NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1860.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
Rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie, Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

TOME DIX-NEUVIÈME

AUGMENTÉ D'UN

BULLETIN DE BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1860

NOUVELLES ANNALES

DE

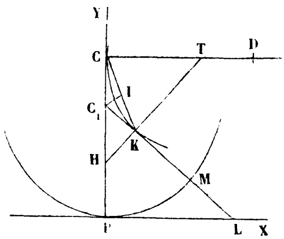
MATHÉMATIQUES.

SOLUTION DE LA QUESTION 493

(voir t. XVIII, p. 444);

PAR M. A. DE JOLIVETTE,
Élève de Spéciales (institution de M. de Lassalle).

Soient P un point d'une conique, C le centre de courbure en P, O le centre de la conique; par C on mène une parallèle à la tangente en P. Soit D le point où cette parallèle est rencontrée par le diamètre OP; on a CD égal au tiers du rayon de courbure de la développée en C. (ABEL TRANSON.)



Supposons la conique rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires; prenons pour axe des Y la normale en P et pour axe des X la tangente au même point:

l'équation de la courbe sera de la forme

$$ay^2 + bxy + x^2 + dy = 0;$$

l'équation de la normale en un point M (x', y') voisin du point P sera

$$y = \frac{2ay' + bx' + d}{by' + 2x'} \cdot x + y' = \frac{2ay' + bx' + d}{by' + 2x'} \cdot x'.$$

Le rayon de courbure R de la conique en P est la limite de l'ordonnée à l'origine de cette normale quand x' tendra vers zéro, d'où

$$R = \lim\left(y' - \frac{2ay' + bx' + d}{by' + 2x'}\right)$$

$$= \lim\left(y' - \frac{2ay' + bx' + d}{b \cdot \frac{y'}{x'} + 2}\right) = -\frac{d}{2}.$$

Car $\lim \frac{y'}{x'}$ étant le coefficient angulaire de la tangente en P est égale à zéro.

La développée sera tangente à l'axe des Y en C et à la normale MC_1 en K; menons HK perpendiculaire à MC_1 et prolongeons jusqu'à la rencontre en T avec C parallèle à l'axe des X.

Lorsque le point M se rapprochera indéfiniment de P, la longueur CT aura pour limite le rayon ρ de courbure de la développée en C.

Les triangles semblables TCH, C_1 PL donnent

$$\frac{CT}{C_1P} = \frac{CH}{PL},$$

d'où

$$\lim \frac{CT}{C_1P} = \frac{\rho}{R} = \lim \frac{CH}{PL},$$

et

$$\rho = -\frac{d}{2} \times \lim \frac{CH}{PL}.$$

On obtiendra la valeur de ρ quand on connaîtra $\left(\lim \frac{CH}{PL}\right)$, dont nous allons nous occuper.

Observons d'abord que

$$\lim \frac{x'}{PL} = 1,$$

ce qui est facile à vérifier en tirant la valeur de PL de l'équation de la normale en M; puis encore que

$$\lim \frac{CH}{2\,CC_1} = 1.$$

En effet le rapport de $\frac{CC_1}{C_1 K}$ tend vers l'unité; car, si l'on joignait le point C au milieu I de la corde CK, cette droite serait le diamètre conjugué de la corde CK dans une parabole tangente aux droites CY, CM aux points C et K; donc l'angle C_1 IC ne peut devenir nul en général, et les rapports $\frac{CC_1}{CI}$, $\frac{C_1 K}{IK}$ de chacune des tangentes CC_1, $C_1 K$ à la moitié de la corde CK tend vers l'unité, d'où résulte

$$1 = \lim \frac{\frac{CC_1}{CI}}{\frac{C_1 K}{IK}} = \lim \frac{CC_1}{C_1 K}$$

et

$$\lim \frac{CH}{2\,CC_1} = \frac{CC_1}{2\,CC_1} + \lim \frac{CH}{C_1 K} \cdot \frac{C_1 K}{2\,CC_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

De là on déduit encore

$$\lim \frac{CH}{PL} = \lim \frac{CH}{2\,CC_1} \times \frac{2\,CC_1}{x'} \times \frac{x'}{PL} = \lim \frac{2\,CC_1}{x'};$$

or

$$CC_1 = R - C_1P = -\frac{d}{2} - y' + \frac{2ay' + bx' + d}{by' + 2x'} \cdot x',$$

$$CC_1 = \frac{4(a-1)x'y' + 2bx'^2 - 2by'^2 - bdy'}{2(by' + 2x')}.$$

Pour avoir la limite, il faut diviser les deux termes par x'^2, et il vient

$$\lim \frac{2\,CC_1}{x'} = b - \frac{bd}{2} \lim \frac{y'}{x'^2};$$

$\lim \frac{y'}{x'^2}$ se déduit facilement de l'équation de la courbe. On l'obtient en divisant ses deux membres par x'^2 et passant à la limite

$$1 + d.\lim \frac{y'}{x'^2} = 0,$$

d'où

$$d \times \lim \frac{y'}{x'^2} = -1.$$

Substituant

$$\lim \frac{2\,CC_1}{x'} = \frac{3b}{2}$$

et

$$\rho = -\frac{3bd}{4}.$$

Cherchons actuellement la partie CD de CT interceptée entre le diamètre PDO et l'axe des Y; l'équation de ce diamètre qui coupe en parties égales les cordes parallèles à l'axe des X est

$$by + 2x = 0.$$

CD est la valeur absolue de l'abscisse corrrespondante à $y = -\frac{d}{2}$, ou $-\frac{bd}{4}$ qui est le tiers de $\left(-\frac{3bd}{4} = \rho\right)$, ce qui démontre le théorème énoncé.

SOLUTION DE LA QUESTION :

Trouver la limite vers laquelle tend le rapport du vide au plein dans une pile de boulets, lorsque le nombre des boulets augmente indéfiniment ;

Par M. FLEURY,
Chef d'institution à Saint-Étienne.

Un boulet repose sur trois autres dans la pile triangulaire et sur quatre dans la pile quadrangulaire, ce qui pourrait faire croire que le rapport cherché ne sera pas le même dans les deux cas; mais on peut remarquer que, dans l'un comme dans l'autre cas, chaque boulet de l'intérieur de la pile est en contact avec douze autres, et que les centres de ces douze boulets sont les sommets d'un polyèdre qui a pour faces six carrés et huit triangles équilatéraux. Le rapport du vide au plein dans un de ces polyèdres ne donne pas le résultat cherché, parce qu'on ne peut les juxtaposer sans laisser d'intervalles vides entre eux, tandis qu'on le peut très-bien pour les cubes formés en prolongeant jusqu'à leur rencontre les six faces carrées de chaque polyèdre. Je vais donc déterminer le rapport du vide au plein dans chacun de ces cubes.

En prenant pour unité le diamètre d'un boulet, l'arête du cube sera $\sqrt{2}$ et son volume $2\sqrt{2}$.

Le plein de ce cube se compose d'abord du boulet intérieur et ensuite du quart de chacun des douze boulets en contact avec lui; car deux faces du cube passent par le centre de chacun de ces douze boulets : la première en retranche la moitié, et la seconde la moitié de l'autre moitié, en sorte qu'il ne reste dans le cube que le quart des douze boulets. On a donc trois boulets à ajouter au boulet intérieur pour obtenir le volume du plein, qui se trouvera ainsi représenté par $\frac{2\pi}{3}$. Le rapport du cube à ce volume sera $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$, et celui du vide au plein $\frac{3\sqrt{2}}{\pi} - 1$, ce qui fait un peu plus de $\frac{1}{3}$.

Ce rapport sera la limite cherchée; car il ne pourrait être modifié que par la partie superficielle de la pile, qui est infiniment petite par rapport au volume total des cubes, quand le nombre des boulets devient infini.

La pyramide triangulaire ou quadrangulaire formée en joignant le centre d'un boulet qui repose sur trois ou quatre autres avec les centres de ceux-ci, est régulière et a toutes ses arêtes égales au diamètre d'un boulet. Le vide renfermé dans chacune de ces pyramides pourra se calculer en ôtant du volume de la pyramide celui de la partie occupée par les boulets. On observera ensuite que le nombre des vides de chacune de ces deux espèces est double du nombre de boulets, et cette considération conduira au résultat cherché, qui se déterminera exactement sans l'emploi des tables trigonométriques, en remarquant que dans la pyramide régulière à base carrée et à arêtes égales, les plus grands angles dièdres sont doubles des petits et suppléments de ceux du tétraèdre régulier.

Le moyen peut-être le plus expéditif, mais un peu détourné, d'arriver au résultat cherché, consiste à calculer, dans l'hypothèse d'un nombre infini de boulets, le rapport du volume d'une pile au volume des boulets qu'elle contient.

Je prends toujours pour unité le diamètre d'un boulet, et je désigne par n l'arête d'une pile triangulaire; $\frac{n^3\sqrt{2}}{12}$ en représente le volume et $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ le nombre de boulets qu'elle renferme. L'hypothèse de n infini réduit cette dernière expression à $\frac{n^3}{6}$, par l'omission des termes qui s'effacent devant n^3.

Le volume des boulets étant alors $\frac{\pi n^3}{36}$, le rapport de celui de la pile à ce dernier sera $\frac{3\sqrt{2}}{\pi}$, comme nous l'avons trouvé plus haut.

SOLUTION DES QUESTIONS 483, 484, 485

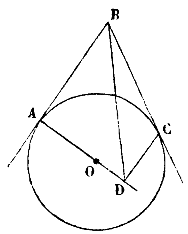
(voir t. XVIII, p. 357);

PAR M. ÉMILE FRANÇOISE,
Élève du lycée de Caen.

Solution de la question 483.

D'un point B extérieur à une circonférence O on mène

FIG. 1.



deux tangentes BA et BC, on projette C en D sur le rayon OA, et l'on fait exécuter une révolution complète à la figure autour de OA, l'un des rayons des points de contact; il faut démontrer que le volume engendré par le triangle mixtiligne CBA est équivalent au cône engendré par le triangle BOA.

On a, en effet,

$$\text{vol. ABD} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^2 . AD,$$

$$\text{vol. ABCD} = \frac{1}{3}\pi\left(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + AB.CD\right) AB,$$

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{AD}^2\,(3r - AD).$$

Soit $\widehat{ABC} = \alpha$; on a

$$AD = AB \sin\alpha,$$
$$CD = r\sin\alpha,$$

r étant le rayon du cercle.

Les expressions précédentes deviennent

$$\text{vol. ABD} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^3 \sin\alpha,$$

$$\text{vol. ABCD} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^3 \sin\alpha + \frac{1}{3}\pi r^2 AB \sin^3\alpha + \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^2\, r\sin^2\alpha,$$

$$\text{vol. ACD} = \pi\,\overline{BA}^2\, r\sin^2\alpha - \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^3 \sin^3\alpha,$$

$$\text{vol. ABCD} - \text{vol. ABD}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\, AB\sin\alpha\left[\overline{AB}^2 \sin^2\alpha + (AB - r\sin\alpha)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi\, AB\sin\alpha\left[\overline{AD}^2 + (AB - CD)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi\,\overline{AB}^3 \sin^3\alpha = \text{vol. ABD}.$$

C. Q. F. D.

Solution de la question 484.

La même figure étant faite que précédemment, et exécutant la même révolution, il faut prouver que le segment sphérique engendré par CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD.

En effet,

$$\text{vol. CBD} = \text{vol. ABCD} - \text{vol. ABD},$$
$$\text{vol. CAD} = \text{vol. ABCD} - \text{vol. ABC},$$

et comme

$$\text{vol. ABC} = \text{vol. ABD},$$

on a

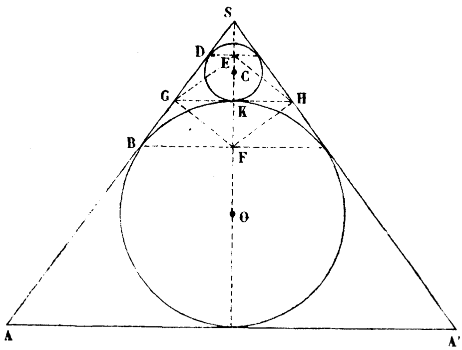
$$\text{vol. CBD} = \text{vol. CAD}.$$

C. Q. F. D.

Solution de la question 485.

Le volume compris entre un cône droit ASA′ et deux

Fig. 2.



sphères O et C qui le touchent intérieurement et se touchent elles-mêmes extérieurement, est la moitié du volume compris entre le cône et la sphère qui passe par les deux cercles de contact.

Le volume compris entre le cône et la sphère qui passe par les points de contact a pour mesure

$$\frac{1}{6}\pi\,\overline{BD}^2 \,.\, EF.$$

Je mène GH tangente commune aux deux circonférences.

Je joins GF et GE; on a

$$GK = GD = GB,$$

et, par conséquent,

$$KC = KF.$$

D'ailleurs (*Question* 483),

$$\text{vol. } BGK = \text{vol. } GKF,$$
$$\text{vol. } GEK = \text{vol. } GKD;$$

donc

$$\text{vol. } BKD = \frac{1}{3}\pi\,\overline{GK}^2\, EF = \frac{1}{12}\pi\,\overline{BD}^2\, EF.$$

C'est la moitié du volume compris entre le cône et la sphère qui passe par les cercles de contact.

ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ.

1. Soit l'équation

$$(1)\qquad \left\{ \begin{array}{c} a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0, \\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4). \end{array} \right.$$

On a

$$a_0(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + a_1 = 0 \quad \text{(relation d'Albert Girard)}.$$

Calculons l'équation qui a pour racines

$$(\alpha_3+\alpha_4-\alpha_1-\alpha_2)^2,\quad [\alpha_1+\alpha_3-(\alpha_2+\alpha_4)]^2,\quad [\alpha_2+\alpha_3-(\alpha_1+\alpha_4)]^2,$$

ou, ce qui revient au même, qui a pour racines

$$\left[\frac{a_1+2a_0(\alpha_3+\alpha_4)}{a_0}\right]^2,\quad \left[\frac{a_1+2a_0(\alpha_2+\alpha_4)}{a_0}\right]^2,$$
$$\left[\frac{a_1+2a_0(\alpha_1+\alpha_4)}{a_0}\right]^2.$$

On obtient

$$\begin{aligned}&a_0^6\theta^3-a_0^4\theta^2(3a_1^2-8a_2a_0)\\&+a_0^2\theta(3a_1^4-16a_0a_1^2a_2+16a_0^2a_2^2+16a_0^2a_1a_3-64a_0^3a_4)\\&-(a_1^3-4a_0a_1a_2+8a_0^2a_3)^2=0;\end{aligned}$$

c'est la *réduite*.

Soient r_1^2, r_2^2, r_3^2 les trois racines de cette réduite; on trouve facilement

$$4a_0\alpha_4-a_0(r_1+r_2+r_3)+a_1=0,$$

où les r ont le double signe $\pm$; donc cette dernière équation équivaut à huit équations. Ainsi, α_4 a huit valeurs, dont quatre sont les racines de l'équation donnée et les quatre autres sont les mêmes racines, changées de signes. En effet, l'équation qui a pour racines $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, $-\alpha_3$, $-\alpha_4$ est

$$(2)\qquad a_0x^4-a_1x^3+a_2x^2-a_3x+a_4=0.$$

Cette équation a même réduite que l'équation (1); c'est ce qu'on voit *à priori*, d'après la forme des racines de la réduite, et aussi *à posteriori*, car il n'y a que a_1 et a_3 qui aient changé de signes.

Posons

$$\begin{aligned}a_0r_1&=a_1+2a_0(\alpha_1+\alpha_4),\\a_0r_2&=a_1+2a_0(\alpha_2+\alpha_4),\\a_0r_3&=a_1+2a_0(\alpha_3+\alpha_4).\end{aligned}$$

On a

$$4a_0\alpha_1 + a_0(r_2 + r_3 - r_1) + a_1 = 0,$$
$$4a_0\alpha_2 + a_0(r_1 + r_3 - r_2) + a_1 = 0,$$
$$4a_0\alpha_3 + a_0(r_1 + r_2 - r_3) + a_1 = 0,$$
$$4a_0\alpha_4 + a_0(r_1 + r_2 - r_3) + a_1 = 0;$$

changeant les signes de r, on a les quatre autres racines. Il s'agit maintenant de savoir lequel des deux systèmes de racines s'applique à l'équation (1).

Dans les deux systèmes, la somme des racines α mène à la relation d'Albert Girard, et les r disparaissant, on n'a aucune indication sur les signes des r; la somme des α pris deux à deux, ou quatre à quatre, donne évidemment le même résultat dans les deux systèmes; il reste à prendre les α trois à trois.

$$16a_0^2\alpha_1\alpha_2 = a_0^2[r_3^2 - r_1^2 - r_2^2 + 2r_1r_2] + 2a_1a_0r_3 + a_1^2,$$
$$4a_0(\alpha_3 + \alpha_4) = 2(a_0r_3 - a_1),$$
$$[\alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4(\alpha_1 + \alpha_2)]$$
$$= 16a_0^3[2a_0^3 + r_1r_2r_3 + a_0^2a_1(r_3^2 + r_1^2 + r_2^2) - a_1^3],$$
$$a_3a_0^2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = 3a_1^3 - 8a_1a_2;$$

ainsi,

$$8a_0^3[\alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4(\alpha_1 + \alpha_2)] = a_0^3r_1r_2r_3 + a_1[a_1^2 - 4a_2].$$

On a donc

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4$$
$$-\frac{a_3}{a_0} = \frac{a_6^3r_1r_2r_3 + a_1^3 - 4a_0a_1a_2}{8a_0^3};$$

d'où

$$r_1r_2r_3 = \frac{a_1(4a_0a_2 - a_1^2) - 8a_0^2a_3)}{a_0^3}.$$

Il faut donner aux r des signes tels, qu'ils satisfassent à cette équation; et cette condition suffit pour faire cesser l'indétermination.

Si $a_1 = 0$ (a_0 étant positif), il suffit que r_1, r_2, r_3 donne un signe opposé à a_3; règle connue.

Exemple :

$$x^4 + 24x^2 + 48x + 52 = 0;$$

réduite

$$\theta^3 + 12\theta^2 + 23\theta - 36 = 0.$$

On a

$$r_1^2 = 1, \quad r_2^2 = -4, \quad r_3^2 = -9;$$

d'où

$$r_1 = \pm 1, \quad r_2 = \pm 2i, \quad r_3 = -3i;$$

il faut prendre les signes de manière que $r_1\, r_2\, r_3$ ait le signe *moins*. Donc

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2i, \quad r_3 = -3i,$$

et

$$4x_1 = i - 1,$$
$$4x_2 = 1 + 5i,$$
$$4x_3 = 1 - 5i,$$
$$4x_4 = -1 - i.$$

Cet exemple est pris dans les *Comptes rendus* (juillet 1858, p. 31); ce qu'on lit là-dessus p. 32, paraît superflu. Une telle observation m'a été aussi communiquée par M. Macario, élève des Ponts et Chaussées de Naples.

NOTE

Sur les fonctions symétriques des racines communes à deux équations;

PAR M. ED. DEWULF,
Capitaine du génie.

I. Dans un Mémoire inséré aux *Annales de Mathématiques* de Gergonne, Abel a donné un moyen de calculer une fonction quelconque d'une racine commune à deux équations. Ce procédé exige que les équations n'aient qu'une seule racine commune.

On peut ainsi calculer une fonction symétrique des racines communes à deux équations, quel que soit le nombre de ces racines, et par suite ces racines elles-mêmes.

II. Soient les deux équations

$$(1)\qquad f(y) = y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$
$$(2)\qquad F(y) = y^n + q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$

qui ont t racines communes et qui n'en ont pas d'autres.

Proposons-nous de calculer la fonction symétrique φ de ces t racines.

Soient $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ les n racines de l'équation (2). En portant ces racines dans le premier membre de l'équation (1), nous aurons ces n résultats

$$f(y_1),\quad f(y_2),\quad f(y_3), \ldots, f(y_n).$$

Les t premiers de ces résultats sont nuls, par hypothèse.

Faisons les produits $n-t$ à $n-t$ de ces résultats, et désignons, en général, par $R^k_{\mu,\nu,\varpi\ldots}$ le produit

$$\frac{f(y_1)f(y_2)f(y_3)\ldots f(y_n)}{f(y_\mu)f(y_\nu)f(y_\varpi\ldots},$$

le nombre des facteurs du dénominateur étant K.

Les quantités

$$R'_{1.2.3\ldots t},\quad R'_{1.2.3\ldots(t-1)(t+1)},\quad R'_{1.2.3\ldots(t-1)(t+2)},$$

sont toutes nulles, excepté la première, qui ne contient aucun des facteurs nuls $f(y_1)$, $f(y_2)$, ..., $f(y_t)$; on a donc, identiquement,

$$R'_{1.2.3\ldots t}+\varphi(y_1 y_2 y_3\ldots y_t)=R'_{1.2.3\ldots t}+\varphi(y_1 y_2 y_3\ldots y_t)$$

$$+R'_{1.2.3\ldots(t-1)(t+1)}+\varphi(y_1\ldots y_{t-1}y_{t+1})+\ldots,$$

ou, symboliquement,

$$R'_{1.2.3\ldots t}\varphi(y_1 y_2\ldots y_t)=\sum R'_{\mu,\nu,\varpi\ldots}\varphi(y_\mu y_\nu y_\varpi\ldots),$$

l'indice $\overset{t}{\mu,\nu,\varpi\ldots}$ désignant une des combinaisons t à t des chiffres $1.2.3\ldots, n$.

On a de même, identiquement,

$$R'_{1.2.3\ldots t}=\sum R'_{\mu,\nu,\varpi\ldots}.$$

Il résulte de ces deux identités, que

$$(3)\quad \varphi(y_1, y_2, y_3,\ldots, y_t)=\frac{\sum R'_{\mu,\nu,\varpi\ldots}\varphi(y_\mu, y_\nu, y_\varpi\ldots)}{\sum R'_{\mu,\nu,\varpi\ldots}}.$$

Cette expression est une fonction symétrique et rationnelle des racines de l'équation (2). On peut donc la calculer par des méthodes connues.

III. Soit

$$(4)\qquad P_0 y^t+P_1 y^{t-1}+P_2 y^{t-2}+\ldots+P_t=0$$

l'équation qui donnerait les racines communes aux équations (1) et (2), et posons

$$R=f(y_1),\ f(y_2),\ f(y_3),\ldots,\ f(y_n).$$

Il est très-aisé de voir que

$$P_0 = \sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots} = \frac{d^t R}{dp^t_m},$$

$$P_1 = \sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots}(y_\mu + y_\nu + y_\varpi + \ldots) = -\frac{t}{1}\frac{d^t R}{dp^{t-1}_m\, dp_{m-1}},$$

$$P_2 = \sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots}(y_\mu y_\nu + y_\mu y_\varpi + \ldots)$$

$$= + \frac{t(t-1)}{1.2}\frac{d^t R}{dp^{t-2}_m\, dp^2_{m-1}},$$

....

$$P_t = \sum R^t_{\mu,\nu,\varpi\ldots}(y_\mu \cdot y_\nu \cdot y_\varpi \ldots - \ldots) = (-1)\frac{d^t R}{dp^t_{m-1}}.$$

L'équation (4) peut donc s'écrire

$$\frac{d^t R}{dp^t_m} y^t - \frac{t}{1}\frac{d^t R}{dp^{t-1}_m\, dp_{m-1}} y^{t-1} + \frac{t(t-1)}{1.2}\frac{d^t R}{dp^{t-2}_m\, dp^2_{m-1}} y^{t-2} + \ldots$$
$$+ (-1)^t \frac{d^t R}{dp^t_{m-1}} = 0.$$

Cette équation, déjà donnée par M Brioschi, se déduit ici d'une théorie générale.

EXERCICES DE TRIGONOMÉTRIE.

1.

$$m\cos z + n\sin z = q, \quad m = -1,0498332;$$
$$n = +0,7466898, \quad q = -0,4316893;$$
$$z = 35^\circ, \quad z = 254^\circ\, 9'\, 20''.$$

2.

$$k\sin(\alpha + z) = m, \quad \alpha = 200^\circ, \quad m = -0,42345;$$
$$k\sin(\beta + z) = n, \quad \beta = 140^\circ, \quad n = -0,20123;$$
$$z = 68^\circ\, 21'\, 38'',6, \quad k = 0,4236234.$$

3. **Mêmes équations;**

$$\alpha = 280^\circ\, 16', \quad m = -\,0{,}62342;$$
$$\beta = 200^\circ\, 10', \quad n = +\,0{,}69725;$$
$$z = 207^\circ\, 5'\, 34'',4, \quad k = 1{,}0273643.$$

Nous avons extrait ces exercices de l'ouvrage suivant: *A Treatise of plane and spherical Trigonometry, by* William Chauvenet, professeur de mathématiques à l'École de Navigation des États-Unis. Philadelphie, 1854; in-8° de 256 pages; 3e édition, la 1re est de 1850. Trigonométrie complète; on y trouve les équations aux différences et aux différentielles relatives aux triangles, sans lesquelles aucune opération trigonométrique n'est susceptible d'approximation. Il est singulier de rencontrer, chez nos auteurs élémentaires, des méthodes et des exemples à foison concernant les erreurs en arithmétique, et de ne rien dire sur les erreurs trigonométriques, qu'il est si important de connaître. Quelle influence les erreurs des mesures ont-elles sur les résultats des calculs? Il faut savoir répondre à cette question, si l'on tient à se rendre compte de ce qu'on fait. On a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

si l'on a mesuré b et c à quelques centimètres près, A à quelques secondes près, à combien près obtient-on la valeur de a? Les problèmes fondamentaux des deux trigonométries devraient être accompagnés de ce renseignement indispensable.

Le chapitre IV (page 214) de cet ouvrage, donne les solutions des triangles sphériques lorsque les côtés et les angles dépassent 180 degrés, triangles qu'on rencontre souvent en astronomie; par exemple, les ascensions droites se comptent de 0 à 360 degrés. Gauss, dans sa *Theoria motus*, fait voir qu'il est commode de résoudre ce genre de triangles directement, sans recourir à des triangles auxiliaires. On peut y appliquer les mêmes formules que pour les triangles ordinaires. Soit

$$\cos(2\pi - a) = \cos a;$$

supposons que dans le triangle rectiligne ABC on désigne par A', B', C' les angles extérieurs $2\pi - A$, $2\pi - B$, $2\pi - C$; l'équation fondamentale de la trigonométrie rectiligne est

$$a = b\cos C + c\cos B,$$

et l'on a aussi

$$a = b\cos C' + c\cos B';$$

de même, dans la trigonométrie sphérique, toutes les autres équations sont des déductions de cette équation fondamentale.

Quant aux applications à la géométrie pratique et aux diverses questions d'astronomie et de navigation, la trigonométrie la plus complète est celle que M. Dienger a publiée à Stuttgart en 1855, que nous ferons connaître à nos lecteurs, et à laquelle nous emprunterons beaucoup d'exercices numériques.

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Formules de A. BRETSCHNEIDER.

Crelle, t. XIV, p. 145; 1835.

