudre cette question, je remarquerai ici et je démontrerai à l'instant que si r est le rayon de courbure d'une courbe plane, R le rayon du cylindre sur lequel on l'enveloppe, ω l'angle que la tangente de la courbe enveloppée forme avec l'arête du cylindre, et α l'angle entre son plan osculateur et le plan tangent, on a la relation très-simple

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{r \sin^2 \omega}{R}.$$

Or, si l'on élimine α entre cette équation et la relation précédemment obtenue

$$\rho = r \cos \alpha,$$

il viendra

$$r^2 = \frac{R^2 \rho^2}{R^2 - \rho^2 \sin^4 \omega}.$$

R et ρ sont ici des quantités constantes, et cette équation peut être considérée comme exprimant la propriété ca-

ractéristique de la courbe plane demandée; si l'on y remplace r rayon de courbure, et ω angle de la tangente avec une perpendiculaire à la base du cylindre développée en ligne droite, par leurs valeurs connues au moyen des dérivées de la fonction qui exprime l'ordonnée de la courbe, on obtiendra l'équation différentielle demandée. Mais déjà sous la forme présente on peut reconnaître que si le rayon de courbure ρ de la courbe enroulée doit surpasser le rayon R du cylindre, on pourra par chaque point de la surface cylindrique faire passer deux hélices satisfaisant à la condition voulue. En effet, en supposant deux droites menées sous les angles déterminés par la condition

$$\sin \omega = \pm \sqrt{\frac{R}{\rho}},$$

l'équation caractéristique ci-dessus est satisfaite, puisqu'en même temps le rayon de courbure r est infini. Si l'on devait avoir $\rho = R$, ces deux hélices n'existeraient plus, ou mieux elles se confondraient en chaque point du cylindre avec sa section droite.

V.

Voici comment se démontre la propriété énoncée dans le précédent paragraphe :

Considérons deux faces consécutives du prisme droit infinitésimal qu'on substitue idéalement au cylindre. La droite intersection de ces deux faces, et, sur chacune d'elles, les éléments correspondants de la courbe enroulée, forment les trois arêtes d'un angle trièdre dans lequel on connaît deux faces et l'angle compris. En effet, les deux faces contigües à l'arête du prisme sont ω , et $\pi - \omega - d\omega$. Quant à l'angle de ces deux faces, il est le supplément de l'angle de contingence de la section droite.

Donc, puisque R est le rayon du cylindre, si $d\sigma$ représente l'élément du cercle de base, l'angle en question est $\pi - \frac{d\sigma}{R}$. Or si l'on appelle ds l'élément de l'arc de courbe enroulée, on a

$$d\sigma = ds \cdot \sin \omega ;$$

de sorte qu'en appelant A l'angle du dièdre suivant l'arête du prisme, b et c les faces adjacentes, on a pour ces trois éléments les valeurs suivantes

$$A = \pi - \frac{\sin \omega \cdot ds}{R}, \quad b = \omega, \quad c = \pi - \omega - d\omega.$$

Or l'angle C opposé à la face c est donné par la formule de trigonométrie sphérique

$$\cot c \cdot \sin b = \cot C \cdot \sin A + \cos b \cdot \cos A,$$

qui à cause des valeurs ci-dessus devient

$$\begin{aligned} & - \cot(\omega + d\omega) \cdot \sin \omega \\ & = \cot C \cdot \sin \left(\frac{\sin \omega \cdot ds}{R} \right) - \cos \omega \cos \left(\frac{\sin \omega \cdot ds}{R} \right); \end{aligned}$$

en réduisant et en ne conservant que les infiniment petits du premier ordre, on tire aisément de cette dernière équation la relation suivante

$$\text{tang } C = \frac{r \sin^2 \omega}{R}.$$

Or l'angle C est ici l'angle du plan des deux éléments consécutifs de la courbe enroulée avec la première face du prisme, c'est-à-dire l'angle du plan osculateur avec le plan tangent; c'est ce que nous appelions α dans les paragraphes précédents.

VI.

En suivant une marche analogue, on démontrera que si l'on fait la transformée plane d'une courbe tracée sur un cône de révolution dont le demi-angle au centre est θ , on a la relation

$$\text{tang } \alpha = \frac{r \sin^2 \omega}{(l + r \sin \omega) \text{ tang } \theta},$$

dans laquelle l est la distance du point correspondant de la courbe donnée au sommet du cône, et par conséquent le rayon vecteur de la transformée, ω l'angle de la tangente de cette transformée avec son rayon vecteur; r son rayon de courbure; α l'angle du plan osculateur de la courbe primitive avec le plan tangent.

Eliminant α entre cette équation et la relation

$$\rho = r \cos \alpha,$$

on obtiendra une équation caractéristique pour *les courbes qui, enroulées sur un cône de révolution, donnent des courbes dont le rayon de première courbure est constant*. Ce qui renferme comme cas particulier la question du concours de 1851. En effet, pour revenir à celle-ci, il suffira de remarquer que, pour passer du cône donné au cylindre de rayon R , il faut concevoir que θ tende vers zéro, et en même temps que $l \text{ tang } \theta$ tende vers R .

Paris, 15 novembre 1859.