Dans un triangle sphérique, posons

$$\begin{aligned} A &= 4A', & a &= 4a', & A'+B'+C' &= P;\\ B &= 4B', & b &= 4b', & a'+b'+c' &= p;\\ C &= 4C', & c &= 4c'; \end{aligned}$$

on a

$$\sin(P - 45^\circ)\sin(P - 2A' + 45^\circ)\cos 2a'$$
$$= \sin p \sin(p - 2a)\sin 2A';$$
$$\cos(P - 45^\circ)\cos(P - 2A' + 45^\circ)\cos 2a'$$
$$= \cos p \cos(p - 2a)\sin 2A';$$
$$\sin(P - 45^\circ)\cos(P - 2A' + 45^\circ)\cos 2a'$$
$$= \sin(p - 2a)\sin(p - 2c)\cos 2A';$$
$$\cos(P - 45^\circ)\sin(P - 2A' + 45^\circ)\cos 2a'$$
$$= \cos(p - 2a)\cos(p - 2c)\cos 2A';$$
$$\sin(P - 2B' + 45^\circ)\sin(P - 2C' + 45^\circ)\sin 2a'$$
$$= \sin p \sin(p - 2a')\sin 2A';$$
$$\cos(P - 2B' + 45^\circ)\cos(P - 2C' + 45^\circ)\sin 2a'$$
$$= \cos p \cos(p - 2a')\sin 2A';$$
$$\sin(P - 2A' + 45^\circ)\cos(P - 2C' + 45^\circ)\sin 2a'$$
$$= \sin(p - 2b')\cos(p - 2c')\cos 2A';$$
$$\cos(P - 2B' + 45^\circ)\sin(P - 2C' + 45^\circ)\sin 2a'$$
$$= \cos(p - 2b')\sin(p - 2c')\cos 2A'.$$

Par voie de multiplication, on obtient de nouvelles formules.

SUR QUELQUES QUESTIONS D'ALGÈBRE;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

Étant donnée l'équation

$$(a, b, c, d, e, f, \ldots)(x, 1)^n = 0,$$

dont les racines sont $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; soient $s_0, s_1, s_2 \ldots$ les sommes des puissances zéro, première, deuxième, ... de ces racines.

Calculons les valeurs de la fonction symétrique $\sum (x_1 - x_2)^{2p}$, ou bien de l'invariant quadratique $\left(\sum_p\right)$ de la forme (*)

$$(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{2p})(x, y)^{2p},$$

pour $p=1$, $p=2$, $p=3$, $p=4$.

Nous trouvons

$$a^2 \sum_1 = n^2(n-1)(b^2 - ac),$$

$$a^4 \sum_2 = n^2(n-1)\left[\begin{array}{l} n^2(b^2-ac)^2 - \dfrac{(n-2)(n-3)}{6}a^2 \\ \times(ae - 4bd + 3c^2) \end{array}\right],$$

$$a^6 \sum_3 = n^2(n-1)\left\{\begin{array}{l} n^4(b^2-ac)^3 - \dfrac{1}{4}n^2(n-2)(n-5)a^2 \\ \times(b^2-ac)(ae-4bd+3c^2) \\ -\dfrac{n(n-2)(7n-15)}{4} \\ \times(ad^2+eb^2+c^3-2bcd-ace)a^3 \\ -\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5} \\ \times(ag-6bf+15ec-10d^2)a^4 \end{array}\right\},$$

(*) *Voir* t. XVIII, p. 304.

$$a^6 \sum_4 = n^2(n-1) \left\{ \begin{array}{l} n^6(b^2-ac)^4 - \frac{1}{3} n^4 (n-2)(n-7) a^2 \\ \times (b^2-ac)^2 (ae - 4bd + 3c^2) \\ + 2n^3(n-2)(3n-7) a^3 \\ \times (b^2-ac)(ad^2 + eb^2 + c^3 - 2bcd - ace) \\ + \frac{1}{72} n^2 (n-2)(n-3)(n^2 + 8n - 21) a^4 \\ \times (ae - 4bd + 3c^2)^2 \\ - \frac{n^2(n-2)(n-3)(n-4)(n-21)}{90} a^4 \\ \times (b^2-ac)(ag - 6bf + 15ec - 10d^2) \\ - \frac{n(n-2)(n-3)(n-4)(3n-7)}{9} a^5 \\ \times \left(\begin{array}{c} h^2g - 2cd^2 + bde - 3bcf - acg \\ + 3adf - 2ae^2 + 3c^2e \end{array} \right) \\ - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4.5.6.7} a^6 \\ \times (ak - 8bh + 28cg - 56df + 35e^2) \end{array} \right\}.$$

On trouve aussi pour l'invariant cubique (I_3) de la forme

$$(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4)(x, y)^4,$$

l'expression suivante

$$12a^4 I_3 = n^3(n-1)^2(n-2) \times \left[\begin{array}{l} n(b^2-ac)(ae - 4bd + 3c^2) \\ -3(n-2)a \\ \times (ad^2 + eb^2 + c^3 - 2bcd - ace) \end{array} \right].$$

Posons $n = 3$, $e = 0$, l'on retombe sur le discriminant de la fonction cubique homogène à deux variables (*). Pour $n = 4$, nous avons

$$a^4 I_3 = 192 \times \left[\begin{array}{l} 2(b^2-ac)(ae - 4bd + 3c^2) \\ -3a(ad^2 + cb^2 + c^3 - 2hcd - ace) \end{array} \right].$$

(*) Résultat connu.

Or, en nous reportant à l'équation au carré des différences des racines d'une équation biquadratique que j'ai déjà donnée (*), nous tirons l'équation suivante.

$$\sum (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x^4)^2$$

$$= 6(ae-4bd+3c^2)\times \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

en sorte que la relation entre les racines d'une équation du quatrième degré exprimée par l'équation

$$\sum \frac{1}{(x_1-x_2)^2} = 0$$

entraîne l'une ou l'autre des conditions

$$ac-4bd+3c^2=0, \qquad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0.$$

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SEGMENTAIRE;

D'après O. HERMES.

Crelle, t. LIV, p. 205; 1859.

1. Soient ABCD un tétraèdre coupé par un plan transversal T, et

δ	droite d'intersection de		ABC et T,
γ	»		ABD et T,
β	»		ACD et T,
α	»		BCD et T,
D'	pôle de δ	relatif à	ABC,
C'		»	ABD,
B'		»	ACD,
A'		»	BCD;

(*) *Voir* t. XVI, p. 368.

les quatre droites AA', BB', CC', DD' se coupent au même point P; ce point est le pôle du plan I relativement au tétraèdre ABCD,

$$lt + mu + nv + pw = s, \quad \text{équation du plan T};$$

$$lt = mu = nv = pw, \quad \text{équation du point P}.$$

Lorsque le plan T est à l'infini, le pôle est au centre de gravité du tétraèdre (pour le triangle, voir *Bulletin*, t. V, p. 67).

2. Soient une série de triangles ayant un sommet commun, et dont les bases sont sur une seule et même droite; les pôles d'une transversale coupant ces triangles relativement à chaque Δ sont sur une même droite.

3. Soit un tétraèdre ABCD coupé par un cinquième plan T; on a un *pentaèdre* (fünfflach) : ce cinquième plan T coupe BCD suivant la droite α; nommons le plan qui passe par A et la droite α un *plan diamétral;* ce plan diamétral coupe les faces ABC, ABD, ACD suivant trois droites passant par A et la face BCD suivant la droite α: on a ainsi trois triangles ayant le sommet commun α et leurs bases sur la même droite α; nommons ces triangles *triangles diamétraux*.

Théorème. Si l'on coupe un pentaèdre par un plan P, ce plan coupe un plan diamétral suivant une droite; si l'on prend les pôles de cette droite relativement aux trois triangles diamétraux, ils sont sur une même droite; on obtient ainsi quatre droites, fournies par les quatre sommets ADCD, et ces quatre droites appartiennent au même hyperboloïde.

4. *Théorème.* Si, dans un hexaèdre, les trois droites d'intersection des couples de plans opposés sont dans un

même plan, les trois diagonales de l'hexaèdre se coupent suivant un même point.

5. Si sur quatre droites d'un hyperboloïde à une nappe on prend respectivement sur chacun deux points, soient a, α, b, β, c, γ, d, δ, les quatre faces homonymes des deux tétraèdres $abcd$, $\alpha\beta\gamma\delta$ se coupent suivant quatre droites éléments d'un hyperboloïde à une nappe. (Cayley.)

Si les quatre faces homonymes de deux tétraèdres $abcd$, $\alpha\beta\gamma\delta$ se coupent suivant quatre droites situées sur un même hyperboloïde à une nappe, les droites qui joignent les sommets homonymes sont aussi sur un tel hyperboloïde.

COURBE LOGOCYCLIQUE (BOOTH).

Trouver l'enveloppe d'un cercle dont le centre est sur une parabole donnée et qui a pour rayon la distance du centre au foyer de la parabole; nommons cette enveloppe F courbe *logocyclique*.

1°. Démontrer qu'en prenant le foyer pour pôle et pour axe celui de la parabole, la courbe *réciproque* de cette enveloppe coïncide avec cette enveloppe; propriété analogue à celle du cercle.

2°. La directrice de la parabole est une asymptote de l'enveloppe.

3°. Soient V le point d'intersection de deux tangentes à l'enveloppe menée par deux points *réciproques* R et R_1, et par conséquent tous deux sur l'enveloppe; T le milieu de RR_1 : la droite VT est perpendiculaire sur RR_1, et touche la parabole en un point Q.

4°. O étant le sommet de la parabole, l'angle ROR_1 est droit.

5°. QR, QR_1 sont normales à l'enveloppe; VR, VR_1 sont égales et également inclinées sur la corde RR_1, comme dans le cercle.

6°. Le lieu du point V est une *cissoïde* ayant le sommet de la parabole pour point de rebroussement, et la directrice de la parabole pour asymptote.

7°. La somme des distances des points R et R_1 à l'axe est égale à la distance du point Q à l'axe.

8°. Soient C et C' les points d'intersection des tangentes VR, VR_1 avec une perpendiculaire au rayon vecteur FRR_1 menée par F; la somme $FC + FC_1$ est constante, et $VC = VC_1$.

9°. Le lieu des points C et C_1 est une *cardioïde*.

10°. Mêmes notations

$$\log FR = \frac{\text{arc parab. } OQ - QT}{a};$$

c'est ce qui a fait donner à cette enveloppe le nom de *logocyclique,* parce qu'elle a des propriétés analogues au cercle et aux logarithmes (*Quarterly Journal,* t. III, p. 38; 1858); la logocyclique est carrable.

SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE;

PAR M. GROS,
Professeur de mathématiques.

Dans les cours de géométrie descriptive, on démontre ordinairement que si les axes de deux surfaces de révolution du second degré sont dans un même plan, la projection sur ce plan de la courbe d'intersection de ces deux surfaces est un arc de courbe du second degré.

On peut, en outre, à la simple inspection des données, reconnaître si cette projection est un arc d'ellipse, d'hyperbole ou de parabole.

En effet, si nous prenons pour origine le point de rencontre des deux axes, et pour plan des zx le plan de ces deux droites, nous pouvons écrire les équations des deux surfaces sous la forme suivante :

$$x^2+y^2+z^2=m\,(ax+z)^2+n\,(ax+z)+p,$$
$$x^2+y^2+z^2=m'(a'x+z)^2+n'(a'x+z)+p'.$$

La projection sur le plan des zx de la courbe d'intersection de ces surfaces a pour équation

$$m\,(ax+z)^2-m'\,(a'x+z)^2+n\,(ax+z)-n'\,(a'x+z)+p-p'=0.$$

Le genre de cette courbe est indiqué par le signe de l'expression

$$mm'(a-a')^2,$$

ou, ce qui revient au même, par le signe du produit

$$mm'.$$

Actuellement, pour reconnaître le signe de m, d'après la forme de la surface représentée par l'équation

$$x^2+y^2+z^2=m\,(ax+z)^2+n\,(ax+z)+p,$$

nous remarquerons qu'en prenant trois nouveaux axes rectangulaires ayant même origine que les premiers, on a, en désignant par x, y, z et x', y', z', les coordonnées d'un même point M, dans les deux systèmes,

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2,$$

car chaque membre de cette égalité représente le carré de la distance du point M à l'origine commune.

Si, de plus, nous prenons pour axe des x' l'axe de la surface, les équations de cette droite étant

$$y=0,\quad x=az,$$

le plan représenté par l'équation

$$ax + z = 0$$

lui est perpendiculaire; par conséquent, la distance du point M à ce plan est représentée par x' dans le second système; mais cette même distance est représentée par $\frac{ax + z}{\sqrt{1 + a^2}}$ dans le premier; donc

$$\frac{ax + z}{\sqrt{1 + a^2}} = x'.$$

Par suite, l'équation de la surface, par rapport au nouveau système d'axes, est

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = m(1 + a^2)x'^2 + nx'\sqrt{1 + a^2} + p,$$

ou

$$[1 - m(1 + a^2)]x'^2 + y'^2 + z'^2 - nx'\sqrt{1 + a^2} - p = 0.$$

Or, dans toute équation du second degré à trois variables, où n'entrent pas les rectangles de ces variables, les coefficients des carrés sont inversement proportionnels aux carrés des axes de la surface représentée par cette équation.

Par conséquent :

Si m est négatif, la surface est un ellipsoïde aplati;

Si m est nul, la surface est une sphère;

Si m est compris entre o et $\frac{1}{1 + a^2}$, la surface est un ellipsoïde allongé;

Si m est égal à $\frac{1}{1 + a^2}$, la surface est un paraboloïde ou un cylindre;

Si m est plus grand que $\frac{1}{1 + a^2}$, la surface est un hyperboloïde ou un cône.

En résumé, m est négatif dans le cas de l'ellipsoïde aplati, nul dans le cas de la sphère, et positif dans tous les autres cas.

D'où l'on conclut que, si l'une des surfaces seulement est un ellipsoïde aplati, la projection est un arc d'ellipse; si l'une des surfaces est une sphère, la projection est un arc de parabole. Dans tous les autres cas, la projection est un arc d'hyperbole.

THÉORÈME SUR LE BINOME DE NEWTON POUR L'EXPOSANT ENTIER ET POSITIF (*);

Par M. GARCET,
Capitaine du génie.

Si l'on décompose la série des coefficients du binôme de Newton en trois parties, en prenant les termes de trois en trois, deux de ces sommes sont égales et la troisième surpasse les deux autres ou en est surpassée d'une unité.

Ainsi appelons s_1, s_2, s_3 ces trois sommes

$$s_1 = 1 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3} + \frac{m.\overline{m-1}\ldots\overline{m-5}}{1.2\ldots6} + \ldots,$$

$$s_2 = m + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.2.3.4} + \frac{m.\overline{m-1}\ldots\overline{m-6}}{1.2\ldots7} + \ldots,$$

$$s_3 = \frac{m.\overline{m-1}}{1.2} + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.\overline{m-4}}{1.2.3.4.5} + \frac{m.\overline{m-1}\ldots\overline{m-7}}{1.2\ldots8} + \ldots,$$

on a égalité à l'unité près entre ces trois sommes.

(*) A démontrer.

Comme on sait ensuite que

$$s_1 + s_2 + s_3 \doteq 2^m,$$

on peut spécifier quelles sont les sommes égales suivant la nature de l'exposant m, ainsi qu'il suit :

Si

$$m = 6n,$$
$$m = 6n + 1,$$
$$m = 6n + 2,$$
$$m = 6n + 3,$$
$$m = 6n + 4,$$
$$m = 6n + 5,$$

on a respectivement

$$s_2 = s_3 = s_1 - 1 = \frac{2^m - 1}{3},$$
$$s_1 = s_2 = s_3 + 1 = \frac{2^m + 1}{3},$$
$$s_3 = s_1 = s_2 - 1 = \frac{2^m - 1}{3},$$
$$s_2 = s_3 = s_1 + 1 = \frac{2^m + 1}{3},$$
$$s_1 = s_2 = s_3 - 1 = \frac{2^m - 1}{3},$$
$$s_3 = s_1 = s_2 + 1 = \frac{2^m + 1}{3}.$$

THÉORÈME SUR LES COURBES PLANES (*);

PAR M. STREBOR.

Étant donnée une courbe plane, construisons la courbe semblable en doublant les rayons vecteurs tirés d'un point

(*) A démontrer.

fixe, et supposons qu'on ait trouvé l'équation de la courbe parallèle à cette dernière, qui s'obtient en prenant sur ses normales une longueur constante (k). Si l'on substitue dans cette équation $\sqrt{x^2+y^2}$ au lieu de k, on tombera sur l'équation de la courbe, enveloppe des perpendiculaires qu'on mène aux extrémités des rayons vecteurs de la courbe donnée.

Puisque la courbe parallèle est tout à fait indépendante de la position de l'origine fixe, il est évident que si l'on en a l'équation, on aura aussi l'équation de ladite enveloppe, quelle que soit la position de l'origine.

Nota. Très-facile à vérifier pour la ligne droite et pour le cercle.

TROISIÈME SOLUTION DE LA QUESTION 461

(voir t. XVIII, p. 242 et 273);

PAR MM. CHARLES KESSLER ET LEMOINE,
Élèves du Prytanée militaire.

Démontrer que la série

$$S = \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \frac{1}{2.3\ldots(n+1)} + \frac{1}{3.4\ldots(n+2)} + \ldots$$

est convergente et a pour limite

$$\frac{1}{(n-1)\,1.2.3\ldots(n-1)}.$$

On voit d'abord immédiatement que cette série est convergente, car ses termes sont respectivement plus petits que ceux de la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots,$$

et l'on sait que cette série est convergente . $n > 1$. Cherchons maintenant sa limite; pour cela je pose

$$K = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{1}{2.3\ldots n} + \frac{1}{3.4\ldots(n+1)} + \ldots,$$

$$K = \qquad\qquad \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{1}{2.3.4\ldots n} + \ldots,$$

et je retranche membre à membre, j'aurai

$$0 = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} - \frac{n-1}{1.2.3\ldots n} - \frac{n-1}{2.3\ldots(n+1)} + \ldots,$$

ou, en désignant par S la somme cherchée,

$$0 = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} - (n-1)\,S;$$

d'où

$$S = \frac{1}{(n-1)\,1.2.3\ldots(n-1)}.$$

C. Q. F. T.

DEUX PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE DU COMPAS;

PAR M. GEORGES DELISLE,
Avocat à la cour de Caen.

I^{er} PROBLÈME. *Trouver le centre d'une circonférence en ne se servant que du compas.*

1°. Du point A pris à volonté sur la circonférence donnée, et avec un rayon arbitraire, je décris un arc qui rencontre la circonférence aux points B et C.

2°. De ces points B et C comme centres, avec le *même* rayon, je décris deux arcs qui se coupent au point A', symétrique de A par rapport à la droite BC supposée tracée.

3°. Du point A′ comme centre avec un rayon égal à la distance AA′, je décris une circonférence qui rencontre, aux points M et N, l'arc BC prolongé.

4°. De ces points M et N comme centres, avec un rayon égal à la distance AB, je décris deux arcs qui se coupent au point O, symétrique de A par rapport à la corde MN, supposée tracée.

Ce point O est le centre demandé.

En effet, concevons que l'on ait tracé le diamètre AA′G de la circonférence de centre A′.

Cette droite, ayant deux points A et A′ également distants des extrémités de BC, est perpendiculaire sur le milieu de cette corde. Elle contient donc le centre cherché; et ce point O sera ce centre, si la distance AO est égale au rayon.

Soit R ce rayon inconnu.

Soit D le point où la corde BC rencontrerait la droite AA′G.

La corde AB est moyenne proportionnelle entre le diamètre 2 R et sa projection AD sur ce diamètre. On a donc

(1) $$\overline{AB}^2 = 2R \times AD.$$

Cette même droite AG, ayant aussi les deux points A et A′ également distants des extrémités de MN, est perpendiculaire sur le milieu de cette corde. Soit E le point où cette corde rencontrerait AG.

La corde AM de la circonférence de centre A′ est aussi moyenne proportionnelle entre le diamètre 2 AA′ et sa projection AE sur ce diamètre. On a donc

(2) $$\overline{AM}^2 = 2AA' \times AE.$$

Mais

$$AM = AB,$$
$$AA' = 2\,AD,$$
$$AE = \frac{AO}{2}.$$

Donc l'égalité (2) devient

$$\overline{AB}^2 = 2 \times 2\,AD \times \frac{AO}{2},$$

ou

(3) $$\overline{AB}^2 = 2\,AD \times AO.$$

Les premiers membres des égalités (1) et (3) sont les mêmes. Les seconds sont donc égaux, c'est-à-dire que

$$2\,R \times AD = 2\,AD \times AO;$$

donc

$$R = AO. \quad (*)$$

C. Q. F. D.

II[e] PROBLÈME. *Construire le côté du décagone régulier inscrit en ne se servant que du compas.* (Comme Mascheroni.)

Note. Ces deux problèmes m'ont été communiqués verbalement par M. Georges Delisle, avocat à la Cour de Caen, professeur de droit romain, doyen de la Faculté de Droit, auteur de deux ouvrages de jurisprudence très-estimés.

Jurisconsulte éminent, il s'était acquis une grande réputation par ses consultations, qui révélaient un esprit vaste et profond, et devant lesquelles s'inclinaient les magistrats.

(*) Résolu différemment par Mascheroni (*Géométrie du compas*, p. 135).

TM.

Cet homme, qui faisait autorité dans la science du droit, cultivait sérieusement la géométrie, afin, disait-il, de conserver à son esprit l'habitude des raisonnements précis et rigoureux.

Les deux problèmes difficiles dont nous venons de rapporter une solution si simple et si élégante, prouvent qu'il eût pu faire un mathématicien distingué.

Il connaissait le calcul infinitésimal et il se proposait d'étudier avec moi le calcul des variations, lorsque sa mort (arrivée en 1854) l'empêcha de mettre ce projet à exécution.

CH. DIGUET,
Professeur de mathématiques
pures et appliquées au lycée de Caen.

SOLUTION DE LA QUESTION 416

(voir tome XVII, page 31).

Le produit de cinq ou de six nombres entiers consécutifs ne peut être un carré.

Je ferai d'abord quelques remarques sur la résolution en nombres entiers de l'équation

$$(1) \qquad x(x+1)(x+2)\ldots(x+n) = y^2.$$

1. Tout *diviseur commun* à deux quelconques des nombres entiers x, $(x+1)$, $(x+2)$,..., $(x+n)$, devant diviser leur différence, est nécessairement l'un des nombres $1, 2, 3, 4, \ldots, n$. Par conséquent, tout *diviseur premier commun* à deux quelconques des nombres entiers x, $(x+1)$, $(x+2)$, ..., $(x+n)$, est nécessairement l'un des nombres premiers $2, 3, 5, \ldots, p$, en désignant par p le plus grand des nombres premiers compris dans la suite $1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

Que si le produit $x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)$ est un carré exact, comme le suppose l'équation (1), et qu'en outre l'exposant de la plus haute puissance d'un nombre premier divisant l'un de ses facteurs soit impaire, ce nombre premier appartiendra à la suite $2, 3, 5, \ldots, p$, car il devra diviser au moins *deux* des facteurs du produit; et de là je conclus que :

1°. Si un facteur du produit $x(x+1)\ldots(x+n)$ n'est divisible par aucun des nombres $2, 3, 5, \ldots, p$, il sera, par cela même, un carré exact.

2°. Si un facteur de ce produit n'admet comme diviseur qu'un seul des nombres premiers $2, 3, 5, \ldots, p$, il sera un carré, ou le produit d'un carré par ce nombre premier.

2. Aucun des facteurs $x, (x+1), (x+2), \ldots, (x+n)$, ne peut admettre comme diviseurs tous les nombres $2, 3, 5, \ldots, p$. C'est ce que je vais démontrer.

Supposons, en premier lieu, que l'un des deux facteurs extrêmes, par exemple x, soit séparément divisible par $2, 3, 5, \ldots, p$. Alors $x+1$ qui est premier avec x, n'admettant aucun de ces diviseurs, sera un carré exact (1, 1°). Et comme x est, par hypothèse, multiple de $(2.3.5\ldots p)$, les facteurs $x+2$, $x+4$ seront divisibles par 2, et n'auront pas d'autre diviseur compris dans la suite $2, 3, 5, \ldots p$. En outre, aucun des deux facteurs $x+2$, $x+4$ n'est un carré, car $(x+1)$ étant le carré d'un nombre entier plus grand que l'unité, tout autre nombre plus grand que $x+1$ ne peut être le carré d'un nombre entier que s'il surpasse $x+1$ d'au moins cinq unités. Il faut donc (1, 2°) que $x+2$, $x+4$ soient des nombres entiers de la forme $2a^2$, $2b^2$, ce qui exige qu'on ait $b^2-a^2=1$. On est donc conduit à cette conclusion que, si x était multiple de $(2.3.5\ldots p)$, la différence des carrés des deux nombres entiers b, a serait égale à l'unité.

La même démonstration convient à l'autre facteur extrême $x+n$.

Quant aux facteurs intermédiaires $x+1$, $x+2$,..., $(x+n-1)$, si l'un d'eux, $x+1$ par exemple, était multiple de $(2.3.5\ldots p)$, les deux facteurs x, $x+2$ qui le comprennent seraient des carrés (1, 1°), ce qui est évidemment impossible, puisqu'ils diffèrent seulement de deux unités.

3. *Application*. L'équation

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=y^2$$

n'a aucune solution entière. En d'autres termes : le produit de cinq nombres entiers consécutifs n'est jamais un carré.

Dans le cas actuel, $p=3$, et $(2\ldots p)=6$. Donc, si les cinq nombres x, $x+1$,..., $x+4$, remplissent la condition que l'équation proposée exprime, aucun d'eux ne peut être multiple de 6, (2). Il en résulte que le plus petit de ces cinq nombres, x, est de la forme $6n+1$. D'où il suit que x n'admettant pour diviseur aucun des deux nombres premiers 2, 3, est un carré (1, 1°). Par conséquent, le produit $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ de quatre nombres entiers consécutifs devrait aussi être un carré; ce qui est impossible (*Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 393.)

4. Soit, maintenant,

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=y^2,$$

l'équation proposée. On a

$$p=5 \quad \text{et} \quad (2, 3\ldots p)=30.$$

Nous allons faire voir que si l'équation admettait une solution entière, il en résulterait cette absurdité : que parmi six nombres entiers consécutifs x, $(x+1)$,..., $(x+5)$, il n'y aurait pas un seul multiple de 6.

Démontrons d'abord qu'aucun des deux facteurs extrêmes x, $(x+5)$, du produit $x(x+1)$,..., $(x+5)$ ne peut être multiple de 6.

Si $x=6a$, le nombre entier a n'est pas divisible par 5 (2). Or, l'égalité $x=6a$ donnant $x+5=6a+5$, on voit que $x+5$ est premier avec 2, 3, 5; donc $(x+5)$ est un carré (1, 1°.) Par suite, le produit

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

de cinq nombres entiers consécutifs serait un carré exact; c'est ce qui n'a jamais lieu (3).

La même démonstration convient à l'autre facteur extrême $x+5$.

Il reste à considérer les facteurs intermédiaires $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$, $(x+4)$. Si l'un d'eux, $x+2$, par exemple, est multiple de 6, il est clair que les deux facteurs $x+3$, $x+1$ qui comprennent $x+2$, seront premiers avec 6; et comme ils ne peuvent être, tous deux, multiples de 5, l'un d'eux n'admettra aucun des diviseurs 2, 3, 5, et sera par conséquent le carré, a^2, d'un nombre entier. L'autre facteur $a^2 \pm 2$ n'étant pas un carré, devra être divisible par 5 (1, 1°). On aurait donc

$$a^2 \pm 2 = 5n;$$

or, cette égalité ne peut exister, car la formule des carrés qui ne sont pas multiples de 5 est, comme on sait,

$$a^2 = 5n \pm 1.$$

Il résulte de ce qui précède, que le produit de six nombres entiers consécutifs ne peut être un carré.

5. Il en est de même du produit de sept nombres con-

sécutifs. Car, si l'équation

$$x(x+1)\ldots(x+5)(x+6)=y^2$$

admettait une solution entière, aucun des sept nombres x, $(x+1)$,..., $(x+5)$, $(x+6)$ ne serait divisible par 6.

En effet, p étant encore égal à 5, on démontrera, comme dans le cas précédent, qu'il est impossible que l'un des facteurs intermédiaires $x+1,\ldots,x+5$ soit multiple de 6. Il n'y a lieu à démonstration nouvelle que pour les facteurs extrêmes x, $x+6$.

Supposons $x=6m$, on aura

$$x+6=6(m+1);$$

et aucun des deux nombres m, $m+1$ ne sera divisible par 5 (2). Or, les égalités

$$x=6m,\quad x+6=6(m+1)$$

donnent

$$x+1=6(m+1)-5\quad \text{et}\quad x+5=6m+5.$$

Ces dernières montrent que les facteurs $x+1$, $x+5$ ne sont divisibles par aucun des trois nombres premiers 2, 3, 5. Donc (1, 1°), on a

$$x+1=a^2,\quad x+5=b^2,\quad \text{d'où}\quad b^2-a^2=4;$$

égalité qui est impossible, puisque la différence des carrés de deux nombres entiers b, a, plus grands que l'unité, est égale au moins à 5. Il est ainsi démontré que l'équation proposée n'admet pas de solution entière. G.

QUESTIONS.

498. On donne, 1° une droite fixe; 2° un point B sur cette droite; 3° un point fixe A. Trouver une courbe telle, qu'en menant par un point quelconque pris sur cette courbe une tangente, et par le point A une parallèle à cette tangente, ces deux droites interceptent sur la droite fixe deux segments, comptés du point B, tels, que la somme des carrés de ces segments soit égale à un carré donné k^2. Mêmes données, mais prenant la différence des carrés; ou bien le produit des segments, ou bien la somme des inverses des segments égale à une constante donnée.

499. Soient: 1°. A, B, C, D quatre droites dans un même plan, et m, o, l, s quatre points fixes dans ce plan; par m menons une droite quelconque coupant C et D aux points c et d; par c et o menons la droite co coupant A et B aux points a et b; par a et l menons la droite al et par c et s la droite cs; l'intersection p des droites al et cs décrit une ligne du troisième ordre.

2°. Soit un quadrilatère plan variable ABCD; o, p, q, r quatre points *fixes*; o est sur AB, p sur BC, q sur CD, r sur DA. Les sommets opposés A et C sont sur deux droites fixes données dans le plan du quadrilatère; le sommets opposés B, D décrivent des lignes du troisième ordre.

500.

$$x = \sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}, \qquad x^6 = 6x^4 + 28x^3 + 18x^2 - 12x + 2,$$

$$x = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4}, \qquad x^5 = 10x^2 + 10x + 6,$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{\beta^2}{\alpha}} + \sqrt[5]{\frac{\alpha^3}{\beta}}, \qquad x^5 = 5\alpha x^2 + 5\beta x + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta}.$$

(Euler.)

501. Par un point fixe M pris sur une conique, on mène une tangente; soit T un point quelconque pris sur cette conique; TN une seconde tangente et N le point de contact; au point T on élève une perpendiculaire sur la tangente TN; elle sera rencontrée en R par la perpendiculaire abaissée de N sur la tangente fixe TM. Quel est le lieu du point R?

502. Par un foyer d'une ellipse on mène une corde AB; par le point de rencontre des deux normales en A et B, on mène une parallèle au grand axe; cette parallèle passe par le milieu de AB.

503. Déterminer les six racines rationnelles de cette équation

$$(a^5 - a)^4 (x^2 + 14x + 1)^3 = (a^8 + 14a^4 + 1)\, x (x - 1)^4.$$

ABEL.

504. $AB = 2R =$ diamètre d'un cercle de centre K;
$O =$ un point sur le diamètre AB;
$KO = a$;
$P =$ un point de la circonférence;
Angle $PAB = \beta$;
Angle $POB = \psi$.
On a

$$\sin\psi = \frac{R \sin 2\beta}{\sqrt{(R+a)^2 \cos^2\beta + (R-a)^2 \sin^2\beta}},$$

$$\frac{2\,d\beta}{\sqrt{(R+a)^2\cos^2\beta+(R-a)^2\sin^2\beta}} = \frac{d\psi}{\sqrt{R^2\cos^2\psi+(R^2-a^2)\sin^2\psi}},$$

fonction elliptique. JACOBI.

505. On connaît les levers et les couchers du Soleil en temps moyen à Paris; en déduire les mêmes données pour le 1er de chaque mois de 1860 à Alger (*).

(*) Ces données très-utiles, surtout pour les Arabes, manquent dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

506. Deux points parcourent chacun une droite, et dans le même plan. Soient e, v l'espace parcouru et la la vitesse du premier point au bout du temps t; e_1, v_1 les mêmes données pour le second point: si l'on a la relation

$$v(a_1 + b_1 e_1) = v_1(a + b e),$$

où les a et les b sont des constantes, la droite qui réunit les points au même instant a pour enveloppe une conique; en indiquer le genre et l'espèce.

507. n_p nombre de combinaisons de n éléments pris p à p *sans répétition* et n'_p *avec répétition*. On a

$$n'_p - n_1(n-1)'_p + n_2(n-2)'_p - n_3(n-3)'_p + \ldots$$
$$+ (-1)^n n_{n-1}(1)'_p = (n-1)_{p-1}.$$

508. k est un nombre entier positif;

$\sum\limits_0^n f(k)$ est la somme d'une fonction de k, où k prend successivement les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, n$;

n_k coefficient de x^k dans le binôme $(1+x)^n$;

$n!$ produit continuel $1.2.3\ldots n$.

Si $f(k) = (-1)^k n_k k^{n+1}$, on a

$$\sum_0^n f(k) = n!\,\frac{n.n+1}{2}.$$

(DURÈGE, de Zurich.)

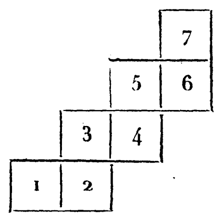
509. Soient p et q deux nombres *donnés*; p_1 la moyenne arithmétique, q_1 la moyenne géométrique; p_2 la moyenne arithmétique de p_1, q_1; q_2 leur moyenne géométrique, et ainsi de suite, de sorte que p_{n+1}, q_{n+1} sont les moyennes arithmétique et géométrique de p_n,

q_n. Quelle est la valeur de p_∞ et démontrer que $p_\infty = q_\infty$.

GAUSS.

510. Par les trois extrémités des axes principaux d'un ellipsoïde, on mène trois cordes parallèles; on projette chacune de ces cordes sur l'axe d'où elle part; on divise cette projection par l'axe sur lequel elle se trouve; la somme des trois quotients est constante.

511. Soient sept carrés égaux liés de telle sorte



chaque carré peut tourner à charnière seulement autour de la droite qui lui est commune avec le carré voisin; le carré 1 ne pourra prendre une position quelconque qu'envers le carré 7, et pas envers les autres carrés. Ainsi, si le carré 1 est maintenu fixe, il n'y a que le carré 7 qui soit entièrement libre. (MÖBIUS.)

512. Lorsqu'un corps peut tourner autour de six axes *indépendants*, on peut le faire tourner autour d'un axe quelconque. (MÖBIUS.)

513. Lorsqu'on donne un nombre de droites plus grand que *six*, il est toujours possible de trouver des forces qui, agissant suivant ces droites, se fassent équilibre; lorsque le nombre de droites est moindre, cette possibilité exige encore certaines conditions. (MÖBIUS.)

QUESTION DU GRAND CONCOURS GÉNÉRALISÉE

(voir t. XVIII, p. 77, 261 et 294);

PAR M. DESBOVES,
Professeur.

On donne dans un même plan une conique C et une courbe quelconque A; de tous les points de A on mène deux tangentes à la conique, et par les points de contact les deux normales correspondantes; il faut trouver le lieu B des intersections de ces normales.

Réciproquement, connaissant la courbe B de tous les points de cette courbe, on mène des normales à la conique C, et par les pieds des normales les tangentes correspondantes; on demande de trouver le lieu D des intersections de ces tangentes.

Remarque. Le lieu D pourra être identique avec la courbe A; mais plus généralement il se composera de plusieurs courbes distinctes, dont la courbe A fera nécessairement partie.

On a un exemple du premier cas, lorsque B est une ligne droite et la conique C une parabole; alors la courbe A et la courbe D sont identiques, et représentent toutes deux une hyperbole.

On peut donner du second cas deux exemples remarquables :

1°. Lorsque la conique C est une parabole, et que la courbe A se confond avec elle, la courbe B est évidemment la développée de la parabole; mais si l'on prend pour ligne B la développée de la parabole, on trouve que le lieu D se compose non-seulement de la parabole C, mais aussi d'une seconde parabole qui a même axe que la première, un paramètre huit fois plus petit et la convexité tournée en sens contraire.

2°. La conique C étant une parabole, et la ligne A une perpendiculaire à l'axe de la conique (c'est le problème particulier du concours général), on trouve que B est une parabole ayant même axe que la parabole C; mais si on se donne pour ligne B la parabole précédemment trouvée, on voit que le lieu D se compose de la perpendiculaire à l'axe de la parabole, et d'une hyperbole du troisième ordre ayant pour asymptotes l'axe de la parabole et une perpendiculaire à cet axe.

Voici quelques théorèmes généraux, qui lient entre elles les courbes A et B.

Théorème I. Lorsque la courbe A est la plus générale de son degré, la courbe B est de degré double si la conique C est une parabole, et de degré triple si la conique C est une ellipse ou une hyperbole. Une discussion qui n'exige pas que l'on connaisse l'équation de la courbe B, fait connaître les cas particuliers où le degré de cette courbe s'abaisse.

Théorème II. La réciproque du premier théorème est vraie : en général, le degré de la courbe D est double ou triple du degré de la courbe A, suivant que la conique C est une parabole, ou bien une ellipse, ou une hyperbole.

Théorème III. Si la conique C est une ellipse ou une hyperbole, et si la ligne A a une branche de courbe infinie ayant pour asymptote $\beta = k\alpha + h$ (k n'est ni nul ni infini), la ligne B a une branche infinie correspondante, dont l'asymptote est

$$y = -\frac{x}{k} - \frac{c^2 h}{a^2 k^2 \pm b^2}. \quad (*)$$

(*) a, b, c sont les demi-axes et la demi-excentricité de la conique.

Cette asymptote devient une normale à la conique, lorsque la première est une tangente à cette même conique.

Théorème IV. Si la conique C est une parabole, et si la courbe A possède une branche infinie ayant pour asymptote une droite non parallèle à l'axe de la parabole C, la ligne B aura une branche infinie perpendiculaire à la première à l'infini, mais cette branche ne pourra avoir d'asymptote que dans le cas où l'asymptote de A sera tangente à la parabole C. D'ailleurs dans ce cas même l'asymptote n'existera pas nécessairement; mais si l'asymptote de A est parallèle à l'axe de la parabole C, la courbe B a toujours une asymptote normale à la parabole.

Théorème V. Si la ligne A passe par le centre de la conique C, et qu'en ce point le coefficient angulaire m de la tangente à la courbe A ne soit ni nul ni infini, c'est-à-dire si la tangente n'est parallèle à aucun des deux axes, la ligne B a une branche infinie ayant pour asymptote

$$y = \mp \frac{a^2 m}{b^2} x.$$

Théorème VI. Lorsque la conique C est une hyperbole, outre les asymptotes données par les théorèmes précédents, la ligne B a encore des asymptotes en nombre généralement égal au nombre des points d'intersection de la ligne A et des asymptotes de l'hyperbole C. Voici la construction à faire pour obtenir l'asymptote correspondant à l'un des points d'intersection.

Par le point d'intersection qu'on a choisi, on mène une tangente à l'hyperbole C, puis par le point de contact une normale à la même courbe; l'asymptote de la ligne B sera parallèle à cette normale. On aura ensuite l'abscisse à l'origine de la même asymptote en prenant une quatrième proportionnelle aux axes a et b et à *moins l'ordonnée à l'origine* de la normale précédente.

Les théorèmes généraux précédents conduisent immédiatement aux conséquences suivantes :

1. Lorsque la conique C est une parabole et la ligne A une ligne droite, la ligne B est une parabole dont l'axe est perpendiculaire à la ligne droite donnée. Dans le cas particulier où la droite A est tangente à la parabole C ou parallèle à l'axe de cette parabole, la ligne B est une normale à la même courbe (théorèmes I et IV).

2. Lorsque la conique C est une ellipse ou une hyperbole, et la ligne A une ligne droite $\beta = k\alpha + h$, la ligne B est du troisième ordre, et a *une asymptote*

$$y = -\frac{x}{k} - \frac{c^2 h}{a^2 k^2 \pm b^2}.$$

Dans le cas de l'hyperbole, le théorème VI donne deux autres asymptotes.

Ces derniers résultats ont déjà été trouvés par MM. Terquem et de Jonquières.

3. Lorsque la conique C est une ellipse ou une hyperbole, et la ligne A une droite $\beta = m\alpha$ passant par le centre de la conique, en vertu des théorèmes III et V, la ligne B est une hyperbole qui a pour asymptotes

$$y = -\frac{1}{m}x, \quad y = \mp \frac{a^2 m}{b^2} x.$$

Dans le cas particulier où la ligne A est l'une des diagonales du rectangle construit sur les deux axes de la conique C, la ligne B est une droite perpendiculaire à la diagonale, menée par le centre de la conique.

4. La conique C étant toujours une ellipse ou une hyperbole, et la ligne A devenant une parallèle à l'un des axes de la conique, le coefficient k du théorème IV de-

vient nul ou infini, et l'on ne peut plus affirmer l'existence de la branche infinie de B et de son asymptote. Dans ce cas on trouve très-facilement, par un calcul direct, que la ligne B est une ellipse ou une hyperbole, suivant que la conique C est elle-même une ellipse ou une hyperbole.

Tous les théorèmes énoncés sont la conséquence des formules suivantes :

$$y = -\frac{2\alpha\beta}{p}, \qquad x = \frac{2p^2 - \alpha p + p^2}{p};$$

$$y = \frac{c^2\beta(\alpha^2 - a^2)}{\pm b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \qquad x = \frac{c^2\alpha(\pm b^2 - \beta^2)}{\pm b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}.$$

Les deux premières sont relatives à la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet, et les deux dernières sont relatives à l'ellipse et à l'hyperbole rapportées à leurs axes : α et β sont les coordonnées d'un point du plan de la conique C d'où l'on mène les tangentes à cette courbe; x et y sont les coordonnées du point d'intersection des normales correspondantes.

Remarque. Les formules que nous venons d'écrire conduisent aussi de la manière la plus simple aux équations des développées des coniques.

Note du Rédacteur. La courbe B a-t-elle des points *doubles* et de *rebroussement?* et combien? Ces données déterminent la *classe* de la courbe.

QUESTION 503.

Correction. $a^8 + 14a^4 + 1$ doit être élevé au cube. (Communiqué par M. Le Royer, professeur de spéciales au lycée de Bordeaux.)

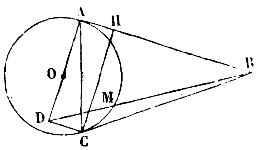
SOLUTION DES QUESTIONS 483 ET 484

(voir t. XVIII, p. 357);

PAR MM. DE LA BRIÈRE ET DE CHARODON,
Élèves de l'école des Carmes (classe de M. Gerono).

Question 483.

Le volume engendré par le triangle rectiligne ABD



tournant autour de AD est

$$\frac{1}{3}\pi \overline{AB}^2 . AD.$$

Le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC est égal au volume engendré par le trapèze ABCD moins le volume engendré par le segment AC.

Or, le volume engendré par le trapèze est

$$\frac{1}{3}\pi AD\left(\overline{BA}^2 + \overline{DC}^2 + AB.DC\right);$$

le volume engendré par le segment est

$$\frac{1}{3}\pi AD\left(\frac{3}{2}\overline{DC}^2 + \frac{1}{2}\overline{AD}^2\right);$$

le volume engendré par le triangle mixtiligne sera donc

$$\frac{1}{3}\pi AD\left(\overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 + AB.DC - \frac{3}{2}\overline{DC}^2 - \frac{1}{2}\overline{AD}^2\right).$$

Il faut donc prouver qu'on a l'égalité

$$\frac{1}{3}\pi AD\left(\overline{AB}^2+\overline{DC}^2+AB.DC-\frac{3}{2}\overline{DC}^2-\frac{1}{2}\overline{AD}^2\right)=\frac{1}{3}\pi AD.\overline{AB}^2,$$

ou bien

$$\overline{DC}^2+AB.DC-\frac{3}{2}\overline{DC}^2-\frac{1}{2}\overline{AD}^2=0,$$

$$2.AB.CD=\overline{DC}^2+\overline{AD}^2=\overline{AC}^2.$$

Abaissons de C une perpendiculaire CH sur AB, on aura

$$\overline{AC}^2=\overline{AH}^2+\overline{HC}^2.$$

Il faut donc prouver que

$$2AB.CD=\overline{AH}^2+\overline{HC}^2.$$

Or

$$\overline{HC}^2=\overline{CB}^2-\overline{HB}^2=\overline{AB}^2-\overline{HB}^2=\overline{HB}^2+\overline{AH}^2+2HB.AH-HB^2$$

$$=\overline{AH}^2+2HB.AH;$$

donc

$$\overline{AH}^2+\overline{HC}^2=2\overline{AH}^2+2HB.AH=2AH.(AH+BH)$$

$$=2AH.AB.$$

L'égalité à prouver devient donc

$$2AB.CD=2AH.AB,$$

qui est évidente puisque $AH=CD$.

Question 484.

Ce théorème est un corollaire du précédent.

Nous venons de démontrer que le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC était égal au volume engendré par ABD. Retranchant de chacun de ces volumes la partie commune engendrée par le triangle mixtiligne ABM, il reste les volumes engendrés par les triangles mixtilignes MBC, ADM et qui doivent être égaux. Ajoutant à chacun de ces volumes le volume engendré par DMC, on a

$$\text{vol. AMCD} = \text{vol. BDC}.$$

C. Q. F. D.

SECONDE SOLUTION DES QUESTIONS 483 ET 484

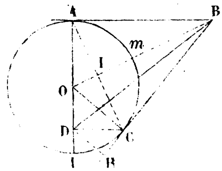
(voir t. XVIII, p. 357);

Par M. DROUARD,
Élève du lycée Napoléon.

Question 483.

D'un point B extérieur à une circonférence O, on mène deux tangentes BA et BC; on projette C en D sur le rayon OA et l'on fait exécuter une révolution complète à la figure autour de OA, l'un des rayons des points de contact; il faut demontrer que le volume engendré par le triangle mixtiligne CBA est équivalent au cône engendré par le triangle BDA.

Le volume engendré par le triangle mixtiligne CBA est équivalent au volume du tronc de cône à bases parallèles engendré par le trapèze rectangle ABCD, moins le



volume du segment sphérique engendré par CDA :

$$\text{vol.}\,BAMC = \text{vol.}\,ABCD - \text{vol.}\,CDAM.$$

Soient

$$BA = a,\quad CD = b,\quad OA = r,$$

nous aurons

$$\text{vol}BAMC = \frac{\pi}{3}\times AD(a^2 + b^2 + ab) - \frac{\pi}{2}\times b^2\times AD - \frac{\pi}{6}\times \overline{AD}^3$$

$$= \frac{\pi}{6}\times AD\left(2a^2 + 2ab - b^2 - \overline{AD}^2\right).$$

Le volume engendré par le triangle BDA est un cône qui a pour mesure

$$\frac{\pi}{3}\times a^2.AD,$$

il faut donc prouver que l'on a

$$\frac{\pi}{6}\times AD\left(2a^2 + 2ab - b^2 - \overline{AD}^2\right) = \frac{\pi}{3}\times AD.a^2$$

ou

$$2ab - b^2 = \overline{AD}^2 = (r + OD)^2.$$

Si nous menons OC, le triangle rectangle ODC donne

$$OD = \sqrt{r^2 - b^2};$$

nous aurons donc :

$$2ab - b^2 = r^2 + r^2 - b^2 + 2r\sqrt{r^2 - b^2},$$

$$ab = r^2 + r\sqrt{r^2 - b^2},$$

doù l'on tire, par un calcul facile,

$$b = \frac{2ar^2}{a^2 + r^2}.$$

Il suffit donc de démontrer l'existence de cette équation. A cet effet, joignons le point B au centre O, cette droite BO est bissectrice de l'angle ABC et est perpendiculaire sur le milieu de la droite AC puisque le triangle ABC est isocèle; soit I le point où BO coupe AC; désignant AI par x, le triangle rectangle OIA donne

$$\overline{OI}^2 = r^2 - x^2,$$

le triangle rectangle AIB

$$\overline{BI}^2 = a^2 - x^2.$$

Si nous faisons la somme de ces deux égalités et que nous augmentions de

$$2.OI \times BI = 2\sqrt{(r^2 - x^2)(a^2 - x^2)}$$

chaque membre de l'égalité obtenue, nous aurons

$$\overline{OI}^2 + 2\overline{OI} \times BI + \overline{BI}^2$$

$$= r^2 - x^2 + a^2 - x^2 + 2\sqrt{(r^2 - x^2)(a^2 - x^2)} = \overline{BO}^2.$$

Or dans le triangle rectangle OBA, on a

$$\overline{OB}^2 = a^2 + r^2,$$

donc

$$a^2 + r^2 = r^2 - 2x^2 + a^2 + 2\sqrt{(r^2 - x^2)(a^2 - x^2)},$$

$$x^2 = \sqrt{(r^2 - x^2)(a^2 - x^2)},$$

$$x^4 = (r^2 - x)(a^2 - x^2),$$

$$x^2(a^2 + r^2) = a^2 r^2,$$

$$x^2 = \frac{a^2 r^2}{a^2 + r^2}.$$

Les triangles AIO, ADC sont semblables, puisquils sont rectangles et que l'angle A leur est commun. On a

donc

$$\frac{b}{\text{OI}} = \frac{\text{AC}}{r},$$

$$b = \frac{\text{AC} \times \text{OI}}{r} = \frac{2x\sqrt{r^2 - x^2}}{r},$$

$$b = \frac{\dfrac{2ar}{\sqrt{a^2 + r^2}} \sqrt{\dfrac{r^2(a^2 + r^2) - a^2 r^2}{a^2 + r^2}}}{r},$$

$$= \frac{2ar\sqrt{r^2(a^2 + r) - a^2 r^2}}{r(a^2 + r^2)},$$

$$b = \frac{2ar^2}{a^2 + r^2}.$$

C Q. F. D.

Question 484.

La même figure étant faite que précédemment et exécutant la même révolution, il faut prouver que le segment sphérique engendré par CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD.

Le volume engendré par le triangle CBD est équivalent au volume engendré par le trapèze ABCD, moins le volume engendré par le triangle BDA. Il faut donc prouver que

$$\text{vol. CDA} = \text{vol. ABCD} - \text{vol. BDA}.$$

$$\frac{\pi . b^2}{2} \times \text{AD} + \frac{\pi}{6} \times \overline{\text{AD}}^3 = \frac{\pi}{3} \times \text{AD}(a^2 + b^2 + ab) - \frac{\pi}{3} \times \text{AD} . a^2,$$

$$3b^2 + \overline{\text{AD}}^2 = (a^2 + b^2 + ab) - 2a^2,$$

$$\overline{\text{AD}}^2 = 2ab - b^2,$$

$$(r + \text{OD})^2 = 2ab - b^2,$$

$$r^2 + r^2 - b^2 + 2r\sqrt{r^2 - b^2} = 2ab - b^2,$$

$$r\sqrt{r^2 - b^2} = ab - r^2,$$

$$r^4 - a^2 b^2 = a^2 b^2 + r^4 - 2abr^2,$$

$$b^2(a^2 + r^2) = 2abr^2,$$

$$b = \frac{2ar^2}{a^2 + r^2},$$

ce que nous avons prouvé plus haut.

Note. MM. Henri Delorme, élève du lycée Louis-le-Grand, Charles Kessler, élève du Prytanée Militaire, et Puech, élève du lycée de Castres, ont résolu ces deux questions de la même manière.

DETERMINATION DU DEGRÉ DE L'ÉQUATION DE CERTAINES SURFACES ENVELOPPES;

PAR M. TH. MOUTARD.

On est fréquemment conduit, dans l'étude des surfaces et des lignes à double courbure algébriques, à rechercher le degré du résultat de certaines éliminations spéciales où l'application immédiate du théorème de Bezout conduirait à un nombre trop élevé. Plusieurs de ces questions, particulièrement celles qui se rapportent au contact des surfaces et aux surfaces enveloppes, se résolvent simplement par la considération de deux lieux géométriques, à savoir: 1° *le lieu du point dont les plans harmoniques par rapport à quatre surfaces données se coupent en un même point;* 2° *le lieu du point dont les plans harmoniques par rapport à trois surfaces données se coupent suivant une même droite.*

1. L'étude du premier de ces deux lieux n'offrant aucune difficulté, je me bornerai à énoncer les résultats auxquels elle conduit.

Soient donc

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0,$$

les équations de quatre surfaces algébriques mises sous forme homogène, désignons d'ailleurs par l, m, n, p leurs degrés respectifs et par x, y, z, t les coordonnées variables ; on trouve immédiatement que le lieu du point dont les plans harmoniques se coupent suivant un même point est la surface représentée par l'équation

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dL}{dx} & \frac{dL}{dy} & \frac{dL}{dz} & \frac{dL}{dt} \\ \frac{dM}{dx} & \frac{dM}{dy} & \frac{dM}{dz} & \frac{dM}{dt} \\ \frac{dN}{dx} & \frac{dN}{dy} & \frac{dN}{dz} & \frac{dN}{dt} \\ \frac{dP}{dx} & \frac{dP}{dy} & \frac{dP}{dz} & \frac{dP}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Le degré de cette surface étant égal à

$$(l + m + n + p - 4)$$

on a les théorèmes suivants :

1°. Dans le réseau des surfaces représentées par l'équation

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0,$$

où λ, μ, ν sont des constantes arbitraires, il y en a une infinité qui sont tangentes à la surface P ; le lieu des points de contact de toutes ces surfaces avec P est la courbe (P, Δ) d'ordre $p(l + m + n + p - 4)$.

2°. Dans le faisceau des surfaces représentées par l'équation

$$\lambda L + \mu M = 0,$$

il en existe en général $np\,(l+m+n+p-4)$ qui sont tangentes à la courbe d'intersection de $N=0$ et de $P=0$.

3°. L'équation de condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients de l'équation d'une surface de degré m pour qu'elle soit tangente à la courbe d'intersection de deux surfaces données, l'une de degré n, l'autre de degré p, est par rapport à ces coefficients de degré $np\,(2m+n+p-4)$.

4°. La surface enveloppe de toutes les surfaces de degré l dont les coefficients sont des fonctions de degré m de trois paramètres variables liés entre eux par deux relations, l'une de degré n, l'autre de degré p, est en général d'un ordre marqué par $lnp\,(2m+n+p-4)$.

2. Le lieu géométrique du point dont les plans harmoniques par rapport à trois surfaces passent par une même droite, consiste en une ligne à double courbure, dont la définition algébrique complète exige la connaissance de quatre surfaces. Soient en effet

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0,$$

les équations de trois surfaces algébriques respectivement d'ordre $\lambda+1$, $\mu+1$, $\nu+1$; les plans harmoniques d'un point x, y, z, t par rapport à ces surfaces ont pour équations

$$X\frac{dL}{dx}+Y\frac{dL}{dy}+Z\frac{dL}{dz}+T\frac{dL}{dt}=0,$$

$$X\frac{dM}{dx}+Y\frac{dM}{dy}+Z\frac{dM}{dz}+T\frac{dM}{dt}=0,$$

$$X\frac{dN}{dx}+Y\frac{dN}{dy}+Z\frac{dN}{dz}+T\frac{dN}{dt}=0.$$

Pour que ces trois plans passent par une même droite, il faut et il suffit que l'on ait, pour toutes les valeurs de

$\alpha, \beta, \gamma, \delta,$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \frac{dL}{dx} & \frac{dL}{dy} & \frac{dL}{dz} & \frac{dL}{dt} \\ \frac{dM}{dx} & \frac{dM}{dy} & \frac{dM}{dz} & \frac{dM}{dt} \\ \frac{dN}{dx} & \frac{dN}{dy} & \frac{dN}{dz} & \frac{dN}{dt} \end{vmatrix} = 0\ (*).$$

Le lieu cherché consiste donc dans le système des points communs à toutes les surfaces que peut représenter l'équation

$$\Delta = 0.$$

Or il est aisé de voir que toutes ces surfaces passent par une même courbe, et qu'il est en général impossible de définir celle-ci d'une manière précise avec moins de quatre équations. Considérons en effet les quatre surfaces

$$A = \frac{d\Delta}{d\alpha} = 0, \quad B = \frac{d\Delta}{d\beta} = 0, \quad C = \frac{d\Delta}{d\gamma} = 0, \quad D = \frac{d\Delta}{d\delta} = 0,$$

on a identiquement

$$A\frac{dL}{dx} + B\frac{dL}{dy} + C\frac{dL}{dz} + D\frac{dL}{dt} = 0;$$

$$A\frac{dM}{dx} + B\frac{dM}{dy} + C\frac{dM}{dz} + D\frac{dM}{dt} = 0,$$

$$A\frac{dN}{dx} + B\frac{dN}{dy} + C\frac{dN}{dz} + D\frac{dN}{dt} = 0.$$

Par suite les coordonnées de tout point situé sur deux d'entre elles

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = 0$$

(*) Cela ne s'accorde pas avec le résultat (t. XVI, p. 268). Où git l'erreur? Tm.

satisfont aux équations

$$C\frac{dL}{dz}+D\frac{dL}{dt}=0,$$

$$C\frac{dM}{dz}+D\frac{dM}{dt}=0,$$

$$C\frac{dN}{dz}+D\frac{dN}{dt}=0.$$

Posant

$$\Delta'=\begin{vmatrix} \alpha' & \frac{dL}{dz} & \frac{dL}{dt} \\ \beta' & \frac{dM}{dz} & \frac{dM}{dt} \\ \gamma' & \frac{dN}{dz} & \frac{dN}{dt} \end{vmatrix}$$

et

$$P=\frac{d\Delta'}{d\alpha'},\quad Q=\frac{d\Delta'}{d\beta'},\quad R=\frac{d\Delta'}{d\gamma'};$$

on tire de là

$$PC=0,\quad QC=0,\quad RC=0,$$

$$PD=0,\quad QD=0,\quad RD=0.$$

D'autre part les équations

$$P=0,\quad Q=0,\quad R=0$$

entraînent évidemment

$$A=0 \quad \text{et} \quad B=0$$

sans entraîner

$$C=0 \quad \text{et} \quad D=0.$$

De là résulte que dans le système des points communs à A et à B, il faut distinguer, à côté des points situés aussi sur C et D, lesquels forment une courbe δ, les points communs P, Q, R. Ceux-ci forment eux-mêmes une courbe

δ' qui ne constitue en général l'intersection *complète* d'aucun *couple* de surfaces algébriques; car les identités

$$P\frac{dL}{dz} + Q\frac{dM}{dz} + R\frac{dN}{dz} = o,$$

$$P\frac{dL}{dt} + Q\frac{dM}{dt} + R\frac{dN}{dt} = o,$$

montrent que l'intersection complète de P et Q se compose, d'une part, de la courbe commune aux deux surfaces

$$\frac{dN}{dz} = o, \quad \text{et} \quad \frac{dN}{dt} = o,$$

et, d'autre part, d'une courbe δ' située sur R. L'intersection complète de A et B se compose donc de deux courbes : la courbe principale δ qui constitue le lieu cherché et une courbe auxiliaire δ'. Si l'on adjoignait aux deux surfaces A et B la surface $C = o$, laquelle ne contient pas δ', la courbe δ ne se trouverait pas encore entièrement définie, car parmi les points où δ' rencontre C, il en existe qui ne sont pas situés sur δ, à savoir les points communs aux trois surfaces

$$\frac{dL}{dt} = o, \quad \frac{dM}{dt} = o, \quad \frac{dN}{dt} = o.$$

La discussion qui précède permet d'établir immédiatement le nombre des points où la courbe δ est rencontrée par un plan, ou plus généralement par une surface algébrique de degré m, $F = o$. Pour cela, je remarque que les surfaces

$$A, \quad B, \quad P, \quad Q, \quad \frac{dN}{dz}, \quad \frac{dN}{dt}$$

ont respectivement pour degrés

$$\lambda + \mu + \nu, \quad \lambda + \mu + \nu, \quad \mu + \nu, \quad \nu + \lambda, \quad \nu, \quad \nu;$$

le nombre des points communs à F, A, B est donc $m(\lambda + \mu + \nu)^2$; il se compose des points d'intersection de F et δ et des points d'intersection de F et δ'; or ces derniers sont les points communs à F, P, Q, en exceptant les points communs à F, $\frac{dN}{dz}$, $\frac{dN}{dt}$, ils sont donc en nombre

$$m(\mu + \nu)(\nu + \lambda) - m\nu^2 = m(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu),$$

et par suite le nombre cherché est

$$m[(\lambda + \mu + \nu)^2 - \mu\nu - \nu\lambda - \lambda\mu]$$

ou

$$m(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu).$$

On peut ajouter que le nombre des points communs aux deux courbes δ et δ' est égal à

$$(\lambda + \mu + \nu)(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) - \lambda\mu\nu.$$

Si l'on joint à ces résultats le degré de la surface développable formée par les tangentes à la courbe δ, lequel peut s'établir par des considérations analogues un peu plus complexes, et que je trouve égal à

$$\begin{gathered}2(\lambda + \mu + \nu - 1)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) \\ - (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)(\lambda + \mu + \nu) + \lambda\mu\nu,\end{gathered}$$

on aura tous les éléments essentiels relatifs à cette courbe; car on en déduira par les formules de Steiner le degré et la classe des cônes qui ont cette courbe pour directrice; le nombre de leurs arêtes doubles, de leurs plans d'inflexion, de leurs plans doublement tangents, et par suite aussi le nombre des plans osculateurs que l'on peut mener à la courbe par un point quelconque, ou, ce qui revient au même, la classe de la surface développable formée par ses tangentes. La connaissance du nombre des points où la courbe δ est rencontrée par une surface algébrique, fournit la solution de la question suivante :

Dans le faisceau des surfaces représentées par l'équation

$$6M + \gamma N = 0,$$

où M *est de degré* $\mu + 1$, N *de degré* $\nu + 1$, *combien y en a-t-il qui soient tangentes à une surface donnée* L *de degré* $\lambda + 1$.

Il suit, en effet, des propriétés connues du plan harmonique, que les points de contact de L avec les diverses surfaces du faisceau qui lui sont tangentes sont situés sur la courbe δ relative aux trois surfaces L, M et N et que leur nombre est par conséquent égal à

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu).$$

D'ordinaire on suppose $\mu = \nu$, cette formule devient alors

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 3\mu^2),$$

et le résultat qu'elle exprime peut s'énoncer sous la forme suivante, utile à signaler :

L'équation de condition à laquelle doivent satisfaire les coefficients des équations de deux surfaces algébriques l'une d'ordre $\lambda + 1$, *l'autre d'ordre* $\mu + 1$, *pour que ces deux surfaces soient tangentes entre elles, est de degré*

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 3\mu^2)$$

par rapport aux coefficients de la seconde, et de degré

$$(\mu + 1)(\mu^2 + 3\lambda\mu + 3\lambda^2)$$

par rapport aux coefficients de la première.

De là on déduit enfin que :

La surface enveloppe de toutes les surfaces de degré l *dont les coefficients sont des fonctions de degré* m *de* *trois paramètres arbitraires liés entre eux par une relation unique de degré* n *est en général d'un ordre marqué par*

$$ln[(n-1)^2 + 2(n-1)(m-1) + 3(m-1)^2].$$

Ce théorème et son analogue de la fin du n° 1 sont susceptibles d'applications importantes dans la théorie des surfaces algébriques. Ils permettent entre autres d'obtenir immédiatement des résultats analogues à quelques-uns de ceux énoncés pour les courbes dans un Mémoire de M. Steiner présenté dans la séance des sections réunies de l'Académie de Berlin du 10 août 1848 (*Journal* de Liouville, t. XVIII, p 309). Je me bornerai à citer les deux suivants :

Lorsqu'un point O parcourt une surface de degré r, la surface polaire de degré $(m-p)$ du point O, par rapport à une surface donnée d'ordre m, est enveloppée par une surface de degré

$$(m-p)r[(r-1)^2 + 2(r-1)(p-1) + 3(p-1)^2].$$

Lorsque le point O parcourt la courbe d'intersection de deux surfaces de degré r et r', la polaire de degré $m-p$ du point O, par rapport à une surface de degré m, est enveloppée par une surface de degré

$$(m-p)rr'(2p + r + r' - 4).$$

En faisant

$$r' = 1,$$

on trouve

$$(m-p)r(r + 2p - 3),$$

ce qui est le résultat donné par M. Steiner (p. 311 du Mémoire cité).

APPLICATION

De la transformation par rayons vecteurs réciproques (*) à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données;

PAR M. A. MANNHEIM.

1. M. Dupin, à la p. 22 du t. I[er] de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*, a montré que les lignes de courbure de la surface dont il s'agit sont des circonférences; à la p. 420 du t. II[e], le même géomètre a donné l'analyse d'un Mémoire, qui n'a pas été imprimé, relatif aux principales propriétés de cette surface; enfin, dans les *Applications de Géométrie*, p. 200, on trouve les démonstrations de la plupart des propriétés de cette même surface, que M. Dupin désigne sous le nom de *cyclide*.

Je me propose de faire voir comment, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, on arrive simplement aux propriétés connues de la cyclide et à d'autres qui n'ont pas été remarquées.

Je vais d'abord montrer qu'on peut toujours transformer une cyclide en tore; cette transformation étant faite, il ne restera plus qu'à revenir des propriétés du tore aux propriétés de la cyclide.

2. LEMME. *On peut toujours transformer un groupe de trois sphères données en un groupe de trois autres sphères ayant leurs centres en ligne droite. Le lieu des pôles de transformation est la circonférence qui coupe à angle droit les grands cercles des sphères données situés dans le plan passant par leurs centres.*

(*) Nous ne ferons usage dans ce travail que de cette transformation et nous sous-entendrons les mots : *par rayons vecteurs réciproques*.

Il est bien évident que les pôles de transformation doivent être dans le plan des centres des sphères données. Il est bien clair aussi que si nous transformons les grands cercles situés dans ce plan en trois autres dont les centres sont en ligne droite, la même transformation donnera lieu pour les trois sphères à trois autres sphères dont les centres sont en ligne droite.

Le problème est donc ramené à ce problème de géométrie plane : *Transformer trois cercles en trois autres cercles dont les centres sont en ligne droite.*

Chacun des points de la circonférence qui coupe orthogonalement les circonférences données, peut être pris pour pôle de transformation. En effet, si l'on prend un de ces points pour pôle, cette circonférence orthogonale se transforme en une droite qui coupe à angle droit les transformées des circonférences données; cette droite coupant à angle droit ces transformées, contient leurs centres; donc, etc.

3. *La cyclide se compose généralement de quatre nappes.*

D'après le lemme précédent, nous pouvons transformer les trois sphères données en trois autres sphères dont les centres sont en ligne droite, c'est-à-dire transformer la cyclide en tore.

Examinons ce qui se passe dans le cas particulier où les centres des sphères données sont en ligne droite. Pour cela, menons par cette ligne un plan quelconque qui coupe les sphères suivant trois cercles. On peut généralement mener à ces circonférences huit circonférences tangentes, mais ces huit circonférences sont symétriques deux à deux par rapport à la ligne des centres des circonférences données. En faisant tourner toute la figure autour de cette droite, on n'engendrera donc que quatre tores. A ces quatre tores correspondent les quatre nappes de la cyclide. Les huit cercles qui engendrent les quatre tores pouvant se réduire selon les positions relatives des grands cercles auxquels ils sont tangents, on voit que ce n'est que dans le cas le plus général que la cyclide se compose de quatre nappes.

4. *Les nappes de la cyclide se coupent deux à deux suivant des circonférences.*

Car les tores provenant de la transformation de la cyclide se coupent deux à deux suivant des circonférences. Nous verrons plus loin que ces intersections sont des lignes de courbure de la cyclide. En transformant les tores pour revenir à la cyclide, on peut prendre le pôle de transformation sur la surface de l'un d'eux ou en un point de l'une des circonférences résultant de leur intersection; dans le premier cas, la cyclide a une nappe s'étendant à l'infini; dans le deuxième cas, il y a deux nappes s'étendant à l'infini.

Nous allons étudier en particulier l'une des nappes de la surface, c'est-à-dire la cyclide provenant de la transformation d'un tore.

5. *Les lignes de courbure de la cyclide sont des circonférences* (*).

Le tore a pour lignes de courbure les méridiens et les parallèles; comme ces lignes sont des circonférences, leurs transformées sont aussi des circonférences; donc, etc.

6. *Le plan d'une ligne de courbure de la cyclide coupe cette surface partout sous le même angle.*

Par un point quelconque p de l'espace, on peut toujours faire passer des sphères contenant les parallèles ou les mé-

---

(*) *Voir* le Mémoire de M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. XII, p. 282).

ridiens d'un tore donné. Toutes ces sphères coupent le tore, le long de leurs lignes d'intersection, sous le même angle.

En transformant, le pôle de transformation étant en p, ces sphères deviennent les plans des lignes de courbure de la cyclide; donc, etc.

En transformant par rapport à un point quelconque, on voit que :

Une sphère qui rencontre une cyclide suivant une ligne de courbure, coupe cette surface partout sous le même angle.

Ce théorème est un cas particulier du suivant :

Si une surface a une ligne de courbure sphérique, la sphère sur laquelle se trouve cette ligne de courbure coupe la surface partout sous le même angle (*).

Ce théorème comprend, comme cas particulier, le théorème suivant, de M. Joachimstahl, d'où on l'a déduit:

Si dans une surface une ligne de courbure est plane, le plan de cette ligne coupe la surface partout sous le même angle (**).

7. *La cyclide admet toujours deux plans tangents qui la touchent suivant des lignes de courbure.*

Par un point quelconque p de l'espace, on peut toujours mener deux sphères tangentes à un tore. Les lignes de contact sont un méridien et un parallèle, ou deux méridiens, ou deux parallèles.

En prenant p pour pôle de transformation, le tore devient une cyclide et les sphères tangentes des plans tangents à cette surface. Les lignes de contact sont les trans-

---

(*) Voir *Journal* de M. Liouville, t. XVIII, p. 128, *Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques;* par M. J.-A. Serret.

(**) Voir *Journal* de M. Crelle, t. XXX, p. 347, et *Nouvelles Annales*.

formées des lignes de courbure du tore, c'est-à-dire des lignes de courbure de la cyclide.

Lorsque les deux plans touchent la cyclide suivant des lignes de courbure d'un même système, cette surface peut être considérée comme l'enveloppe d'une sphère tangente à deux plans et à une sphère donnée.

8. *La cyclide peut être considérée de deux manières différentes, comme la surface enveloppe de sphères tangentes à trois autres.*

Le tore peut être considéré comme l'enveloppe d'une sphère tangente à trois autres dont les centres sont en ligne droite, ou comme l'enveloppe de sphères tangentes à trois autres sphères dont les rayons sont égaux. La transformation des sphères de chacun de ces systèmes de génération conduit aux deux systèmes de sphères dont la cyclide est l'enveloppe.

Nous appellerons *premières sphères* de la cyclide, celles qui correspondent aux sphères de rayons égaux du tore, et *deuxièmes sphères* celles qui correspondent aux sphères enveloppant le tore, et dont les centres sont en ligne droite.

Si l'on se donne trois des premières sphères, les deuxièmes sphères enveloppent la cyclide, que l'on obtient encore en cherchant l'enveloppe des sphères tangentes à trois des deuxièmes sphères supposées fixes.

Il est facile de voir que pour le tore, dans l'un ou l'autre système de génération, les lieux des points de contact des sphères variables et des sphères fixes sont des circonférences; on a, d'après cela, par la transformation, le théorème suivant, dû à Dupuis (*) :

Les lieux des points de contact des sphères mobiles et des sphères fixes sont des circonférences.

(*) *Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. I, p. 19; t. II, p. 422.

On peut ajouter que, *ces circonférences sont des lignes de courbure de la surface enveloppe des sphères mobiles.*

9. *Le lieu des centres de courbure de la cyclide se compose de deux coniques situées dans des plans perpendiculaires entre eux.*

M. Dupin a démontré ce théorème d'une manière très-simple dans ses *Applications de Géométrie.*

Nous allons examiner séparément le lieu des centres des sphères de chacun des systèmes.

Commençons par le lieu des centres des deuxièmes sphères, c'est-à-dire qui correspondent à celles du tore qui ont leurs centres en ligne droite.

Les centres de ces sphères sont dans le plan passant par le pôle de transformation et par l'axe du tore qui a donné lieu à la cyclide que nous considérons.

Nous voyons donc déjà que le lieu des centres des deuxièmes sphères est une courbe plane; nous pouvons ajouter que le plan de cette courbe est un plan de symétrie de la cyclide. Ce plan coupe la cyclide suivant deux circonférences, le lieu des centres est maintenant facile à trouver, puisque ce n'est autre chose que le lieu des points également distants de ces deux circonférences, c'est-à-dire une conique ayant pour foyers les centres de ces circonférences.

Examinons le lieu des centres des premières sphères.

Par le pôle p, menons une sphère coupant orthogonalement le tore, qui par la transformation conduit à la cyclide que nous considérons; à cette sphère correspond un plan qui doit contenir les centres des premières sphères. Ce plan est évidemment un plan de symétrie de la cyclide.

Les centres des premières sphères doivent se trouver aussi sur la surface conique, que l'on obtient en joignant p aux centres des premières sphères du tore.

Le lieu cherché étant sur un plan et sur un cône, est la courbe d'intersection de ces surfaces, c'est-à-dire une conique.

Le lieu des centres de courbure d'une cyclide se compose donc de deux coniques; il est facile de voir que chacune d'elles a pour sommets les foyers de l'autre.

La sphère qui passe par p et qui coupe orthogonalement le tore, a son centre sur l'axe de cette surface; elle est donc coupée à angle droit par tous les plans méridiens; mais par la transformation elle devient un plan de symétrie de la cyclide; ce plan doit donc être perpendiculaire au plan méridien passant par p, qui est aussi plan de symétrie de la cyclide. Nous voyons donc que les plans de symétrie de la cyclide sont perpendiculaires entre eux.

10. *Les plans des circonférences, lignes de courbure de la cyclide, passent par deux droites perpendiculaires entre elles.*

Par p faisons passer des sphères contenant les parallèles du tore transformé de la cyclide, toutes ces sphères se coupent suivant un petit cercle qui passe par p, dont le plan est perpendiculaire à l'axe du tore, et dont le centre est sur cet axe. De même, les sphères passant par p et qui contiennent les méridiens du tore, se coupent suivant une circonférence située dans le plan méridien qui contient p.

En transformant toutes ces sphères, on a les plans des lignes de courbure; tous ces plans passent par les transformées des deux circonférences que nous venons de trouver, c'est-à-dire par deux droites.

Chacune de ces droites est dans un plan de symétrie et perpendiculaire à l'autre; elles doivent donc être perpendiculaires entre elles.

Ces droites sont les axes radicaux des deux systèmes de sphères qui engendrent la cyclide.

Le théorème que nous venons de démontrer est un cas particulier du théorème suivant, dû à M. Bonnet (*) :

Dans toute surface à lignes de courbure planes, les plans des lignes de courbure d'un même système sont tangents à un cylindre, et les deux cylindres, enveloppes respectives des lignes de courbure du premier et du second système, ont leurs génératrices perpendiculaires.

11. *Les centres des circonférences, lignes de courbure de la cyclide, sont sur deux courbes planes transformées de coniques.*

Les deux droites perpendiculaires entre elles que nous venons de trouver, coupent les plans de symétrie en deux points. Les pieds des perpendiculaires abaissées de ces points sur les tangentes aux coniques lieux des centres de courbure de la cyclide, ne sont autres que les centres des circonférences, lignes de courbure. On sait que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes d'une conique, est la transformée d'une conique ; donc, etc.

12. *Le lieu des sommets des cônes circonscrits à la cyclide le long des lignes de courbure se compose des axes radicaux des deux systèmes de sphères* (**).

On démontre facilement cette propriété, en remarquant que les plans de symétrie coupent la cyclide suivant des circonférences qui ont pour centres de similitude les points où ces mêmes plans sont coupés par les axes radicaux des systèmes de sphères.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 35e cahier, p. 137.

(**) *Voir* un Mémoire de M. Chasles (*Correspondance sur l'École Polytechnique*, t. III, p. 341).

13. *Toute sphère doublement tangente à une cyclide coupe cette surface suivant deux circonférences* (*).

Il suffit, pour trouver ce théorème, de transformer celui de M. Villarceau : Un plan doublement tangent à un tore coupe cette surface suivant deux circonférences.

14. *Les plans des circonférences, résultant de l'intersection de la cyclide avec une sphère qui lui est doublement tangente, sont eux-mêmes doublement tangents à la cyclide.*

Concevons un tore, un plan doublement tangent et les circonférences résultant de l'intersection de ces surfaces; par un point p, faisons passer des sphères qui contiennent chacune l'une de ces circonférences. Toutes ces sphères sont tangentes au tore. En transformant cette propriété, le pôle de transformation étant en p, on a le théorème que nous venons d'énoncer.

Les théorèmes 13 et 14 sont vrais pour le tore; on a donc le théorème suivant, qui comprend comme cas particulier celui de M. Villarceau.

Toute sphère doublement tangente à un tore coupe cette surface suivant deux circonférences qui sont dans des plans doublement tangents au tore.

Voici encore une généralisation du même théorème :

Toute sphère doublement tangente à la surface engendrée par une circonférence qui tourne autour d'une droite quelconque, coupe cette surface suivant deux circonférences.

M. J.-A. Serret, en étudiant cette surface, a trouvé que, par chacun de ces points, il passe sept sections circulaires : le parallèle, deux circonférences imaginaires et qua-

---

(*) J'ai énoncé le même théorème sous une forme différente dans le t. XV, p. 60.

tre réelles qui sont, deux à deux, symétriques par rapport au plan méridien passant par le point considéré sur la surface. Par deux de ces circonférences symétriques on peut faire passer une sphère; cette sphère coupe alors la surface suivant deux circonférences qui ont deux points communs. Il y a en chacun de ces points deux tangentes qui sont à la fois tangentes à la surface donnée et à la sphère, c'est-à-dire que ces deux surfaces ont en deux points des plans tangents communs; elles sont donc doublement tangentes : d'où l'on peut déduire le théorème que nous venons d'énoncer.

NOTE A.

Nous avons vu que la cyclide peut être considérée de deux manières différentes comme l'enveloppe de sphères.

Au moyen du lemme, nous avons montré qu'on pouvait toujours transformer la cyclide en tore, et pour cela, nous avons cherché les pôles de transformation tels, que les deuxièmes sphères de la cyclide aient leurs centres en ligne droite.

En opérant ainsi, nous avons transformé les premières sphères en sphères de rayons égaux.

Nous pouvons donc dire :

On peut toujours transformer un groupe de trois sphères données en un groupe de trois autres sphères de rayons égaux; le lieu des pôles de transformation est une circonférence.

Il s'agit de voir comment cette circonférence est placée par rapport aux trois sphères données, et pour cela, il faut d'abord examiner sa position par rapport aux deuxièmes sphères.

Elle est dans le plan des centres des deuxièmes sphères, son centre est au point où ce plan est percé par l'axe radical des deuxièmes sphères, et son rayon est la racine carrée de la puissance de ce dernier point par rapport aux deuxièmes sphères.

Elle est donc dans le plan mené par l'axe radical des sphères données perpendiculairement à la ligne des centres de similitude externe de ces sphères. Son centre est à l'intersection de ce plan et de cette ligne, et son rayon est la racine carrée de la puissance de ce point d'intersection par rapport à l'une des circonférences touchant de la même manière les trois grands cercles des sphères données situées dans le plan des centres de ces dernières.

La circonférence, lieu des pôles transformations, est ainsi définie par rapport aux sphères données.

La puissance de l'un de ses points a, par rapport à l'une des sphères données, divisée par le rayon de cette sphère, est proportionnelle à l'inverse du rayon de la transformée de cette sphère, obtenue en prenant le pôle en a. On peut obtenir ainsi trois rapports, un pour chacune des sphères données; ces trois rapports doivent être égaux, puisque les rayons des transformées sont égaux. Nous pouvons donc dire :

Le lieu des points tels, que leurs puissances, par rapport à trois sphères données, soient entre elles comme les rayons de ces sphères, est une circonférence dont le plan est perpendiculaire au plan passant par les centres des sphères données.

NOTE B.

Nous avons vu que le lieu des centres des circonférences, lignes de courbure de la cyclide, sont des courbes planes transformées de coniques. Nous pouvons déduire de là deux théorèmes de géométrie plane.

Ces transformées sont dans les plans de symétrie de la cyclide. Considérons l'un de ces plans et la transformée qu'il contient; ce plan coupe la cyclide suivant deux circonférences; et la droite, suivant laquelle se coupent les plans des lignes de courbure, dont nous considérons le lieu des centres, en un point qui est le centre de similitude des deux circonférences dont nous venons de parler.

On a donc dans ce plan de symétrie deux circonférences, l'un de leur centre de similitude et des droites issues de ce point, qui représentent les intersections des plans des lignes de courbure. Les points de la transformée sont les milieux des portions de ces droites comprises entre les circonférences. On peut donc dire :

Par le centre de similitude de deux circonférences on mène des transversales, on prend sur ces droites les points également distants des points anti-homologues qu'elles contiennent; le lieu de ces points est une transformée de conique.

Par une transformation facile, on déduit le théorème suivant :

Par le centre de similitude de deux circonférences on mène des transversales, on prend sur ces droites les conjuguées harmoniques du centre de similitude par rapport aux points anti-homologues qu'elles contiennent. Le lieu de ces points est une conique.

NOTE C.

Nous avons énoncé quelques propriétés des surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques.

Nous ajouterons encore la suivante, que nous allons généraliser :

Si une surface admet un système de lignes de courbures sphériques, toute surface qui lui est parallèle jouit de la même propriété.

La démonstration de ce théorème connu est immédiate, lorsque l'on s'appuie sur le théorème de M. Joachimstahl.

Nous allons le généraliser en le transformant, mais pour cela nous allons l'énoncer différemment.

On peut considérer une surface parallèle à une autre comme l'enveloppe de sphères égales constamment tangentes à celle-ci. Nous pouvons donc dire :

Si une surface admet un système de lignes de courbure sphériques, la surface enveloppe de sphères égales tangentes à la première surface jouit de la même propriété.

En transformant la surface donnée, on obtient une surface qui jouit encore de la propriété d'avoir des lignes de courbure sphériques. Les sphères se transforment en sphères tangentes à cette nouvelle surface, et comme elles ont des rayons égaux, leurs transformées sont telles, que, pour chacune d'elles, le rapport de la puissance du pôle de transformation à leur rayon est constant.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

On donne un point fixe p *et une surface qui admet un système de lignes de courbure sphériques; on construit les sphères tangentes à cette surface, telles que la puissance de* p, *par rapport à chaque sphère, divisée par le rayon de celle-ci, soit constante : l'enveloppe de toutes les sphères ainsi construites est une surface qui admet un système de lignes de courbure sphériques.*

Lorsque p est à l'infini, toutes les sphères ont le même rayon, et l'on retrouve le théorème d'où nous sommes partis.

Note du Rédacteur. Logocyclique (p. 28) : c'est l'enveloppe du cercle décrit sur le rayon vecteur comme diamètre.

SOLUTION DE LA QUESTION 488

(voir t. XVIII, p. 359);

PAR M. CHARLES KESSLER,
Élève du Prytanée Militaire.

On donne : 1° une conique; 2° deux tangentes fixes à cette conique; 3° deux points fixes dans le plan de la conique; 4° une tangente mobile rencontre les deux tangentes fixes en deux points variables formant avec les points fixes les sommets d'un quadrilatère variable; les diagonales de ce quadrilatère se coupent suivant des points situés sur une conique passant par les points fixes; et énoncer le théorème correspondant d'après le principe de dualité.

Solution. Je rapporte la conique aux deux tangentes fixes prises pour axes coordonnés; son équation sera

$$xy + \lambda(ax + by - 1)^2 = 0,$$

$ax + by - 1 = 0$ étant l'équation de la ligne des contacts.

Soient

$$A(x = \alpha,\ y = \beta),\quad C(x = \gamma,\ y = \delta),$$

les deux points fixes, O l'origine.

L'équation d'une tangente en un point (x', y') est

$$x[y' + 2a\lambda(ax' + by' - 1)] + y[x' + 2b\lambda(ax' + by' - 1)] - 2\lambda(ax' + by' - 1) = 0,$$

ou, en réduisant,

$$xy' + yx' + 2\lambda(ax' + by' - 1)(ax + by - 1) = 0.$$

Faisons successivement

$$x = 0, \quad y = 0$$

dans cette équation, nous aurons pour l'ordonnée et l'abscisse à l'origine

$$\mathrm{OB} = \frac{2\lambda(ax' + by' - 1)}{x' + 2\lambda b(ax' + by' - 1)},$$

$$\mathrm{OD} = \frac{2\lambda(ax' + by' - 1)}{y' + 2a\lambda(ax' + by' - 1)};$$

on aura donc, pour les équations de AB et de CD,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} (\mathrm{AB}) \quad y - \frac{2\lambda(ax' + by' - 1)}{x' + 2b\lambda(ax' + by' - 1)} & \\ = \frac{\beta - \dfrac{2\lambda(ax' + by' - 1)}{x' + 2b\lambda(ax' + by' - 1)}}{\alpha} x, & \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad (\mathrm{CD}) \quad y - \delta = \frac{-\delta}{\dfrac{2\lambda(ax' + by' - 1)}{y' + 2a\lambda(ax' + by' - 1)} - \gamma}(x - \gamma).$$

Éliminant x' et y' entre l'équation (1), (2) et l'équation

$$(3) \qquad x'y' + \lambda(ax' + by' - 1)^2 = 0,$$

on obtient l'équation du lieu cherché.

De l'équation (3) on tire

$$y' = -\frac{\lambda(ax' + by' - 1)^2}{x'},$$

par suite, l'équation (2) se met sous la forme

$$y - \delta = \frac{\delta(x - \gamma)\left(2a - \dfrac{ax' + by' - 1}{x'}\right)}{2 - 2a\gamma + \gamma\left(\dfrac{ax^2 + by' - 1}{x'}\right)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{ax' + by' - 1}{x'} = \frac{2a(\gamma y - \delta x) - 2(y - \delta)}{\gamma y - \delta x}.$$

Or divisant certains termes de l'équation (1) haut et bas par $(ax' + by' - 1)$, on peut la mettre sous la forme

$$(\alpha y - \beta x)\frac{x'}{ax' + by' - 1} = 2\lambda(\alpha - x) + (\beta x - \alpha y)\,2b\lambda,$$

et substituant la valeur de $\dfrac{x'}{ax' + by' - 1}$, on a

$$\begin{aligned}(\alpha y - \beta x)(\gamma y - \delta x) &= 4a\lambda(\alpha - x)(\gamma y - \delta x)\\ &- 4\lambda(y - \delta)(\alpha - x) + 4ab\lambda(\beta x - \alpha y)(\gamma y - \delta x)\\ &- 4b\lambda(\beta x - \alpha y)(y - \delta),\end{aligned}$$

c'est l'équation du lieu : on voit facilement à son inspection que c'est une conique passant par les points fixes donnés.

Si maintenant je transforme cette propriété par la méthode des rayons vecteurs réciproques, j'aurai cette nouvelle proposition :

On donne une conique tangente à deux droites fixes, deux points fixes, un cercle tangent à cette conique et passant par le point de concours O des deux tangentes rencontre ces deux dernières en deux points. Par l'un de ces points, le sommet O et l'un des points fixes, je fais passer un cercle ; de même par l'autre point, le sommet O et l'autre point fixe : ces deux circonférences se rencontrent suivant une corde passant par O et dont l'autre extrémité est toujours sur une conique passant par des points fixes. On peut encore transformer cette proposition par la méthode des polaires réciproques.

Étant donnée une conique, une corde fixe AB et deux droites fixes A′, B′ dans le plan de la conique, on prend un point variable O dans ce plan, on joint OA qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre C avec A′, OB qu'on prolonge jusqu'à sa rencontre D avec B′; la droite CD est constamment tangente à une conique tangente aux deux droites A′, B′.

Il est facile de voir que c'est la réciproque de la question proposée.

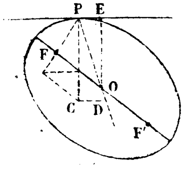
SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 493

(voir p. 5);

PAR M. CHARLES KESSLER,
Élève du Prytanée Militaire.

Soit P un point d'une conique, C le centre de courbure en P, O le centre de la conique; par C on mène une parallèle à la tangente en P; soit D le point où cette parallèle est rencontrée par le diamètre OP : on a CD égal au tiers du rayon de courbure de la développée en C.

(ABEL TRANSON.)



Soit une ellipse, O son centre, P un point quelconque, C le centre de courbure en ce point, FF′ l'axe focal. Faisons la construction indiquée. Soit ρ le rayon de courbure CP au point P de l'ellipse. On sait que, OE étant la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente PE,

(*Méthodes en géométrie* de M. P. Serret)

$$\rho = \frac{b'^2}{\mathrm{OE}} = \frac{b'^3}{ab},$$

en posant

$$\mathrm{OP} = a',$$

et le demi-diamètre conjugué $= b'$; car on calcule facilement OE en fonction du rayon vecteur

$$\mathrm{OE} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - a'^2}} = \frac{ab}{b'}.$$

Désignons par α l'angle CPD, on a (triangle PCD)

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{CD} = \rho \tan\alpha = \rho \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Or, dans le triangle OPE on a

$$\mathrm{OE} = a' \cos\alpha,$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{OE}}{a'} = \frac{ab}{a'b'},$$

et, par conséquent, substituant dans l'équation (1),

$$\mathrm{CD} = \frac{b'^3}{ab} \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{a'^2 b'^2}}}{\frac{ab}{a'b'}} = \frac{b'^3}{a^2 b^2} \sqrt{a'^2 b'^2 - a^2 b^2},$$

Désignons maintenant par ρ' le rayon de courbure de la développée en C. On sait que

$$\tan\alpha = \frac{1}{3} \frac{\rho'}{\rho},$$

d'où

$$\rho' = 3\rho \tan\alpha,$$

et substituant les valeurs trouvées de ρ et de $\operatorname{tang}\alpha$, on a

$$\rho' = 3\,\mathrm{CD},$$

car

$$\rho \operatorname{tang}\alpha = \mathrm{CD},$$

donc on a bien

$$\mathrm{CD} = \frac{\rho'}{3}.$$

C. Q. F. D.

Pour l'hyperbole, on changera b^2, b'^2 en $-b^2, -b'^2$, et on aura le même résultat.

SOLUTION ANALYTIQUE DE LA QUESTION 502

(voir p. 44);

PAR M. J. LARROSE,
Élève du lycée Saint-Louis.

Lemme. Si l'on appelle a, b, c les trois côtés d'un triangle et (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les coordonnées des sommets opposés, le centre du cercle inscrit a pour coordonnées

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} x = \dfrac{ax' + bx'' + cx'''}{a + b + c}, \\ y = \dfrac{ay' + by'' + cy'''}{a + b + c}. \end{cases}$$

Je prends pour axes coordonnés les axes de l'ellipse. Soient (x', y') et (x'', y'') les coordonnées des points A et B où la corde passant par le point F rencontre l'ellipse.

Je joins A et B au second foyer F'. Le point de rencontre C des normales en A et B est le centre du triangle

ABF′, dans lequel les côtés

$$F'A = a + \frac{cx'}{a} = \frac{a^2 + cx'}{a}, \quad \text{et} \quad F'B = a + \frac{cx''}{a} = \frac{a^2 + cx''}{a};$$

$$FA = \frac{a^2 - cx'}{a}, \quad FB = \frac{a^2 - cx''}{a}.$$

D'après les formules (A), l'ordonnée du point C donne

$$4a^2 y = a^2 (y' + y'') + c(x' y'' + y' x''),$$

car l'ordonnée de F′ est nulle et le périmètre du triangle ABF′ est $4a$.

Or l'on a

$$\frac{y'}{-y''} = \frac{AF}{BF} = \frac{a^2 - cx'}{a^2 - cx''};$$

d'où

$$a^2 (y' + y'') - c(y' x'' + x' y'') = 0;$$

ainsi

$$4a^2 y = 2a^2 (y' + y''),$$

$$y = \frac{y' + y''}{2}.$$

C. Q. F. D.

Cette démonstration est évidemment applicable à l'hyperbole et avec une facile modification à la parabole.

Note du Rédacteur. M. de Jolivette, élève de l'institution de Lasalle, part de l'équation *Comte*

$$x^2 + y^2 = (my + nx + p)^2,$$

et cherche directement les coordonnées de l'intersection des deux normales par les équations de ces lignes, ce qui entraîne un calcul qui exige des *multiplicateurs* indéterminés que cet élève emploie adroitement.

M. L. Rabeau, élève du lycée de Poitiers, donne une solution analytique, analogue à celle de M. Larrose, et ajoute une solution géométrique pour la parabole seulement, fondée sur ce que la normale bissecte l'angle formé par le rayon vecteur et le diamètre adjacent.

M. Charles Kessler, élève de la Flèche, établit aussi l'équation Comte, mais prend pour coordonnées du point d'intersection celles qui ont été consignées t. XVIII, p. 78.

M. Eugène Dupont, éléve du lycée Louis-le-Grand, pose les deux équations

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2, \quad y = m(x-c);$$

les ordonnées y', y'' des points A et B sont données par l'équation

$$y^2(a^2m^2 + b^2) + 2mb^2cy - m^2b^4 = 0,$$

$$y' + y'' = -\frac{mb^2c}{a^2m^2+b^2}, \quad y'y'' = \frac{m^2b^4}{a^2m^2+b^2}$$

et

$$mx' = y' + mc, \quad mx'' = y'' + mc.$$

De là les équations des deux normales en A et B sont

$$b^2(y-y')(y'+mc) = a^2y'(mx - y' - mc),$$
$$b^2(y-y'')(y''+mc) = a^2y''(mx - y'' - mc).$$

Éliminant x, il vient

$$mb^2y = cy'y'' = -\frac{m^2cb^4}{a^2m^2+b^2},$$

$$y = -\frac{mcb^2}{a^2m^2+b^2} = \frac{y'+y''}{2}.$$

C. Q. F. D.

MM. J. Bonnet, François de la Bruière (école de Sainte-Geneviève), H. Delorme (lycée Louis-le-Grand), Journeaux (de Liége), Desgranges ont envoyé des solutions identiques. M. Cuénoud (de Lausanne) fait observer que cette propriété est une conséquence immédiate de la question 433 (t. XVII, p. 285).

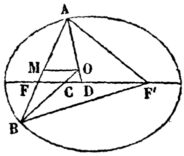
SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 502

(voir p. 85);

PAR M. E. MAILLOT,
Élève de Spéciales au collége Stanislas.

Par un foyer d'une ellipse, on mène une corde AB; par le point de rencontre O des deux normales en A et B, on mène une parallèle au grand axe : cette parallèle passe par le milieu de AB.

FIG. 1.



Soit AB une corde passant au foyer F; on mène AO, BO normales à la courbe en A et B et par leur point de rencontre OM parallèle au grand axe : M sera le milieu de AB.

En effet, à cause des triangles semblables AMO, AFD d'une part, BFC, BMO de l'autre, on a

$$AM = MO \cdot \frac{AF}{FD},$$

$$BM = MO \cdot \frac{BF}{FC}.$$

Mais les rapports $\frac{AF}{FD}$, $\frac{BF}{FC}$ sont égaux; car les bissectrices AD, BC des angles A et B dans les triangles FAF', FBF' partagent la base FF′ en segments tels, qu'on a

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FD}}=\frac{\mathrm{AF}+\mathrm{AF}'}{\mathrm{FF}'}=\frac{a}{c}=\frac{\mathrm{BF}+\mathrm{BF}'}{\mathrm{FF}'}=\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}};$$

donc

$$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}.$$

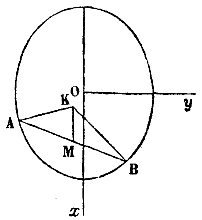
C. Q. F. D.

Corollaire (*). Si l'on place l'ellipse de sorte que son grand axe soit vertical, une droite pesante et homogène AB sera en équilibre si elle passe au foyer.

Car la résultante des réactions est égale et opposée à la pesanteur qui s'applique en M.

Remarque. La condition que la droite passe au foyer est suffisante pour l'équilibre, mais est-elle nécessaire? Ou plus généralement : Si par le point de rencontre des

FIG. 2.



normales qui ont leurs pieds aux extrémités d'une corde quelconque on mène une parallèle au grand axe, dans quel cas cette parallèle coupe-t-elle la corde en son milieu?

Soient

$$(1)\qquad y=mx+n$$

l'équation de la corde AB;

(*) Cette partie de cette belle solution a déjà été traitée (tome XVII, page 195). TM.

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \tag{2}$$

celle de l'ellipse. Les coordonnées des points A, B, intersections de la corde et de l'ellipse, sont

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{-a^2mn \pm ab\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2}, \\ y &= \frac{b^2n \mp amb\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Les équations des deux normales menées par ces points sont de la forme

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x').$$

L'ordonnée du point K où ces normales se coupent est, ayant égard aux valeurs trouvées de x' et de y'

$$y_1 = \frac{c^2}{n} \cdot \frac{a^2m^2 - n^2}{a^2m^2 + b^2}. \tag{4}$$

où $c^2 = a^2 - b^2$.

Nous aurons la relation cherchée entre m, n, en exprimant que y_1 est égal à la demi-somme des ordonnées des points A, B; cette demi-somme, d'après l'équation (3), est

$$\frac{y' + y''}{2} = \frac{b^2n}{a^2m^2 + b^2}. \tag{5}$$

Égalons les équations (4) et (5), il vient

$$n = \pm mc.$$

Donc l'équation de la corde sera

$$y = m(x \pm c).$$

Le double signe convient à la question géométrique, mais celle d'équilibre est moins générale et n'admet que le signe positif. En discutant cette équation

$$y = m(x + c),$$

on voit que pour l'équilibre il faut, si m n'est pas infini, que la droite passe au foyer; si m est nul, elle coïncide avec le grand axe; mais si m est infini, la droite est horizontale et en équilibre dans toute la moitié inférieure de l'ellipse.

SOLUTION DE LA QUESTION 492

(voir t. XVIII, p. 443);

PAR MM. CHARLES KESSLER ET ÉMILE LEMOINE,
Élèves du Prytanée Militaire.

Lemme. Dans un triangle ABC si trois droites partant des sommets AK′, BK″, CK‴ se coupent au même point O (K′ est sur BC, K″ est sur AC, K‴ sur AB), on a

$$\frac{OK'}{AK'} \pm \frac{OK''}{BK''} \pm \frac{OK'''}{CK'''} = 1.$$

Si O est intérieur à ABC, on aura

$$\frac{OK'}{AK'} + \frac{OK''}{BK''} + \frac{OK'''}{CK'''} = 1;$$

si O est dans la partie de l'angle BAC extérieure à BC, on aura

$$\frac{OK''}{BK''} + \frac{OK'''}{CK'''} - \frac{OK'}{AK'} = 1;$$

si O est dans l'angle opposé au sommet à BAC, on

aura

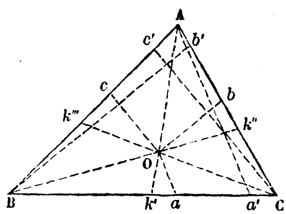
$$\frac{OK'}{AK'} - \frac{OK''}{BK''} - \frac{OK'''}{CK'''} = 1;$$

et ainsi des autres.

(Ce théorème est proposé en exercice dans la *Géométrie* de Legendre revue par M. Blanchet et résolu dans les problèmes de géométrie élémentaire de M. Catalan.)

Cela posé, la solution de la question 492 n'en est plus qu'un corollaire très-simple.

Nous conservons les notations des *Nouvelles Annales*.



Joignons Ob, Oa, Oc; joignons

AO	qui coupe	BC	en	K',
BO	»	AC	»	K'',
CO	»	AB	»	K'''.

Les deux triangles semblables $OK'a$, $AK'a'$ nous donnent

$$\frac{OA}{Aa'} = \frac{OK'}{AK'};$$

les deux triangles semblables $OK''b$ et $OK'''b$ donnent

$$\frac{Ob}{Bb'} = \frac{OK''}{BK''};$$

les deux triangles semblables $OK'''c$ et $CK'''c'$ donnent

$$\frac{Oc}{Cc'} = \frac{OK'''}{CK'''}.$$

Ajoutant ces trois égalités membre à membre, on a

$$\frac{Oa}{Aa'}+\frac{Ob}{Bb'}+\frac{Oc}{Cc'}=\frac{OK'}{AK'}+\frac{OK''}{BK''}+\frac{OK'''}{CK'''}=1.$$

C. Q. F. D.

Remarque. On verrait de même que si O était dans l'angle BAC en dehors du triangle ABC, on aurait

$$\frac{Ob}{Bb'}+\frac{Oc}{Cc'}-\frac{Oa}{Aa'}=1,$$

et que si O était dans l'angle opposé au sommet de A, on aurait

$$\frac{Oa}{Aa'}-\frac{Ob}{Bb'}-\frac{Oc}{Cc'}=1;$$

et ainsi pour les autres côtés.

Note. M. E. Martin, élève du lycée Louis-le-Grand, et M. Joseph Derbès, élève de l'institution Barbet, ont résolu la question de la même manière.

SECONDE SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 502

(voir p. 88);

PAR M. L. VOLLANT,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Je joins les points A et B au second foyer F'; le point de rencontre O des normales en A et B est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABF'. Soit K le point de contact de ce cercle avec AB. Le point de rencontre O' des tangentes en A et B est le centre du cercle exinscrit au triangle ABF', et comme O'F est perpendiculaire sur

AB (propriété connue), ce cercle est tangent en F au côté AB. D'après un théorème connu, on sait que BK est égal à AF. D'autre part, F' étant le centre de similitude des deux circonférences O et O', le rayon OC du cercle inscrit est parallèle à O'F et par suite perpendiculaire sur AB. Cette droite devra donc passer par le point K. Mais le centre O divise le côté CK du triangle KFC en deux parties égales, la parallèle OM au côté CF divise donc FK et par suite AB en deux parties égales.

N. B. La même propriété a lieu pour l'hyperbole, on le démontre de la même manière.

Il en est de même pour la parabole.

Soit KF l'axe d'une parabole dont F est le foyer. La corde AB passant par le point F, les tangentes en A et B se coupent en O' à angle droit. Les normales aux mêmes points qui se coupent en O sont aussi rectangulaires. Le quadrilatère AOBO' est donc un rectangle et la diagonale OO' coupe AB en son milieu M. Mais O'M est un diamètre (propriété connue); par suite OO' est parallèle à KF.

QUESTIONS.

514.

$$xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = b;$$

$$e = \text{base népérienne},$$

$$a = \sin\psi, \quad \psi < 90^\circ,$$

démontrer qu'en posant

$$b = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}\, e^{-\cos\psi},$$

l'équation transcendante a deux racines égales; de même en posant

$$b = \cot\frac{\psi}{2}e^{\cos\psi},$$

(Puiseux.)

515.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1}\ldots & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2}\ldots & \alpha_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n}\ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

Si dans ce déterminant on remplace $\alpha_{i,k}$ par α_i^{k-1}, on obtient le produit

$$\begin{array}{l} (\alpha_1 - \alpha_2)\ (\alpha_1 - \alpha_3)\ldots\ (\alpha_1 - \alpha_n)\times, \\ (\alpha_2 - \alpha_3)\ (\alpha_2 - \alpha_4)\ldots\ (\alpha_2 - \alpha_n)\times, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_{n-1} - \alpha_n)\ldots \end{array}$$

516. Soit l'équation

$$x^{2m+1} + ax^{2m-1} + bx^{2m-3} + \ldots + lx + k = 0,$$

qui ne renferme que des puissances impaires de l'inconnue (excepté x^0); il y a une racine réelle comprise entre $+2\sqrt[2m+1]{\frac{k}{2}}$ et $-2\sqrt[2m+1]{\frac{k}{2}}$. (Tchebichef.)

517. 1°. Le segment intercepté sur une normale *quelconque* à une ellipse par les deux axes étant multiplié par la distance p du centre à la tangente adjacente à sa normale donne un produit constant; 2° le segment intercepté sur une normale quelconque à une ellipse par un cercle concentrique d'un rayon égal à la demi-somme des axes et multiplié par la distance p donne un produit constant.

518. A partir de l'origine P, normale quelconque à une ellipse, on porte de part et d'autre sur cette normale deux longueurs *égales* PN_1, PN_2 telles, que le produit de PN_1 ou de PN_2 par la distance du centre à la tangente adjacente à la normale donne un produit constant; les lieux des points N_1, N_2 sont deux ellipses *confocales* de même centre que l'ellipse donnée.

519. Les droites qui dans deux ellipses *confocales* joignent deux points correspondants, sont normales à une troisième ellipse qui bissecte ces normales.

Observation. Deux points sont *correspondants* lorsque les coordonnées de ces points sont respectivement proportionnelles aux axes sur lesquels sont rapportées ces coordonnées.

520. Soient P, Q les intersections respectives d'une normale par les axes a et b. Si, à partir de l'origine m de la normale, on prend des longueurs égales mS_1, mS_2, telles, que mS_1 soit égal au demi-diamètre parallèle à la normale, les quatre points S_1, P, S_2, Q sont placés harmoniquement; les lieux de S_1, S_2 sont deux cercles concentriques à l'ellipse décrite des rayons $a \pm b$.

521. Soit décrite une ellipse ayant pour axes une normale et la tangente adjacente quelconque d'une ellipse donnée et touchant le grand axe de l'ellipse au centre; et de même soit décrite une seconde ellipse touchant le petit axe au centre; les lieux des foyers de ces ellipses sont deux cercles concentriques à l'ellipse donnée et ayant pour rayons la demi-somme et la demi-différence des axes.

Observations. Les cinq propositions 517 à 521 subsistent d'une manière analogue dans l'ellipsoïde et ont pour auteur M. le D[r] Heilermann, directeur de l'École industrielle provinciale de Coblentz.

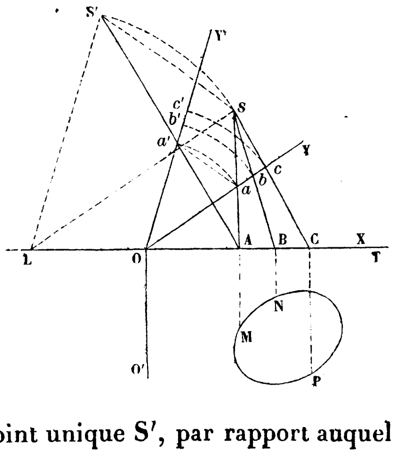
SOLUTION DE LA QUESTION 418 (LAFFITTE)

(voir t. XVII, p. 31);

PAR MM. E. CARÉNOU ET M. LAQUIÈRE,
Élèves du lycée Saint-Louis (classe de M. Faurie).

Deux figures étant en perspective, si leurs plans tournent autour de leur commune intersection, il faut, pour que ces figures restent en perspective, que l'œil change de position; les perpendiculaires abaissées chaque fois du point de vue sur ces plans restent dans un rapport constant.

Soient OX, OY les intersections des deux plans par le plan mené par le premier point de vue S, perpendiculairement à l'intersection commune OO′ des deux premiers plans (*). Nous allons démontrer qu'il existe dans ce même



plan un point unique S′, par rapport auquel les deux fi-

(*) Dans la figure les deux parties séparées par la ligne LT sont supposées dans des plans rectangulaires.

gures seront en perspective lorsque le plan O′OY sera mené en O′OY′.

Considérons les différents points M, N, P, etc., situés dans le plan fixe. Appelons m, n, p, etc., leurs perspectives dans le premier système (dans le plan O′OY), et m', n', p', etc., les nouvelles positions des points m, n, p, etc., lorsque le plan du tableau aura pris la position O′OY′.

Soient A, B, C, etc., les projections orthogonales de M, N, P, etc., sur OX. Si nous joignons SA, SB, SC, etc., les points a, b, c, etc., d'intersection de ces droites avec OY seront les projections sur OY des points m', n', p', etc., homologues des premiers; lorsque le tableau aura pris la nouvelle position O′OY′, les points a, b, c, etc., seront devenus a', b', c', etc., projections sur OY′ de m', n', p'.

Les équations des droites Aa, Bb, Cc, etc., issues du point S, étant

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \quad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1, \quad \frac{x}{a''}+\frac{y}{b''}=1\ldots,$$

par rapport aux axes OX, OY, si nous joignons Aa', Bb', Cc', etc., leurs équations seront les mêmes par rapport aux axes OX, OY′. Par conséquent, (α, β) étant les coordonnées du point S dans le premier système, le point S′, qui aura aussi (α, β) pour coordonnées dans le second système de coordonnées, sera situé sur toutes les droites Aa', Bb', etc.

Les distances δ, δ' du point S aux deux plans XOO′, YOO′ sont

$$\delta = \beta \sin \mathrm{YOX}, \quad \delta' = \alpha \sin \mathrm{YOX}.$$

Le rapport

$$\frac{\delta}{\delta'}=\frac{\beta}{\alpha}$$

sera le même pour le point S′, puisqu'il est indépendant de l'angle des deux plans. On peut du reste remarquer que, le tableau tournant autour de OO′, le point S′ décrit un cercle de rayon β ayant son centre en L, pied de l'ordonnée d'une quelconque de ses positions dans le système de coordonnées correspondant.

Cela posé, pour démontrer que les points m', n', p', etc., sont les perspectives des points M, N, P, etc., par rapport au point S′, il suffit de prouver que l'on a

$$\frac{\mathrm{AM}}{a'm'} = \frac{\mathrm{S'A}}{\mathrm{S'}a'}.$$

Car alors la droite Mm' passera par S′; il en serait de même des autres.

Or les points mM′ étant en perspective par rapport à S, on a

$$\frac{\mathrm{AM}}{am} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{S}a}$$

ou

$$\frac{\mathrm{AM}}{a'm'} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{S}a} \quad (am = a'm').$$

Mais les triangles S′LS, $a'\mathrm{O}\alpha$ étant isocèles et ayant les côtés égaux parallèles deux à deux, leurs bases SS′, aa' sont parallèles; d'où

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{S}a} = \frac{\mathrm{S'A}}{\mathrm{S'}a'},$$

et, à cause du rapport commun $\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{S}a}$,

$$\frac{\mathrm{AM}}{a'm'} = \frac{\mathrm{S'A}}{\mathrm{S'}a'},$$

et le théorème est démontré.

NOTE SUR QUELQUES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. AELT.

I.

Déterminer, parmi les diverses courbes isopérimètres tracées sur une surface quelconque, celle qui renferme une aire maximum sur cette surface.

Ce problème a été traité à l'aide du calcul des variations, par M. Delaunay (*Journal* de M. Liouville, t. VIII, p. 241). Quelques considérations de géométrie infinitésimale me permettront d'en donner une solution en quelque sorte élémentaire.

Je pose d'abord en principe que, deux surfaces S et S' se touchant suivant une courbe AB, s'il arrive que cette courbe AB jouisse d'une propriété de maximum ou de minimum par rapport à toutes les courbes voisines tracées sur S, elle jouira de la même propriété par rapport aux courbes voisines tracées sur S'.

En effet, conformément à la théorie des maxima et minima, les lignes tracées sur S et qu'il faudrait comparer à la ligne AB pour vérifier dans celle-ci une propriété de maximum ou de minimum, doivent en être *infiniment voisines*. En d'autres termes, les éléments de ces courbes voisines sont nécessairement compris sur les divers plans qui touchent la surface S le long de AB. Ces éléments appartiennent donc aussi à la surface S'; ce qui prouve le principe.

On pourrait établir cette vérité au moyen du calcul des variations; mais ce serait faire perdre à cette Note le caractère que j'ai voulu lui donner.

Quant au problème de tracer sur une surface une ligne de périmètre donné passant par des points fixes A et B, et comprenant une aire maximum, il faut entendre qu'entre ces deux points on a tracé une première courbe, par exemple une ligne géodésique. L'aire maximum sera limitée par cette première courbe et par la courbe cherchée qui doit avoir un périmètre donné. On peut aussi ne donner sur la surface en question aucun point, et demander d'y tracer une courbe fermée qui sous un périmètre donné renferme la plus grande aire, ou bien qui circonscrive une aire donnée dans le plus petit périmètre; car ces deux questions n'en font qu'une.

Si la surface donnée est un plan, on sait que toutes ces questions se résolvent par des arcs de cercle ou par des circonférences. Dans le cas général j'imagine une surface développable touchant la surface donnée tout le long de la ligne demandée. Considérée comme appartenant à la surface auxiliaire, cette ligne, en vertu du principe ci-dessus énoncé, y jouira de la même propriété que sur la surface donnée, c'est-à-dire qu'elle y renfermera sous un périmètre donné la plus grande aire possible. Dès lors il est clair que si l'on fait le développement (sur un plan) de la surface auxiliaire, la ligne en question deviendra soit un arc de cercle, soit une circonférence entière.

Admettons d'ailleurs, ce que je démontrerai à l'instant, que, si l'on fait la transformée plane d'une courbe tracée sur une surface développable, on a entre le rayon ρ de première courbure de cette courbe, l'angle α de son plan osculateur avec le plan tangent à la surface développable, et le rayon de courbure r de la transformée plane, la relation

$$\rho = r \cos \alpha.$$

Comme la transformée dans le problème actuel est un arc de cercle, r est constant; et l'on obtient aussitôt ce résultat que M. Delaunay tire de l'équation différentielle de la courbe, et qui au besoin pourrait faire retrouver cette même équation, savoir que : *En chacun de ses points, le rayon de courbure de la courbe demandée est proportionnel au cosinus de l'angle formé par son plan osculateur avec le plan tangent à la surface.*

L'auteur imagine ensuite une sphère contenant le cercle osculateur de la courbe cherchée, et, de plus, ayant son centre sur le plan tangent de la surface. Il est aisé de voir que le rayon de cette sphère est égal à $\frac{\rho}{\cos\alpha}$. Il est donc constant, ce qui est une très-belle propriété, et notamment il est égal au rayon du cercle dans lequel la courbe cherchée se transforme par le développement de notre surface auxiliaire.

II.

Pour établir la propriété dont nous venons de faire usage, considérons deux faces consécutives du polyèdre infinitésimal que, conformément à la méthode des infiniment petits, on substitue idéalement à la surface développable. Soit A le point où la courbe proposée rencontre l'intersection de ces deux faces. J'appelle AT le prolongement au delà du point A de l'élément de courbe qui est sur la première de ces deux faces, et AT′ l'élément même qui est sur la seconde. Ainsi le plan des deux lignes AT, AT′ est le plan osculateur; il forme avec le plan de la première face un angle dièdre α dont l'arête est la ligne AT. Cependant rabattons la deuxième face sur la première; la ligne AT′ viendra y prendre une position AT″ qui est en réalité la projection de AT′ sur cette première face; l'angle trièdre ATT′T″ a donc un angle droit suivant l'arête AT″, et un angle représenté par α suivant l'arête AT.

D'ailleurs les faces TAT' et TAT'' sont respectivement les angles de contingence de la courbe primitive et de sa transformée plane. Si on les appelle ε et θ, la propriété connue des triangles sphériques rectangles donnera

$$\tang \theta = \tang \varepsilon . \cos \alpha,$$

ou plutôt, à cause des infiniment petits,

$$\theta = \varepsilon . \cos \alpha.$$

Soit maintenant ds l'élément de la courbe primitive, élément qui ne change pas de grandeur dans la transformation; on a à la fois

$$ds = \rho \varepsilon \quad \text{et} \quad ds = r . \theta;$$

de là il est aisé de conclure (*) la relation

$$\rho = r \cos \alpha.$$

III.

De la ligne géodésique sur une surface quelconque. Concevons une surface développable tangente à la sur-

---

(*) Depuis longtemps (1843) M. Catalan a déduit de l'équation différentielle donnée par M. Delaunay pour la courbe qui, parmi celles de longueur donnée, comprend sur une surface quelconque une aire maximum, la propriété de cette même courbe d'avoir pour transformée plane un arc de cercle lorsqu'on la considère comme appartenant à la surface développable que j'ai définie dans le texte sous le nom de *surface auxiliaire* (voir *Journal de l'École Polytechnique*, 29e cahier, p. 151). M. Catalan a démontré aussi la relation entre le rayon de courbure d'une courbe tracée sur une surface développable et celui de sa transformée plane (*Comptes rendus*, t. XVII, p. 738). Mais outre que la démonstration donnée par M. Catalan pour ce second théorème est aussi purement analytique, M. Catelan n'a pas montré l'emploi de la relation $\rho = r \cos \alpha$ pour établir les théorèmes de M. Delaunay. D'après tout cela, j'ai pu croire que mon travail offrirait au moins par sa forme, sinon par la nouveauté du fond, quelque intérêt aux lecteurs des *Nouvelles Annales*. On peut voir aussi pour la relation $\rho = r \cos \alpha$ l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* de Monge, 5e édition (1850); notes de M. Liouville, p. 576.

face proposée tout le long de la ligne géodésique; celle-ci sera également géodésique par rapport à la surface auxiliaire, et par conséquent sa transformée plane sera une ligne droite. Ainsi dans le cas actuel r est infini, de sorte que $\cos\alpha$ est nul; d'où on peut déduire ce résultat bien connu, que *le plan osculateur de la ligne géodésique est constamment perpendiculaire au plan tangent.*

IV.

En 1851 on a proposé pour le concours d'agrégation la question suivante, traitée avec élégance par M. Dieu dans les *Nouvelles Annales* (t. IX, p. 33) : *Trouver l'équation différentielle des courbes planes qui, enroulées sur un cylindre droit à base circulaire, donnent des courbes dont le rayon de première courbure est constant.*

Pour résoudre cette question, je remarquerai ici et je démontrerai à l'instant que si r est le rayon de courbure d'une courbe plane, R le rayon du cylindre sur lequel on l'enveloppe, ω l'angle que la tangente de la courbe enveloppée forme avec l'arête du cylindre, et α l'angle entre son plan osculateur et le plan tangent, on a la relation très-simple

$$\tang\alpha = \frac{r\sin^2\omega}{R}.$$

Or, si l'on élimine α entre cette équation et la relation précédemment obtenue

$$\rho = r\cos\alpha,$$

il viendra

$$r^2 = \frac{R^2\rho^2}{R^2 - \rho^2\sin^4\omega}.$$

R et ρ sont ici des quantités constantes, et cette équation peut être considérée comme exprimant la propriété caractéristique de la courbe plane demandée; si l'on y remplace r rayon de courbure, et ω angle de la tangente avec une perpendiculaire à la base du cylindre développée en ligne droite, par leurs valeurs connues au moyen des dérivées de la fonction qui exprime l'ordonnée de la courbe, on obtiendra l'équation différentielle demandée. Mais déjà sous la forme présente on peut reconnaître que si le rayon de courbure ρ de la courbe enroulée doit surpasser le rayon R du cylindre, on pourra par chaque point de la surface cylindrique faire passer deux hélices satisfaisant à la condition voulue. En effet, en supposant deux droites menées sous les angles déterminés par la condition

$$\sin\omega = \pm\sqrt{\frac{R}{\rho}},$$

l'équation caractéristique ci-dessus est satisfaite, puisqu'en même temps le rayon de courbure r est infini. Si l'on devait avoir $\rho = R$, ces deux hélices n'existeraient plus, ou mieux elles se confondraient en chaque point du cylindre avec sa section droite.

V.

Voici comment se démontre la propriété énoncée dans le précédent paragraphe :

Considérons deux faces consécutives du prisme droit infinitésimal qu'on substitue idéalement au cylindre. La droite intersection de ces deux faces, et, sur chacune d'elles, les éléments correspondants de la courbe enroulée, forment les trois arêtes d'un angle trièdre dans lequel on connaît deux faces et l'angle compris. En effet, les deux faces contiguës à l'arête du prisme sont ω, et $\pi - \omega - d\omega$. Quant à l'angle de ces deux faces, il est le supplément de l'angle de contingence de la section droite, Donc, puique R est le rayon du cylindre, si $d\sigma$ représente l'élément du cercle de base, l'angle en question est $\pi - \frac{d\sigma}{R}$. Or si l'on appelle ds l'élément de l'arc de courbe enroulée, on a

$$d\sigma = ds.\sin\omega\,;$$

de sorte qu'en appelant A l'angle du dièdre suivant l'arête du prisme, b et c les faces adjacentes, on a pour ces trois éléments les valeurs suivantes

$$A = \pi - \frac{\sin\omega.ds}{R}, \quad b = \omega, \quad c = \pi - \omega - d\omega.$$

Or l'angle C opposé à la face c est donné par la formule de trigonométrie sphérique

$$\cot c.\sin b = \cot C.\sin A + \cos b.\cos A,$$

qui à cause des valeurs ci-dessus devient

$$-\cot(\omega + d\omega).\sin\omega$$
$$= \cot C.\sin\left(\frac{\sin\omega.ds}{R}\right) - \cos\omega\cos\left(\frac{\sin\omega.ds}{R}\right);$$

en réduisant et en ne conservant que les infiniment petits du premier ordre, on tire aisément de cette dernière équation la relation suivante

$$\operatorname{tang} C = \frac{r\sin^2\omega}{R}.$$

Or l'angle C est ici l'angle du plan des deux éléments consécutifs de la courbe enroulée avec la première face du prisme, c'est-à-dire l'angle du plan osculateur avec le plan tangent; c'est ce que nous appelions α dans les paragraphes précédents.

VI.

En suivant une marche analogue, on démontrera que si l'on fait la transformée plane d'une courbe tracée sur un cône de révolution dont le demi-angle au centre est θ, on a la relation

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{r\sin^2\omega}{(l + r\sin\omega)\operatorname{tang}\theta},$$

dans laquelle l est la distance du point correspondant de la courbe donnée au sommet du cône, et par conséquent le rayon vecteur de la transformée, ω l'angle de la tangente de cette transformée avec son rayon vecteur; r son rayon de courbure; α l'angle du plan osculateur de la courbe primitive avec le plan tangent.

Eliminant α entre cette équation et la relation

$$\rho = r\cos\alpha,$$

on obtiendra une équation caractéristique pour *les courbes qui, enroulées sur un cône de révolution, donnent des courbes dont le rayon de première courbure est constant.* Ce qui renferme comme cas particulier la question du concours de 1851. En effet, pour revenir à celle-ci, il suffira de remarquer que, pour passer du cône donné au cylindre de rayon R, il faut concevoir que θ tende vers zéro, et en même temps que $l\operatorname{tang}\theta$ tende vers R.

Paris, 15 novembre 1859.

HOMOGRAPHIE;

PAR M. POUDRA.

PROBLÈME. *Étant donnés cinq points* a, b, c, d, e *appartenant à une figure quelconque de l'espace, et les cinq points homologues* a′, b′, c′, d′, e′ *d'une figure homographique à la première, on demande de construire cette deuxième figure par des moyens analogues à ceux de la perspective.*

Les quatre points a, b, c, d peuvent être considérés comme sommets d'une pyramide triangulaire; soit abc la base et d le sommet.

Soit de même a', b', c', d' la pyramide homologue, et $a'b'c'$ la base, et d' le sommet.

La droite de qui joint le cinquième point e de la première figure à d, rencontrera le plan abc en un point f, qui sera homologue du point f', où la droite $d'e'$ de la deuxième figure rencontrera le plan $a'b'c'$.

Supposons dans le plan abc une figure appartenant au sujet donné, et dont font partie les quatre points a, b, c, f homologues à ceux a', b', c', f' contenus dans le plan $a'b'c'$ de la deuxième figure.

Ces deux figures planes situées dans les plans abc, $a'b'c'$ sont homographiques entre elles, et par suite homologiques; il s'ensuit qu'elles peuvent se mettre en perspective; il suffit pour cela de placer en perspective les deux quadrilatères $abcf$, $a'b'c'f'$.

Soit O le point de vue. Regardons ce point comme appartenant à la première figure; il lui correspondra dans la deuxième un point O′, qu'on déterminera ainsi : On joint o à d et à e; ces deux droites od, oe rencontrent le plan abc aux points respectifs g et h, qui ont pour homologues les points g' et h', où ces mêmes droites rencontrent le plan $a'b'c'$. Joignons g' à d' et h' à e'. Ces deux droites $g'd'$, $h'e'$ seront dans le même plan, déterminé par les deux droites $f'g'h'$ et $f'e'd'$; donc elles se rencontreront en un point O′ homologue de O.

D'après cela, il est très-facile de déterminer le point M′ de la deuxième figure, qui est l'homologue d'un point quelconque M de la première. En effet, 1° la droite MO rencontre le plan abc en un point m, et le plan $a'b'c'$ en un point homologue m'. La droite $O'M'm'$ est donc l'homologue de la droite OMm, et passera par le point M′ cherché. 2°. Joignons le point M à un point de la première figure, tel que d, dont on connaît l'homologue d'; cette droite Md rencontrera le plan abc en un point i, dont l'homologue i' sera à l'intersection du plan $a'b'c'$ et de la droite Oii'; il en résultera que la droite Mdi aura pour homologue la droite $M'd'i'$ passant par le point M′, il sera donc à l'intersection de $O'M'm'$ et de $M'd'i'$.

Il résulte de la construction : 1° que la perspective plane de la première figure, sur le plan $a'b'c'$ prise du point O, est la même que celle de la deuxième figure, sur le même plan prise du point O′ homologue de O; et 2° que la perspective plane de la première figure, prise d'un point quelconque M de l'espace, considéré comme appartenant à la première figure, sur le plan abc, étant mise en perspective sur le plan $a'b'c'$ pour le point O, donne sur ce plan $a'b'c'$ une figure qui est la perspective plane de la seconde figure sur ce plan, pour le point M′, homologue de celui M.

Ce qui donne un moyen très-simple de construction d'une figure homographique à une figure donnée, lorsqu'on connaît cinq points homologues des deux figures.

Au moyen des cinq points homologues dans chaque figure, on les place dans la position indiquée ci-dessus, où deux des plans homologues tels que abc, $a'b'c'$ sont en perspective pour un point O ci-dessus déterminé. On construit ensuite deux points homologues tels que M, M'. Alors la construction s'achève comme il suit :

Pour déterminer d'abord le point K' homologue d'un point k, on mène : 1° la droite KO qui rencontre le plan abc en K et $a'b'c'$ en K', homologue de K. La droite K'O' passe par le point K' cherché ; 2° on fait la perspective de K sur le plan abc pour le point M. Soit n cette perspective ; la droite nO rencontrera le plan $a'b'c'$ au point n', homologue de n, de sorte que n'M' sera l'homologue de nM, et passera par le point K'.

Pour avoir la droite L', homologue d'une droite L, on fait d'abord passer par O et la droite L un plan qui coupe $a'b'c'$ suivant une droite, par laquelle et par O' faisant passer un plan, il contiendra la droite cherchée. Ensuite par L et M un autre plan qui coupe celui abc suivant une droite, par laquelle et O on fait passer un plan qui coupe $a'b'c'$ suivant une droite ; par cette droite et M' faisant passer un autre plan, il contiendra la droite cherchée ; donc, etc.

Entre deux figures homographiques ainsi placées, il existe, outre les relations métriques connues, les relations descriptives suivantes :

1°. Les deux figures ont pour droite commune l'intersection des deux plans abc, $a'b'c'$.

2°. Elles ont la droite OO' commune, mais seulement en direction ; on voit, en effet, que O' est l'homologue de O.

3°. Dans deux figures homologiques, les droites et les plans homologues étant prolongés, se rencontrent sur le plan dit d'*homologie ;* dans les deux figures homographiques ci-dessus, les deux plans *abc*, *a'b'c'* font l'office de plans homologiques de la manière suivante, c'est que les droites et les plans de la première figure étant prolongés jusqu'au plan *abc*, et celles homologues de la deuxième jusqu'au plan homologue *a'b'c'*, il en résultera deux figures planes qui sont en perspective.

4°. La perspective plane de la première figure sur le plan *abc* pris d'un point quelconque de l'espace, et celle de la deuxième sur le plan *a'b'c'* pris du point de vue homologue, sont deux figures en perspective pour le même point de vue O; d'où résulte que si les points de vue homologues sont O et O', la perspective de la première figure sur le plan *a'b'c'*, prise de O, sera la même que celle de la deuxième, sur le même plan, prise de O'.

5°. Au plan à l'infini de la première figure correspond dans la deuxième un plan I à distance finie, et réciproquement aux points à l'infini de la deuxième, correspondent des points situés dans un plan J à une distance finie.

Dans les figures homologiques de l'espace, ou ce que j'ai nommé *perspectives-reliefs*, il y a un plan d'homologie et les deux plans I et J qui sont tous les trois parallèles; dans les deux figures homographiques, il y a deux plans d'homologie et les deux plans I et J, et ces quatre plans ne sont généralement pas parallèles; de sorte que si les deux plans d'homologie se réunissent en un seul, les points O et O' se réunissent aussi, les plans I, J et le plan d'homologie deviennent parallèles, et alors les deux figures sont homologiques.

THÉORÈME SUR CINQ NOMBRES CONSÉCUTIFS

(voir p. 38);

PAR M. LE BESGUE.

THÉORÈME. *Le produit de cinq nombres consécutifs ne saurait être un carré.*

Démonstration. C'est un théorème connu que, si une puissance $n^{ième}$, savoir

$$A^n = \alpha^n \beta^n \gamma^n \ldots \; (\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \text{premiers}),$$

est décomposée en facteurs premiers entre eux, chaque facteur sera une puissance $n^{ième}$.

De là suit que si dans un produit A.B.C, ..., on met en évidence tous les facteurs premiers communs à plusieurs des nombres A, B, C, ..., ainsi qu'il suit :

$$A = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots A', \quad B = 2^{\alpha'} 3^{\beta'} 5^{\gamma'} \ldots B',$$
$$C = 2^{\alpha''} 3^{\beta''} 5^{\gamma''} \ldots C' \ldots,$$

il faudra, 1° que A', B', C', ... soient des puissances $n^{ièmes}$, et 2° que les sommes $\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots$, $\beta + \beta' + \beta'' \ldots$, $\gamma + \gamma' + \gamma'' \ldots$, soient multiples de n.

Ceci posé, pour démontrer le théorème ci-dessus, il suffit de remarquer qu'il ne saurait y avoir d'autres facteurs premiers que 2 et 3 communs à plusieurs des cinq nombres consécutifs.

Voici les six seules hypothèses admissibles :

$$(1) \quad \begin{cases} a = 3^\alpha a', & a + 1 = 2^\beta b', \quad a + 2 = c', \\ & a + 3 = 2^\gamma 3^\delta d', \quad a + 4 = e'; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} a = a', & a + 1 = 2^\alpha 3^\beta b', \quad a + 2 = c', \\ & a + 3 = 2^\gamma d', \quad a + 4 = 3^\beta e'; \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} a = a', & a+1 = 2^{\alpha} b', \quad a+2 = 3^{\beta} c', \\ & a+3 = 2^{\gamma} d', \quad a+4 = e'; \end{cases}$$

a étant impair.

$$(4)\ \begin{cases} a = 2^{\alpha} 3^{\beta} a', & a+1 = b', \quad a+2 = 2^{\gamma} c', \\ & a+3 = 3^{\delta} d', \quad a+4 = 2^{\varepsilon} e'; \end{cases}$$

$$(5)\ \begin{cases} a = 2^{\alpha} a', & a+1 = 3^{\beta} b', \quad a+2 = 2^{\gamma} c', \\ & a+3 = d', \quad a+4 = 2^{\delta} 3^{\varepsilon} e'; \end{cases}$$

$$(6)\ \begin{cases} a = 2^{\alpha} a', & a+1 = b', \quad a+2 = 2^{\beta} 3^{\gamma} c', \\ & a+3 = d', \quad a+4 = 2^{\delta} e'; \end{cases}$$

a étant pair.

Comme a', b', c', d', e' doivent être des carrés, l'hypothèse (1) est impossible, parce qu'elle donne

$$e' - c' = 2.$$

L'hypothèse (2) l'est aussi à cause de

$$c' - a' = 2.$$

L'hypothèse (3) l'est également à cause de

$$e' - a' = 4.$$

L'hypothèse (6) est impossible à cause de

$$d' - b' = 2.$$

L'hypothèse (4) est impossible, parce que b' étant un carré impair, a est divisible par 8; de là

$$\gamma = 1, \quad \varepsilon = 2 \quad \text{et} \quad 4e' - b' = 3;$$

ce qui ne peut arriver que pour

$$e' = 1, \quad b' = 1;$$

ce qui n'est pas.

Enfin, l'hypothèse (5) donne d' carré impair; par suite a est de forme

$$8k + 6, \quad \text{donc} \quad \alpha = 1;$$

et comme on a

$$d' - 2a' = 3, \quad \text{d'où} \quad d' + a' = 3(a' + 1),$$

on aurait une somme de deux carrés divisible par 3, ce qui est impossible; les nombres impairs non divisibles par 3 étant de forme

$$6n \pm 1,$$

ont un carré de forme

$$12n + 1,$$

et la somme de deux tels carrés est de forme

$$12m + 2,$$

non divisible par 3.

Ce même théorème a été démontré ainsi par M. Alvin, élève de l'institution Jauffret.

Lemme. Le produit $a(a+3)$ de deux nombres qui diffèrent de 3 n'est pas un carré.

Corollaire. $(n^2 - 4)(n^2 - 1)$ n'est pas un carré.

Théorème. Le produit

$$n - 2 . n - 1 . n . n + 1 . n + 2 = (n^2 - 4)(n^2 - 1) . n = \mathrm{P},$$

de cinq nombres consécutifs n'est pas un carré, 1° pour n impair; 2° pour n égal au produit d'un nombre impair n' par une puissance paire de 2 ($2^k, k > 0$). Dans ces deux cas, on est conduit à rendre $(n^2 - 4)(n^2 - 1)$ carré. 3°. Le produit P n'est pas un carré si $n = 2^{(2k+1)} n'$ ($k > 0$, n' impair). Car la plus haute puissance de 2 qui divise P est $2^{2(k+1)+1}$. 4°. Pour n double d'un impair et de forme $8n' + 2$, on prouve par la considération du diviseur 3 (qui divise nécessairement un des nombres $n-1$, n, $n+1$), que $8n'+1$ et $8n'+4$ sont carrés conformément au lemme. 5°. Pour $n=8n'+6$, la même considération du diviseur 3 montre que l'un des deux nombres $8n'+5$, $8n'+7$ ($n-1$, $n+1$) est carré; ce qui est impossible.

Il est donc prouvé que le produit P n'est jamais carré.

TROISIÈME SOLUTION DE LA QUESTION 273

(voir t. XIII, p. 33);

Par MM. BELLAVITIS, MANNHEIM
Et Angelo GENOCCHI.

Le triangle ABC a un sommet fixe A, un angle constant CAB; les sommets B et C sont sur une droite fixe.

L'enveloppe du cercle circonscrit est un cercle.

Lemme. La courbe réciproque d'une circonférence est une circonférence touchant les tangentes menées du pôle à la circonférence donnée. La courbe réciproque d'une droite est une circonférence passant au pôle et touchant en ce point une parallèle à la droite donnée.

Soit A le sommet fixe de l'angle mobile CAB. D'un point quelconque O de la perpendiculaire AD et avec OA pour rayon je décris une circonférence. Elle rencontre les droites AB et AC aux points E et F.

L'enveloppe des droites telles que EF est une circonférence, puisque l'angle EAF est constant.

L'enveloppe des circonférences réciproques des droites EF est donc aussi une circonférence.

La courbe réciproque de EF passe par le pôle A et par les points B et C, réciproques des points E, F; elle est donc la circonférence circonscrite au triangle CAB. Donc, etc.

(*). On peut employer la même méthode pour résoudre la question suivante :

D'un point S *pris dans le plan d'une circonférence* O *on mène une sécante* SAB, *on décrit deux circonférences passant en* S *et tangentes à la circonférence* O *aux points* A, B. *Le lieu des points de rencontre* C *de ces circonférences est une circonférence décrite sur* SO *comme diamètre.*

Cette question donne lieu à un genre de transformation dans lequel à un point correspond un cercle, et à une ligne droite correspond un point.

Les questions que l'on obtiendra par ce procédé peuvent s'obtenir par deux transformations successives. A une question A en correspond une autre B, obtenue par la théorie des polaires réciproques; à cette dernière en correspond une autre C, obtenue par la théorie des rayons réciproques.

La question C que l'on obtient ainsi aurait été trouvée directement, si l'on avait appliqué à la question A le genre de transformation dont nous avons parlé plus haut.

Remarque. Soit N la courbe polaire réciproque d'une courbe M par rapport à un cercle dont le centre O est quelconque. *Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point* O *sur les tangentes à la courbe* N *est la courbe réciproque de* M. *Réciproquement, la réciproque du lieu des pieds, etc.*

De cette remarque on déduit immédiatement ce théorème important bien connu : *La polaire réciproque d'une conique par rapport à un cercle décrit d'un de ces foyers*

(*) Ce qui suit est de M. Mannheim.

est un cercle. En effet, la projection du foyer sur les tangentes est un cercle.

Un théorème analogue subsiste pour le triangle sphérique ABC, et se démontre par la projection stéréographique, qui n'est encore qu'une transformation par rayons vecteurs réciproques.

M. Genocchi (Angelo) ajoute qu'on peut se donner un autre point fixe O dans le plan du triangle ABC, et supposer que l'angle constant soit BOC au lieu de BAC. On verra que le centre du cercle circonscrit doit encore parcourir une hyperbole. Si, au lieu de l'angle BOC, on suppose constant le produit OBXOC, le même centre parcourt une ellipse, et l'on trouve enfin une parabole si la somme $\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$ demeure constante.

Dans ces différents cas, les enveloppes des cercles circonscrits seront, en vertu d'un théorème de MM. Quetelet et Sturm, les *caustiques secondaires* par réflexions relatives aux coniques. Ce sont aussi les lieux des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur les tangentes d'une conique, comme l'a démontré M. Dandelin, qui les désigne sous le nom général de *lemniscates*. (*Nouv. Mém.*, *Acad. de Bruxelles*, t. IV.)

THÉORÈME SUR UN MAXIMUM ARITHMOLOGIQUE

(voir t. XVIII, p. 443);

PAR M. JOSEPH DERBÈS,
Élève de l'institution Barbet

Démonstration. 1°. Soit $r = 2$; N est pair, les deux nombres cherchés sont $\frac{N}{2}, \frac{N}{2}$; si N est impair, les nombres cherchés, c'est-à-dire les deux nombres sont égaux ou ne diffèrent que d'une unité.

2°. Soit r un nombre entier quelconque; si a et b désignent deux nombres composants de N, il faut, d'après ce qui précède, pour obtenir un produit maximum, que ces deux nombres soient égaux ou ne diffèrent que d'une unité. Ainsi N pour le produit maximum doit se décomposer en x nombres égaux chacun à $k+1$, et en $r-x$ nombres égaux à k; de là donc

$$x(k+1)+(r-x)k=\mathrm{N}=rk+x=rk+v;$$

donc

$$x=v.$$

Ainsi x est connu et $k=\dfrac{\mathrm{N}-v}{r}$: donc le maximum est $(k+1)^v k^{r-v}$.

Note du Rédacteur. Il reste à démontrer pour quelle valeur de r ce produit devient un *maximum maximorum*.

CERCLES OSCULATEURS ET SURFACES OSCULATRICES
dans les lignes et surfaces du deuxième ordre;

PAR M. G. DUCOROY,
Officier du génie.

---

1. Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation d'une ellipse (coordonnée rectangulaire); l'équation générale de toutes les courbes du deuxième degré osculatrices à cette ellipse, au point x', y', sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)[y-y'-m(x-x')]=0.$$

Cherchant les conditions pour que cette équation représente un cercle, on trouve pour la valeur de m

$$m = \frac{b^2 x'}{a^2 y'},$$

ce qui donne la construction connue du cercle osculateur (*).

2. Soit maintenant

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

un ellipsoïde. Soit b l'axe moyen.

Deux surfaces du deuxième degré qui sont osculatrices en un point doivent avoir une intersection plane passant par ce point; en effet, le plan qui passe par deux points quelconques de la courbe d'intersection et par le point de contact, coupent les deux surfaces suivant deux coniques qui ont cinq points communs et qui par conséquent se confondent. Toutes les surfaces du deuxième degré osculatrices à l'ellipsoïde (1) sont donc comprises dans l'équation

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 + \lambda \left(\dfrac{xx'}{a^2} + \dfrac{yy'}{b^2} + \dfrac{zz'}{c^2} - 1 \right) \\ \qquad \times [z - z' + m(y - y') + n(x - x')] = 0. \end{cases}$$

Leur intersection avec l'équation (1) se trouve tout entière dans le plan

$$(3) \qquad z - z' + m(y - y') + n(x - x') = 0.$$

Pour que l'équation (2) soit une sphère, il faut que cette

(*) L'équation de ce cercle, après avoir déterminé λ, est

$$(a^2 y'^2 + b^2 x'^2)(x^2 + y^2) = a^2 b^2 (x'^2 + y'^2). \qquad \text{Tm.}$$

intersection soit circulaire, il faut par conséquent que le plan (3) soit parallèle à l'axe moyen; donc $m = 0$.

On trouve alors

$$x' = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$

$$z' = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

$$n = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}} \; (*).$$

Remarquons que ces deux valeurs de n sont précisément celles qui donnent les deux sections circulaires.

Cela posé, on trouve aisément le rayon de la sphère, qui est précisément le même que celui des cercles osculateurs à la section principale (x, z) au point (x', z').

On obtient ainsi

$$\rho = \frac{b^3}{ac}.$$

Les quatre ombilics d'un ellipsoïde se réduisent à deux, si $a = b$.

3. Des deux valeurs de x' et z' on tire

$$\frac{x'^2}{a^2 - b^2} - \frac{z'^2}{b^2 - c^2} = 1.$$

C'est le lieu des ombilics de tous les ellipsoïdes homofocaux à l'ellipsoïde donné; ce lieu est une hyperbole homofocale aux sections de ces surfaces par le plan des xz.

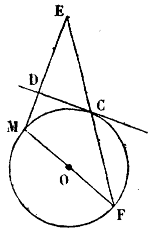
On fera exactement les mêmes recherches pour les autres surfaces du deuxième ordre.

4. La méthode donnée plus haut pour trouver le cercle osculateur de l'ellipse ne s'applique qu'aux courbes

---

(*) Ainsi la sphère osculatrice n'existe que pour quatre points, savoir les ombilics. TM.

du deuxième degré; mais il existe une propriété du cercle qui permet d'écrire immédiatement l'équation du cercle osculateur en un point d'une courbe quelconque sachant que son rayon $\rho = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$.



Soit un cercle O, DC une tangente fixe, M un point quelconque de la courbe, MD la perpendiculaire sur cette tangente, on a

$$\frac{\overline{\mathrm{MC}}^2}{\mathrm{MD}} = \mathrm{ME} = \mathrm{MF} = 2\mathrm{R}.$$

Si le cercle O est osculateur en C à une courbe quelconque au point x', y', on aura donc pour son équation

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 = \frac{y - y - p(x-x')}{\sqrt{1+p^2}} \times \frac{2(1+p^3)^{\frac{3}{2}}}{q},$$

ou

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 = 2\,\frac{y - y' - p(x-x')}{q}(1+p^2),$$

qu'on peut mettre, si l'on veut, sous la forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} (x-x')^2 + (y-y')^2 & x-x' & y-y' \\ 0 & dx' & dy \\ 2(dx'^2 + dy'^2) & dx'^2 & d^2y' \end{vmatrix} = 0.$$

NOUVELLE CONSTRUCTION

des axes d'une ellipse au moyen d'un système de diamètres conjugués sans tracer la courbe ;

PAR M. SOMOFF,
Professeur à l'université de Saint-Pétersbourg.

Il y a déjà plusieurs solutions de ce problème élémentaire. Celles de M. Chasles (*), de M. Broch (**) et celle qui se trouve dans la *Géométrie des courbes* de M. Bergéry sont les plus simples. Je présente ici une nouvelle solution qui, étant aussi simple que celle de M. Chasles, repose sur une démonstration directe qui dérive naturellement du procédé bien connu pour tracer une ellipse par points au moyen d'un système de diamètres conjugués.

Soient AB et CD les diamètres conjugués d'une ellipse dont on veut trouver les axes. Menant par le centre O de l'ellipse une perpendiculaire à AB, portons sur cette droite deux longueurs OE et OF égales au demi-diamètre OA. Joignons ensuite les points E et F par des droites avec l'extrémité C du second diamètre, et menons OH et OG parallèlement à CF et CE. H est sur CE et G sur CF. Cela fait, on trouve que OH + OG et OH — OG sont les grandeurs des demi-axes, et les bissectrices de l'angle HOG et de son supplément HOG′ sont respectivement les directions de ces axes.

(*) *Aperçu historique, etc.*, note 25.
(**) *Journal* de Crelle, t. XL.

LIEU GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. LENGLIER,
Professeur au lycée de Versailles.

On donne une ellipse ou une hyperbole dont AB est l'axe focal et F le foyer le plus voisin du point A; par ce point A on mène une droite quelconque qui rencontre la courbe au point C, et on la prolonge d'une quantité CD telle, que $\frac{AD}{AC} = \frac{m}{n}$ $\left(\frac{m}{n}\text{ étant une quantité donnée}\right)$; puis on tire FD et BC qui se coupent en E, et l'on demande le lieu des points E quand AD prend toutes les positions possibles autour du point A.

Nous allons résoudre la question en supposant que la courbe donnée IK soit une courbe quelconque définie ou non géométriquement. Les trois points A, F, B étant assujettis à la seule condition d'être en ligne droite, la transversale CB donne dans le triangle ADF

$$DE \times FB \times AC = FE \times AB \times CD,$$

d'où

$$\frac{DE}{EF} = \frac{AB}{FB} \times \frac{CD}{AC}.$$

$\frac{AB}{FB}$ est constant, et il en est de même de $\frac{CD}{AC}$, car

$$\frac{AD}{AC} = \frac{m}{n}$$

donne

$$\frac{CD}{AC} = \frac{m-n}{n}.$$

Donc $\frac{DE}{EF}$ est aussi constant, et il en sera de même de

$\frac{DE + EF}{EF}$ ou de $\frac{FD}{FE}$. Donc le lieu cherché est homothétique du lieu des points D par rapport au point F. Le lieu des points D est homothétique de la courbe proposée par rapport au point A. Donc le lieu cherché est aussi homothétique de cette dernière. Comme les trois centres d'homothèse doivent être en ligne droite et que de plus C et E sont des points homologues, le troisième centre est le point B. C'est ce que l'on peut voir aussi directement; car la transversale AD donne dans le triangle CDE

$$BE \times FD \times AC = CB \times FE \times AD,$$

d'où

$$\frac{BE}{BC} = \frac{FE}{FD} \times \frac{AD}{AC}.$$

Or le second membre est constant, donc le premier l'est aussi. Si le point B est à l'infini, ou si l'on mène CE parallèle à AF, le lieu cherché sera une courbe égale à la proposée, car on aura

$$\frac{EC}{AF} = \frac{CD}{AD} \times \frac{m-n}{n},$$

d'où

$$EC = \text{constante},$$

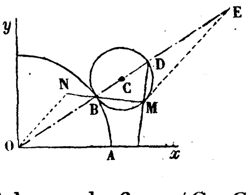
et l'on sait que si par les différents points d'une courbe on mène des droites égales et parallèles, le lieu des extrémités de ces droites sera une courbe égale à la première.

Logocyclique. Les définitions (janvier et février) sont d'une défectuosité flagrante. F et A sont deux points fixes, AY une perpendiculaire sur FA; menons une droite quelconque par F rencontrant la perpendiculaire en T; prenant sur cette droite $TR = TR'$, les points R et R' appartiennent à la logocyclique et sont dits *réciproques;* décrivant une parabole ayant F pour foyer et A pour sommet, on a les propriétés énoncées (p. 28). C'est la même courbe que la strophoïde de M. Montucci (t. V, p. 470).

NOTE SUR LES ÉPICYCLOIDES;

Par M. DIEU,
Professeur à la Faculté de Lyon.

La théorie des épicycloïdes a une grande importance, en raison de ses applications au tracé des engrenages; ainsi, dans les engrenages à flancs, les plus employés de tous, ce sont des arcs d'épicycloïdes qui terminent les profils des dents des deux roues, si l'engrenage est réciproque, ou seulement de la roue conductrice, si l'engrenage est simple, et, dans les engrenages à fuseaux, les profils des dents de la roue conductrice sont des développements d'épicycloïdes. Cette théorie a donc attiré l'attention d'éminents géomètres, et nous devons craindre que le mode de construction de la développée qui fait l'objet de cette Note ne soit pas nouveau; cependant nous le livrons au jugement des érudits et des dessinateurs : les premiers décideront s'il est original, les derniers nous sauront peut-être gré de le faire connaître, ou de le rappeler, s'ils veulent bien s'assurer par quelques essais de l'extrême facilité et de la grande exactitude qu'il procure.



Soient (O, OA) le cercle fixe, (C, CB) le cercle roulant dans une de ses positions, où il touche en B le précédent, D le point diamétralement opposé à B, et M le point décrivant.

Voici la règle très-simple de construction du centre de courbure :

« Prolongez OD de DE = OA, tirez ME, et menez du » point O une parallèle à ME, qui va rencontrer en N le » prolongement de la normale MB; le point N est le » centre de courbure correspondant à M. »

Cette règle convient aussi bien aux épicycloïdes intérieures qu'aux extérieures, et la démonstration est la même pour ces deux genres; nous considérerons le second.

En prenant l'axe des x suivant le rayon du cercle fixe qui passe en A, lorsque M s'est trouvé sur ce cercle, si l'on désigne par R, r les rayons OA, CB, par n le rapport $\frac{R}{r}$, et par φ l'angle BCM, les deux équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= R\left[\cos n\varphi + 2n\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right],\\ y &= R\left[\sin n\varphi - 2n\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right],\end{aligned}\right.$$

représentent la courbe. De ces équations et de la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi},$$

on tire

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi,$$

de laquelle il est facile de conclure que la normale en M passe par le point de contact B.

Mettant ces valeurs de x, y, $\frac{dy}{dx}$, en fonction de φ, dans l'équation générale connue

$$(\eta - y)\frac{dy}{dx} + \xi - x = 0,$$

on a pour la normale

$$\eta - \mathrm{R}\sin n\varphi + (\xi - \mathrm{R}\cos n\varphi).\cot\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi = 0,$$

et en dérivant cette équation par rapport à φ considérée comme seule variable, il vient

$$2n\mathrm{R}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi + (2n+1)(\xi - \mathrm{R}\cos n\varphi) = 0,$$

qui achève de déterminer le centre de courbure. Ces deux équations donnent, pour les coordonnées de ce centre, les formules

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \mathrm{R}\left[\cos n\varphi - \frac{2n}{2n+1}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi\right], \\ \eta &= \mathrm{R}\left[\sin n\varphi + \frac{2n}{2n+1}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi\right], \end{aligned}\right.$$

dont la comparaison avec les équations (1) montre que la développée est une épicycloïde. [Afin de le reconnaître avec précision, on déduit des équations (1) et (2), les carrés des rayons vecteurs OM et O, (ξ, η) ; le rayon du cercle fixe de la développée $= \frac{\mathrm{R}}{2n+1}$, et le rapport de l'autre rayon à celui-là est n, comme pour la proposée.]

Des quatre équations (1) et (2), on tire

$$\xi - x = -\frac{4n(n+1)}{2n+1}\mathrm{R}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi,$$

$$\eta - y = \frac{4n(n+1)}{2n+1}\mathrm{R}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi,$$

et, par conséquent, en désignant par ρ le rayon de courbure, il vient

$$\rho = \pm \frac{4n(n+1)}{2n+1} R \sin \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{4r(r+R)}{2r+R} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Enfin, comme $\pm 2r \sin \frac{\varphi}{2} = MB$, on a

$$\rho = MB + \frac{MB.OB}{OD},$$

dont notre règle n'est que la traduction en langage ordinaire; cette règle est conséquemment démontrée. Si l'on convient d'appeler MB la normale en B à l'épicycloïde, la formule précédente conduit encore à cet énoncé :

« Le rayon de courbure et la normale en chaque point
» d'une épicycloïde sont dans un rapport constant, qui
» surpasse de 1 celui des rayons du cercle fixe et du cercle
» roulant. »

Il suffit de changer n, y, η en $-n$, $-y$, $-\eta$ dans toutes les formules précédentes, pour avoir celles qui se rapportent aux épicycloïdes intérieures.

Nous n'avons besoin de rien ajouter sur le tracé des épicycloïdes (engrenages à flancs). Quant au profil d'une roue conductrice dans les engrenages à fuseaux, il est bon de faire remarquer que deux manières de procéder se présentent : 1°. On peut décrire par points une partie de l'épicycloïde qui donnerait le profil, si le cercle qui représente celui d'un fuseau se réduisait à son centre, puis chercher (par la règle) les points correspondants de la développée, et enfin diminuer tous les rayons de courbure du rayon des fuseaux. 2°. On peut aussi décrire immédiatement par points la développée, épicycloïde dont le cercle fixe et le cercle roulant se construisent sans difficulté, puis, N étant un de ces points, chercher M par la règle inverse ; enfin, diminuer MN du rayon des fuseaux, etc.

Pour le tracé des profils épicycloïdaux, les cercles osculateurs ont un très-grand avantage sur les cercles tangents généralement adoptés d'après M. Poncelet. [Feu M. Savary a proposé l'emploi du cercle osculateur dans ses cours à l'École Polytechnique. Y donnait-il la construction du centre de courbure que nous indiquons? Nous n'avons pu nous fixer à cet égard; mais il nous semble que s'il l'avait donnée, l'usage des cercles osculateurs aurait prévalu.] Dans la plupart des cas, les cercles tangents diffèrent beaucoup trop des cercles osculateurs respectifs, pour ne pas s'éloigner très-sensiblement de l'épicycloïde, même fort près du contact, et, par conséquent, on doit en employer beaucoup plus pour tracer un profil avec assez d'exactitude. Il est facile de justifier cette assertion, en discutant la dernière expression de ρ. Son second terme $\frac{MB.OB}{OD}$ n'est pas en général très-petit par rapport au premier MB, et peut même en approcher beaucoup.

En effet, 1° si $OB > CB$, ce qui est le cas du profil d'une roue engrenant avec un pignon, on a $OD < 3OB$, par suite $\frac{MB.OB}{OD}$ ou $BN > \frac{1}{3}MB$, et la différence $OD - OB$ peut être fort petite, de sorte que BN soit très-voisin de MB; 2° si $OB < CB$, ce qui est le cas du profil d'un pignon, on a $OD > 3\,OB$, par suite $BN < \frac{1}{3}MB$, mais BN peut être très-près de cette limite supérieure. Or BN est, pour ainsi dire, l'erreur sur le rayon du cercle que l'on prend, au lieu du cercle osculateur.

NOTE

Sur la question proposée comme sujet de composition mathématique pour l'admission à l'École Polytechnique en 1857;

PAR M. CH. BOURGEOIS.

La question dont il s'agit était énoncée dans les termes suivants :

Trouver le nombre des racines réelles qu'admet l'équation

$$x = \mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}$$

pour chaque système de valeurs des coefficients A *et* B, *et effectuer la séparation de ces racines.*

Application à l'équation $x = 3142 \sin x + 157$.

Deux solutions de cette question ont été données dans le tome XVI de ces *Annales* (p. 376 et 430). La première solution laisse beaucoup à désirer au point de vue théorique, et l'auteur ne traite l'application numérique qu'après avoir fait subir aux coefficients donnés une profonde altération. La deuxième solution a l'inconvénient de ne pas rattacher la question d'une manière suffisante aux principes fondamentaux de l'algèbre. Il ne s'agissait pas effectivement, pour les candidats, de *résoudre un problème*, mais seulement d'appliquer les théorèmes connus relatifs à la variation des fonctions.

On obtient une solution fort simple de la question en suivant la marche tracée par M. J.-A. Serret dans un article qui fait partie du t. V des *Annales de l'Observatoire impérial*, et qui est intitulé : *Note sur l'équation* *dont dépend l'anomalie excentrique et sur les séries qui se présentent dans la théorie du mouvement elliptique des corps célestes.* J'exposerai ici cette solution en peu de mots, afin de présenter aux candidats le type de la réponse qui leur était demandée.

Solution. Remarquons d'abord que l'on peut toujours supposer A positif; en effet, si le contraire a lieu, et que l'on fasse

$$A = -A', \quad B = \pi - B', \quad x = \pi - x',$$

l'équation à résoudre deviendra

$$x' = A' \sin x' + B'.$$

Cette équation transformée est de même forme que la proposée, et le coefficient A' est positif.

Cela posé, nous ferons

$$(1) \qquad y = x - A \sin x - B,$$

et en désignant par y' la dérivée de y, on aura

$$(2) \qquad y' = 1 - A \cos x.$$

Nous distinguerons les trois cas $A < 1$, $A = 1$, $A > 1$.

1°. Si l'on a $A < 1$, la dérivée y' est constamment positive, donc y est une fonction croissante; par suite l'équation proposée

$$y = 0$$

ne peut avoir qu'une seule racine réelle. D'ailleurs cette racine existe effectivement, puisque l'on a

$$y = -\infty \quad \text{pour} \quad x = -\infty,$$
$$y = +\infty \quad \text{pour} \quad x = +\infty.$$

2°. Si l'on a $A = 1$, la conclusion précédente subsiste, car l'équation (2) donne

$$y' = 2\sin^2 \frac{1}{2} x ;$$

la dérivée y' peut s'annuler, mais elle n'est jamais négative, en sorte que la fonction y est croissante, comme dans le cas de $A < 1$.

3°. Si l'on a $A > 1$, on peut faire $A = \frac{1}{\cos\alpha}$, α désignant un arc compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; les équations (1) et (2) deviennent alors

(1 *bis*) $$y = x - \frac{\sin x}{\cos \alpha} - B,$$

(2 *bis*) $$y' = 1 + \frac{\cos x}{\cos \alpha}.$$

Soit K un entier arbitraire positif, nul ou négatif, et faisons croître x depuis $2K\pi - \alpha$ jusqu'à $2(K+1)\pi - \alpha$. Dans l'intervalle de $x = 2K\pi - \alpha$ à $x = 2K\pi + \alpha$, la fonction y est décroissante, car la dérivée y' est alors nulle ou négative; au contraire, dans l'intervalle de $x = 2K\pi + \alpha$ à $x = 2(K+1)\pi - \alpha$, la fonction y est croissante, car la dérivée y' est nulle ou positive. L'équation proposée ne peut donc avoir qu'une seule racine entre $2K\pi - \alpha$ et $2K\pi + \alpha$, et une seule entre $2K\pi + \alpha$ et $2(K+1)\pi - \alpha$. Il est facile de reconnaître si ces racines existent effectivement.

Posons

(3) $$\frac{B + \alpha - \tan\alpha}{2\pi} = n - f;$$

(4) $$\frac{B - \alpha + \tan\alpha}{2\pi} = n' - f',$$

n et n' étant des entiers positifs nuls, ou négatifs, f et f'

des fractions inférieures à l'unité et positives ou nulles, on aura

$$y = 2\pi(\mathrm{K} - n + f) \qquad \text{pour} \quad x = 2\mathrm{K}\pi - \alpha,$$

$$y = 2\pi(\mathrm{K} - n' + f') \qquad \text{pour} \quad x = 2\mathrm{K}\pi + \alpha,$$

$$y = 2\pi(\mathrm{K} + 1 - n + f') \quad \text{pour} \quad x = 2(\mathrm{K} + 1)\pi - \alpha;$$

donc pour que l'équation (1) ait une racine entre $2\mathrm{K}\pi - \alpha$ et $2\mathrm{K}\pi + \alpha$, il faut et il suffit que K soit l'un des nombres n, $n+1$, $n+2, \ldots, n'-1$. On ne peut jamais avoir $n' < n$; mais si $n' = n$, il n'existe pas de racines entre $2\mathrm{K}\pi - \alpha$ et $2\mathrm{K}\pi + \alpha$. Pareillement, pour qu'il y ait une racine entre $2\mathrm{K}\pi + \alpha$ et $2(\mathrm{K} + 1)\pi - \alpha$, il faut et il suffit que K soit l'un des nombres $n - 1$, n, $n + 1, \ldots, n' - 1$. Il résulte de là que l'équation proposée a

$$2(n' - n) + 1$$

racines réelles dont la séparation est évidemment effectuée par ce qui précède. Cette conclusion subsiste si l'une des fractions f ou f' est nulle; seulement dans ce cas l'équation proposée a deux racines égales.

On peut abréger le calcul des nombres n et n' lorsque A est un grand nombre; car l'on a

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{6}\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \ldots,$$

et comme $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\mathrm{A}}$, on aura

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{\mathrm{A}} + \frac{1}{6\mathrm{A}^3} + \ldots\right);$$

en outre,

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\mathrm{A}^2 - 1} = \mathrm{A} + \left(\sqrt{\mathrm{A}^2 - 1} - \mathrm{A}\right) = \mathrm{A} - \frac{1}{\mathrm{A} + \sqrt{\mathrm{A}^2 - 1}};$$

on peut donc écrire

$$n - f' = \frac{B - A}{2\pi} + 0,25 - \left(\frac{1}{2\pi A} + \frac{1}{12\pi A^3} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{1}{2\pi\left(A + \sqrt{A^2 - 1}\right)},$$

$$n' - f' = \frac{B + A}{2\pi} - 0,25 + \left(\frac{1}{2\pi A} + \frac{1}{12\pi A^3} - \ldots\right)$$

$$- \frac{1}{2\pi\left(A + \sqrt{A^2 - 1}\right)}.$$

A étant un grand nombre, les deux dernières parties de ces formules n'influeront pas sur les valeurs des parties entières n et n'; on aura donc avec une exactitude généralement suffisante

$$(5) \qquad n - f = \frac{B - A}{2\pi} + 0,25,$$

$$(6) \qquad n' - f' = \frac{B + A}{2\pi} - 0,25.$$

Application. Dans l'exemple proposé on a

$$A = 3142, \quad B = 157.$$

Les formules (5) et (6) donnent

$$n - f = -474,82;$$
$$n' - f' = +523,80.$$

Avec les formules (3) et (4) on aurait eu

$$n - f = -474,82;$$
$$n' - f' = +524,81;$$

donc $n = -474$, $n' = 525$, $n' - n = 999$; le nombre des racines de l'équation proposée est donc

$$2(n' - n) + 1 = 1999.$$

REMARQUES SUR L'ARTICLE DE LA PAGE 112;

PAR M. LE BESGUE.

1. La démonstration par laquelle on prouve dans l'article de la page 112 de ce volume, que cinq nombres consécutifs ne peuvent avoir un carré pour produit, peut aussi montrer que ce produit ne saurait être un cube.

Pour cela, il suffit de changer dans les systèmes (1) à (6), a', b', c', d', e' en A^3, B^3, C^3, D^3, E^3. Il en résulte les six équations suivantes :

$$E^3 - C^3 = 2, \quad C^3 - A^3 = 2, \quad E^3 - A^3 = 4,$$
$$2^\varepsilon E^3 - 2^\nu C^3 = 2, \quad D^3 - 2^\nu C^3 = 1, \quad D^3 - B^3 = 2,$$

qui toutes rentrent dans l'équation

$$x^3 \pm y^3 = 2^m z^3,$$

démontrée impossible (Legendre, *Théorie des Nombres*, t. II, p. 9). Il faut remarquer que y peut être positif ou négatif.

2. Les 22 dernières lignes de l'article page 112 contiennent une seconde démonstration de ce théorème. Cinq nombres consécutifs ne peuvent avoir un carré pour produit. Il eût été naturel de la supprimer comme moins simple et moins directe que la première. Il eût fallu surtout n'y pas laisser les fautes suivantes, qui la rendent presque inintelligible.

Page 114, ligne 15, *au lieu de* ainsi, *lisez :* ainsi qu'il suit.

Ibid, ligne 18, *ajoutez :* excepté pour $a = 1$.

Ibid, ligne 24, *changez :* 2^k en 2^{2k}.

Page 115, ligne 2, *changez :* conformément *en* contrairement.

Ibid, ligne 4, *mettez :* l'un au moins des deux nombres, *au lieu de* l'un des deux nombres.

Ces corrections faites, chacun rétablira facilement la démonstration.

THÉORÈME SUR LES COURBURES DES LIGNES;

PAR M. O. BOKLEN (DE SULZ, WURTEMBERG).

1. Étant donnée une ligne quelconque sur une surface, ρ' étant le rayon de courbure de la ligne, désignons par φ l'angle que son plan osculateur fait avec le plan tangent de la surface, par a l'angle que la ligne fait avec une ligne de courbure, par R et R' les rayons de courbure principaux; on a

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\sin\varphi}\left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}\right).$$

Pour le démontrer, soit ρ le rayon de courbure de la section normale de la surface qui passe par la tangente de la ligne; on a, d'après les théorèmes connus d'Euler et de Meunier,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}, \quad \rho' = \rho . \sin\varphi;$$

donc, etc.

2. Le rayon de courbure ρ' de la ligne est donné ici par quatre variables φ, a, R et R'; supposons, par exemple, que dans une certaine ligne φ soit une fonction donnée de ρ', l'équation

$$(2) \qquad f(\rho') = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}$$

exprimera toutes les lignes sur les surfaces où l'angle du plan osculateur de la courbe et du plan tangent à la surface est une fonction donnée du rayon de courbure de la ligne.

Si cet angle est constant, on a

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho'} = \text{const.} \times \left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}\right),$$

et si la constante dans cette équation est égale à l'unité, nous avons

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}.$$

cette formule se rapporte aux lignes géodésiques, dont le plan osculateur est normal à la surface, c'est-à-dire où l'angle φ est égal à 90 degrés.

Pour montrer l'application de cette équation, prenons le cas des lignes géodésiques sur l'ellipsoïde; ici on a en coordonnées elliptiques

$$R = \frac{(\rho^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} (\rho^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho (\rho^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} (\rho^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad R' = \frac{(\rho^2 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho (\rho^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} (\rho^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}};$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (4), on trouve après quelques réductions

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\rho (\rho^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} (\rho^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} (\rho^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}} [\rho^2 - (\mu^2 \cos^2 a + \nu^2 \sin^2 a)].$$

D'après M. Liouville, on a

$$\mu^2 \cos^2 a + \nu^2 \sin^2 a = \text{const.};$$

$D = (\rho^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}$, $D' = (\rho^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}$, sont les demi-diamètres de l'ellipsoïde, parallèles aux lignes de courbure; donc nous avons

$$\frac{D^3 D'^3}{\rho} = \text{const.}$$

pour les lignes géodésiques de l'ellipsoïde.

3. Dans les surfaces où R et R' sont de même signe, d'après l'équation (1), ρ' ne peut pas devenir égal à l'infini, et par conséquent trois points consécutifs d'une courbe sur ces surfaces ne sont jamais en ligne droite. Mais dans les cas où R et R' sont de signes différents, $\frac{1}{\rho'}$ est égal à zéro, si

$$\tang a = \pm \sqrt{\frac{R'}{R}}.$$

4. Dans les surfaces développables, les formules précédentes se simplifient remarquablement; on a alors au lieu de (1)

$$\rho' = \frac{\sin \varphi . R}{\cos^2 a}, \tag{5}$$

et pour les lignes géodésiques

$$\rho = \frac{R}{\cos^2 a}. \tag{6}$$

5. Soient X, Y, Z les quotients différentiels de l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

on a pour les lignes géodésiques

$$(Y dz - Z dy) d^2 x + (Z dx + X dz) d^2 y + (X dy - Y dx) d^2 z = 0,$$

et pour les lignes de courbure

$$(Y dz - Z dy) dX + (Z dx - X dz) dY + (X dY - Y dx) dZ = 0.$$

Désignons, pour abréger, ces deux équations par

$$J = o, \quad J' = o;$$

M. Joachimsthal a prouvé (*), en employant une formule de Jacobi, que l'on a

$$J.J' = \frac{dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z}{dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz} + \frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$
$$- \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + d^2z\,dz}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = o.$$

Supposons que

(7) $$F(p, p', \ldots) = C$$

soit une intégrale de cette équation différentielle; C est une constante, p, p', ... sont certains paramètres, par exemple : les diamètres de la surface qui sont parallèles aux tangentes ou aux tangentes conjuguées des lignes géodésiques et de courbure auxquelles l'équation (7) se rapporte; des rayons de courbure de sections normales qui passent par ces tangentes; des perpendiculaires abaissées du centre sur ces tangentes ou sur les plans tangents; des distances polaires (Journal de M. Liouville, t. XIII, p. 415), etc. Comme l'équation (7) représente en même temps les lignes de courbure et les lignes géodésiques, elle doit établir la liaison intime qui existe entre ces deux espèces de lignes; et l'on pourra en général dire, du moins dans tous les cas où il n'y a pas d'autres paramètres dans l'équation (7) que ceux que je viens de citer, *que la constante* C *a la même valeur pour toutes les lignes géodésiques qui sont tangentes à la même ligne de courbure*. Maintenant nous pourrons distinguer plusieurs espèces de surfaces :

1°. Surfaces où à chaque ligne de courbure convient une valeur spéciale de C, différente des autres.

(*) Nous nous proposons de donner cette démonstration. Tm.

Une ligne géodésique ne peut être tangente qu'à une seule ligne de courbure; elle coupera toutes les autres qu'elle rencontre. Pour toutes les lignes géodésiques qui sont tangentes à la même ligne de courbure dans les points où elles rencontrent une autre ligne de courbure, la constante C aura la même valeur dont nous avons l'équation

$$F(p, p', \ldots) = F(p_0, p'_0, \ldots),$$

qui établit des rapports entre les paramètres p, p',... et p_0; p'_0,... pour les points de rencontre.

Si la surface a un ombilic, ce sera de même une valeur particulière de C qui lui correspond; donc toutes les lignes géodésiques qui passent par un ombilic couperont les lignes de courbure sans toucher aucune d'elles. Prenons, par exemple, une surface conique et développons-la dans un plan. Les lignes de courbure se changeront en cercles concentriques et les lignes géodésiques en droites, et comme une droite ne peut toucher qu'un seul des cercles concentriques, et qu'elle coupe tous les autres cercles, les lignes géodésiques sur les surfaces coniques ne touchent qu'une seule ligne de courbure et coupent toutes les autres.

2°. Surfaces où une même valeur de C correspond à deux lignes de courbure.

Chaque couple de telles lignes divisera la surface en trois parties ou zones, Z, Z', Z'', dont elles enferment la moyenne Z'. Toutes les lignes géodésiques qui touchent la première ligne de courbure traverseront la zone Z' en coupant toutes les lignes de courbure qui s'y trouvent, puis elles toucheront la seconde ligne de courbure qui limite cette zone, et après elles parcourront une seconde fois cette zone, et ainsi de suite, en y formant des tours innombrables qui sont limités par les deux lignes de courbure. Si ces surfaces ont des ombilics, elles en auront en général quatre, auxquels convient la même valeur de C ; toutes les lignes géodésiques qui partent d'un même ombilic se coupent dans un autre ombilic. Voici des exemples de ces surfaces : la sphère, l'ellipsoïde, les hyperboloïdes ; les surfaces de révolution qui sont symétriques par rapport à un plan équatorial, perpendiculaire à l'axe de révolution, et en général aussi les autres surfaces qui sont symétriques par rapport à un plan.

3°. Si la même valeur de C convient à plus de deux lignes de courbure, on ne pourra en général dire que les lignes géodésiques sont enfermées dans des zones limitées par deux lignes de courbure seulement ; mais il peut arriver que la même ligne géodésique touche trois ou plus de lignes de courbure. Développons, par exemple, une surface développable dans un plan, l'arête de rebroussement se changera en une courbe plane ; les tangentes de cette courbe et celles des courbes parallèles qui coupent orthogonalement les tangentes à l'arête de rebroussement, sont les transformées des lignes de courbure, des lignes droites tracées dans le plan sont les transformées des lignes géodésiques. Or il arrivera souvent que les droites touchent trois ou plus des courbes parallèles, et dès lors on conclura que dans une surface développable les lignes géodésiques peuvent toucher trois ou plus de lignes de courbure (*).

SOLUTION DE LA QUESTION 436

(voir t. XVII, p. 186) ;

PAR MM. L. BRAULT, LAQUIÈRE, E. RAGONNEAU, MARQUET ET DALICAN.

Quelle est l'enveloppe de la droite dont la somme des carrés des distances à deux points fixes est donnée?

(*) Je ne sache pas que ces belles relations *de contact* entre les lignes géodésiques et de courbure aient déjà été signalées. TM.

Soient A, B les deux points donnés. Prenons AB pour axes des x, et pour axe des y une perpendiculaire élevée sur le milieu de AB. Appelons $2c$ la distance AB.

L'équation de l'enveloppe s'obtiendra en éliminant a et b entre les trois équations suivantes :

$$(1) \qquad y = ax + b,$$

$$(2) \qquad 2(a^2c^2 + b^2) - k^2(a^2 + 1) = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{x}{a(2c^2 - k^2)} = \frac{1}{2b}.$$

La première équation est l'équation d'une droite quelconque; la deuxième exprime que la somme des carrés des distances des points A et B à cette droite est égale à k^2; enfin, l'équation (3) n'est autre que

$$\frac{f'a}{\varphi' a} = \frac{f'b}{\varphi' b},$$

quand on suppose les équations (1) et (2) ramenées à la forme

$$f(x, y, a, b) = 0, \quad \varphi(a, b) = 0.$$

L'élimination est assez simple et donne pour résultat

$$(4) \qquad 2(2c^2 - k^2)y^2 - 2k^2x^2 = k^2(2c^2 - k^2).$$

Discussion.

1°. $\qquad (2c^2 - k^2) < 0.$

Dans ce cas l'équation (4) représente une ellipse. Les demi-axes sont

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{k}{\sqrt{2}}, \\ b &= \sqrt{\frac{k^2 - 2c}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Les foyers se trouvent sur l'axe des y, leur distance à l'origine est égale à la distance des points A et B à cette même origine.

2°. $$(2c^2 - k^2) = 0.$$

L'équation (3) nous donne $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des y, ou plutôt une portion de l'axe des y. L'analyse devait conduire à ce résultat. Supposons en effet $2c^2 - k^2$ différent de zéro : $2c^2 - k^2 = \varepsilon$. Nous rentrons dans le cas précédent. Le lieu est une ellipse dont le demi grand axe est $\frac{k}{\sqrt{2}}$, et dont l'autre (5) tend vers zéro avec ε. A la limite ($\varepsilon = 0$) l'ellipse se réduit à son grand axe; nous avons là une sorte d'*ellipse évanouissante*.

Or à toute ellipse on peut mener deux tangentes parallèles à une direction donnée. Considérons donc une certaine direction et une ellipse, correspondant à une certaine valeur de ε. Nous trouverons toujours deux tangentes à cette ellipse, parallèles à la direction considérée. Chacune de ces tangentes sera d'autant moins éloignée du sommet le plus voisin du grand axe, que ε sera plus petit. Ces distances convergent vers zéro avec ε. Nous sommes donc, par ces considérations, amenés à ceci : que toute droite passant par les points

$$x = 0, \qquad x = 0,$$

$$y = \frac{k}{\sqrt{2}} = c, \quad y = -\frac{k}{\sqrt{2}} = -c,$$

est telle, que la somme des carrés des distances des points A, B à cette droite est égale à $2c^2$. C'est ce qu'on peut vérifier directement.

3°. $$(2c^2 - k^2) > 0.$$

L'équation (4) représente une hyperbole rapportée à ses axes. L'axe imaginaire est dirigé suivant l'axe des x. La distance des foyers à l'origine est égale à c.

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE

[voir tome XVIII, page 407 (*)];

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

§ Ier. — *Centre. — Plans conjugués. — Polaires réciproques. — Génératrices rectilignes.*

1°. *Centre.*

82. Représentons par $\frac{X_1}{X_4}, \frac{X_2}{X_4}, \frac{X_3}{X_4}$ les coordonnées du centre de la surface ayant pour équation

$$(1)\quad \varphi = \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 \\ + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 \end{array} \right\} = 0;$$

on sait que les coordonnées du centre vérifient les équations

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_1} = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + a_{14}X_4 = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_2} = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + a_{24}X_4 = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{dx_3} = a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + a_{34}X_4 = 0. \end{array} \right.$$

(*) La fin du chapitre III incessamment.

Or le discriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

donne identiquement

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{11} \frac{d\Delta}{da_{41}} + a_{12} \frac{d\Delta}{da_{42}} + a_{13} \frac{d\Delta}{da_{43}} + a_{14} \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \\ & a_{21} \frac{d\Delta}{da_{41}} + a_{22} \frac{d\Delta}{da_{42}} + a_{23} \frac{d\Delta}{da_{43}} + a_{24} \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \\ & a_{31} \frac{d\Delta}{da_{41}} + a_{32} \frac{d\Delta}{da_{42}} + a_{33} \frac{d\Delta}{da_{41}} + a_{34} \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0. \end{aligned} \right.$$

La comparaison des systèmes d'équations (2) et (3) nous fournit immédiatement les coordonnées du centre

$$(4) \quad \left(X_1 = \frac{d\Delta}{da_{41}}, \quad X_2 = \frac{d\Delta}{da_{42}}, \quad X_3 = \frac{d\Delta}{da_{43}}, \quad X_4 = \frac{d\Delta}{da_{44}} \right).$$

La surface, rapportée à son centre, aura alors pour équation

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_4 \\ & \qquad + \frac{\Delta}{\dfrac{d\Delta}{da_{44}}} x_4^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

83. Si l'on regarde le premier membre de l'équation (1) comme une fonction des variables $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ et qu'on y remplace ces variables par $\frac{X_1}{X_4}$, $\frac{X_2}{X_4}$, $\frac{X_3}{X_4}$, la fonction acquerra, en général, une valeur maximum ou minimum.

Or on a, d'après le principe des fonctions homogènes,

$$2\varphi = x_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + x_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + x_3 \frac{d\varphi}{dx_3} + x_4 \frac{d\varphi}{dx_4}.$$

En désignant par Φ la valeur de φ lorsqu'on y fait

$$x_r = \mathrm{X}_r$$

où

$$r = 1, 2, 3, 4,$$

il viendra, eu égard aux relations (2),

$$2\Phi = \mathrm{X}_4 \frac{d\Phi}{d\mathrm{X}_4}.$$

D'un autre côté,

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{d\mathrm{X}_4} = a_{41}\mathrm{X}_1 + a_{42}\mathrm{X}_2 + a_{43}\mathrm{X}_3 + a_{44}\mathrm{X}_4;$$

ou, d'après les valeurs (4),

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{d\mathrm{X}_4} = a_{41} \frac{d\Delta}{da_{41}} + a_{42} \frac{d\Delta}{da_{42}} + a_{43} \frac{d\Delta}{da_{43}} + a_{44} \frac{d\Delta}{da_{44}} = \Delta.$$

Par suite, la fonction que nous considérons, c'est-à-dire $\frac{1}{x_4^2}\varphi$, aura pour valeur, dans ce cas,

$$(6) \qquad \frac{1}{\mathrm{X}_4^2}\Phi = \frac{\Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}}.$$

En appliquant les règles ordinaires du calcul des valeurs maxima et minima, on constate facilement que la fonction $\frac{1}{x_4^2}\varphi$ n'obtient de telles valeurs que lorsque cette fonction, égalée à zéro, représente une surface appartenant au genre ellipsoïde; et alors

$$\text{il y a } \textit{maximum}, \text{ si } \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0,$$

$$\text{il y a } \textit{minimum}, \text{ si } \frac{d\Delta}{da_{44}} > 0.$$

84. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé implicitement $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ différent de zéro; sans quoi les équations (2) n'admettraient plus une solution finie et déterminée.

Si le centre est sur la surface, on a, d'après l'équation (6), $\Delta = 0$, et réciproquement; la surface alors est un cône.

Lorsque $\frac{d\Delta}{da_{44}}$ est nul, il faudra distinguer les deux cas suivants :

1°. Δ est différent de zéro; les relations d'identité du chapitre I[er] nous montrent qu'une au moins des quantités $\frac{d\Delta}{da_{41}}, \frac{d\Delta}{da_{42}}, \frac{d\Delta}{da_{43}}$ est différente de zéro : le centre est à l'infini.

2°. Δ est nul; alors les quantités $\frac{d\Delta}{da_{41}}, \frac{d\Delta}{da_{42}}, \frac{d\Delta}{da_{43}}$ sont aussi nulles, et il peut y avoir indétermination ou impossibilité.

Je n'insisterai pas davantage sur cette discussion.

2°. *Plans conjugues.*

85. Si l'on représente par A_1, A_2, A_3, A_4 les demi-dérivées par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4 du premier membre de l'équation (1) dans lesquelles on a remplacé $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$

par $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, le plan ayant pour équation

$$(7)\qquad x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4 = 0$$

est dit le *plan polaire* du point $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{x_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)$ par rapport à la surface $\varphi = 0$; le point $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_4}, \frac{\alpha_2}{\alpha_4}, \frac{\alpha_3}{x_4}\right)$ est appelé le *pôle* de ce plan.

Trois plans sont dits *conjugués* lorsque le pôle d'un quelconque de ces trois plans se trouve sur l'intersection des deux autres.

Soient les équations de trois plans

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = 0, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = 0. \end{array}\right.$$

Si $\frac{\alpha_1}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_2}{\alpha_4}$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ sont les coordonnées du pôle du premier de ces plans, on devra avoir

$$\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + a_{14}\alpha_4 = m_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 + a_{24}\alpha_4 = m_2, \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_3 + a_{33}\alpha_3 + a_{34}\alpha_4 = m_3, \\ a_{41}\alpha_1 + a_{42}\alpha_2 + a_{43}\alpha_3 + a_{44}\alpha_4 = m_4; \end{array}$$

et les valeurs de α_1, α_2, α_3, α_4, déduites de ces quatre équations devront vérifier les deux dernières équations (8). On obtiendra ainsi deux équations de condition. On opérera de la même manière pour le second et le troisième plan. On trouvera, en définitive, trois équations de condition seulement.

Les *trois* conditions pour que les trois plans (8) soient *conjugués* sont données par les relations suivantes :

$$(9)\qquad \left\{ \begin{array}{l}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \\
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \\
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & p_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & p_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.
\end{array}\right.$$

(*La suite prochainement.*)

SOLUTION DE LA QUESTION 464

(voir t. XVIII, p. 117);

PAR M. CREMONA,
Professeur à Crémone (*).

Soient α, β, γ, δ les distances d'un point quelconque à quatre plans donnés; il est évident que l'équation la plus générale d'une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre formé par les quatre plans

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

(*) Maintenant professeur au lycée à Milan.

sera

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta + \lambda\alpha\delta + \mu\beta\delta + \nu\gamma\delta = 0.$$

Cette surface est coupée par le plan $\delta = 0$ suivant la conique

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0.$$

Soient α', β', γ' les distances d'un point quelconque du plan $\delta = 0$ aux côtés du triangle $\delta = 0$ ($\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$) : triangle formé par l'intersection du plan δ avec les plans α, β, γ; on a

$$\alpha = \alpha' \sin\alpha\delta, \quad \beta = \beta' \sin\beta\delta, \quad \gamma = \gamma' \sin\gamma\delta,$$

où $\alpha\delta$ est l'angle des plans $\alpha = \delta = 0$, etc. Donc l'équation de la conique rapportée au triangle inscrit sera

$$\frac{l}{\alpha' \sin\alpha\delta} + \frac{m}{\beta' \sin\beta\delta} + \frac{n}{\gamma' \sin\gamma\delta} = 0 \quad \text{(Salmon)}.$$

Les angles du triangle sont $\beta\delta\gamma$, $\gamma\delta\alpha$, $\alpha\delta\beta$ où $\beta\delta\gamma$ (*) exprime l'angle que fait l'intersection des faces $\beta = \delta = 0$ avec l'intersection des faces $\gamma = \delta = 0$. On sait que la conique représentée par l'équation ci-dessus est une circonférence, si l'on a

$$l : m : n = \sin\alpha\delta . \sin\beta\delta\gamma : \sin\beta\delta . \sin\gamma\delta\alpha : \sin\gamma\delta . \sin\alpha\delta\beta.$$

(Salmon.)

De même, si les plans $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ coupent la surface suivant des circonférences, on aura

$$l : \mu : \nu = \sin\delta\alpha . \sin\beta\alpha\gamma : \sin\gamma\alpha . \sin\delta\alpha\beta : \sin\beta\alpha . \sin\gamma\alpha\delta,$$
$$m : \nu : \lambda = \sin\delta\beta . \sin\gamma\beta\alpha : \sin\alpha\beta . \sin\delta\beta\gamma : \sin\gamma\beta . \sin\alpha\beta\delta,$$
$$n : \lambda : \mu = \sin\delta\gamma . \sin\alpha\gamma\beta : \sin\beta\gamma . \sin\delta\gamma\alpha : \sin\alpha\gamma . \sin\beta\gamma\delta.$$

(*) $\beta\delta\gamma$ est l'angle qui, dans l'énoncé de la question, a été désigné par $(\beta\delta, \gamma\delta)$. P.

De là on tire immédiatement que l, m, n, λ, μ, ν sont proportionnelles aux quantités

$$\frac{\sin\alpha\delta}{\sin\beta\gamma}\sin\beta\alpha\gamma\,.\sin\beta\delta\gamma,$$

$$\frac{\sin\beta\delta}{\sin\gamma\alpha}\sin\gamma\beta\alpha\,.\sin\gamma\delta\alpha,$$

$$\frac{\sin\gamma\delta}{\sin\alpha\beta}\sin\alpha\gamma\beta\,.\sin\alpha\delta\beta,$$

$$\frac{\sin\beta\gamma}{\sin\alpha\delta}\sin\alpha\beta\delta\,.\sin\alpha\gamma\delta,$$

$$\frac{\sin\gamma\alpha}{\sin\beta\delta}\sin\beta\gamma\delta\,.\sin\beta\alpha\delta,$$

$$\frac{\sin\alpha\beta}{\sin\gamma\delta}\sin\gamma\alpha\delta\,.\sin\gamma\beta\delta,$$

ce qui démontre le théorème de M. Prouhet.

SOLUTION DE LA QUESTION 465

(voir t. XVIII, p. 117);

PAR M. CREMONA,
Professeur à Crémone.

Soient a_0, a_1,..., a_{n-1}, n quantités quelconques ; α une racine primitive de l'équation binôme

$$x^n - 1 = 0,$$

et

$$\theta_r = a_0 + a_1\alpha_r + a_2\alpha_r^2 + \ldots + a_{n-1}\alpha_r^{n-1}.$$

en supposant $\alpha_r = \alpha^r$.

Multiplions entre eux les deux déterminants

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_4 \ldots & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 \ldots & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots & 1 \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

En exécutant la multiplication par lignes, les colonnes du déterminant produit deviennent divisibles respectivement par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, et l'on a

$$D\Delta = \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots & 1 \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}^2 \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-2}^2 \ldots & \alpha_{n-2}^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \ldots & \alpha_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

Or le déterminant du second membre est évidemment égal à $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta$; donc

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n.$$

Ce théorème, mentionné par M. Michael Roberts (*Nouvelles Annales*, cahier de mars 1859, p. 87) est de M. Spottiswoode (*Journal* de Crelle, t. LI); la démonstration ci-dessus m'a été communiquée par M. Brioschi, et je l'ai publiée comme lemme dans une petite Note *Intorno ad un teorema di Abel* (*Annali* di Tortolini, 1856).

En supposant

$$a_r = a + rd,$$

il s'ensuit

$$\theta_r = \frac{nd}{\alpha_r - 1} \quad \text{pour} \quad r = 1, 2, \ldots, n-1$$

et

$$\theta_n = na + \frac{n(n-1)}{2} d;$$

donc

$$\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_{n-1} = (-1)^{n-1} n^{n-2} d^{n-1},$$

et, par conséquent,

$$D = \begin{vmatrix} a & a+d \ldots & a+(n-1)d \\ a+d & a+2d \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha+(n-1)d & a \ldots & a+(n-2)d \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} (nd)^{n-1} \left[a + \frac{(n-1)d}{2}\right],$$

ce qui est bien la question 465.

SOLUTION DE LA QUESTION 498

(voir p. 4.) ;

PAR M. LÉON RABEAU,
Élève de Spéciales au lycée de Poitiers.

ET M. CHARLES KESSLER,
Élève au Prytanée Militaire.

On donne une droite fixe, un point B sur cette droite et un point fixe A. Trouver une courbe telle, qu'en menant par un point quelconque pris sur cette courbe une tangente, et par le point A une parallèle à cette tangente, ces droites interceptent sur la droite fixe deux segments comptés du point B, tels, que la somme des carrés de ces segments soit égale à un carré donné k^2. Même question en prenant la différence des carrés.

Je prends la droite donnée pour axe des y, et la droite BA pour axe des x. Le point B sera alors l'origine des coordonnées.

Soit (x_1, y_1) un point de la courbe. L'équation de la tangente en ce point sera

$$y - y_1 = y'(x - x_1).$$

L'équation de la parallèle menée par le point A sera, en appelant a la distance AB,

$$y = y'(x - a).$$

Les ordonnées à l'origine sont pour les deux parallèles

$$y = y_1 - x_1 y',$$
$$y = -ay'.$$

On doit donc avoir, en effaçant les indices,

$$(1) \qquad (y - xy')^2 + a^2y'^2 = k^2;$$

on tire de cette équation

$$y = x' \pm \sqrt{k^2 - a^2y'^2},$$

et en prenant les dérivées des deux membres,

$$y' = y' + y''x \pm y'' \frac{-a^2y'}{\sqrt{k^2 - a^2y'^2}},$$

d'où

$$y''\left(x \mp \frac{a^2y'}{\sqrt{k^2 - a^2y'^2}}\right) = 0.$$

Cette dernière équation est vérifiée par

$$y'' = 0$$

et par

$$y' = \pm \frac{kx}{a\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

La première solution donne $y' = m$ (une constante arbitraire). Transportant cette valeur dans l'équation (1), on a, pour première solution du problème,

$$(\alpha) \qquad y = mx \pm \sqrt{k^2 - a^2m^2}.$$

La seconde valeur de y', transportée dans la même équation, donne, en réduisant,

$$y^2 = \frac{k^2}{a^2}(x^2 + a^2),$$

d'où

$$(\beta) \qquad \frac{y^2}{k^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

équation d'une hyperbole dont deux diamètres conjugués sont en direction, les axes coordonnés, et en longueur, $2a$ et $2k$, $2a$ étant l'axe imaginaire (l'axe des x).

Nous remarquerons que l'équation (α) est celle d'une tangente menée à cette hyperbole ; il est évident, en effet, que toutes ces droites, se confondant avec leurs tangentes, répondent à la question.

Si $a = k$, l'hyperbole devient équilatère.

Si l'on avait pris la différence des carrés, au lieu de considérer leur somme, rien n'aurait été changé dans le calcul précédent, que a^2 en $-a^2$. En faisant cette transformation, on arrive encore à

$$y'' = 0, \quad \text{d'où} \quad y' = m,$$

et à

$$y'' = \pm \frac{kx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

La première solution donne

$$y = mx \pm \sqrt{k^2 + a^2 m^2},$$

et la seconde,

$$\frac{y^2}{k^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

équation d'une ellipse dont les diamètres conjugués sont $2a$ et $2k$. La première équation représente encore l'équation d'une tangente à cette ellipse.

Si $a = k$, cette ellipse devient un cercle si les axes sont rectangulaires, et s'ils sont obliques, une ellipse rapportée à ses deux diamètres conjugués égaux.

Note. M. Franck, licencié ès sciences, chef d'une institution israélite à Lyon, donne une solution identique à la précédente, et ajoute :

Supposons que l'on veuille satisfaire à la condition

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{p}{px - y} - \frac{p}{a} = k \quad (*)$$

ce qui donne l'équation différentielle

$$y = px - \frac{ap}{p + ak}.$$

En différentiant

$$dp\left[x - \frac{a(p + ak) ap)}{(p + ak)^2}\right] = 0,$$

ou

$$dp\left[x - \frac{a^2 k}{(p + ak)^2}\right] = 0.$$

L'équation de la courbe cherchée sera le résultat de l'élimination de p entre les deux équations

(1) $$x - \frac{a^2 k}{(p + ak)^2} = 0,$$

(2) $$y = px - \frac{ap}{p + ak};$$

l'équation (1) donne

$$(p + bk)^2 = \frac{b^2 k}{x}.$$

(3) $$p = - bk + \varepsilon,$$

en posant

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{x}{k}};$$

remplaçant dans l'équation (2) la valeur de p fournie par

(*) p c'est y'.

l'équation (3), on obtient

$$\varepsilon(y + bkx + b) = 2bk,$$

et en élevant au carré

$$\frac{b^2 k}{x}(y + bkx + b)^2 = 4b^4 k^2,$$

on obtient

$$y = -(akx + a) \pm 2a\sqrt{kx},$$

équation d'une parabole facile à construire.

M. Kessler trouve un lieu du troisième ordre lorsqu'on prend la somme directe des segments.

SOLUTIONS TRIGONOMÉTRIQUES DES QUESTIONS 483 ET 484

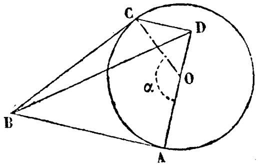
(voir t. XVIII, p. 357);

PAR M. THEOFIK HAZAN,
Lieutenant, élève de l'École impériale Ottomane à Constantinople.

Théorème I. D'un point B extérieur à une circonférence O on mène deux tangentes BA et BC, on projette C en D sur le rayon OA, et l'on fait exécuter une révolution complète à la figure autour de OA, l'un des rayons des points de contact; il faut démontrer que le volume engendré par le triangle mixtiligne CBA est équivalent au cône engendré par le triangle BDA (question 483).

Théorème. II. La même figure étant faite que précédemment, et exécutant la même révolution, il faut prouver que le segment sphérique engendré par CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD (question 484).

Si nous supposons le rayon OA égal à l'unité, nous



aurons

$$BA = \text{tang}\,\frac{\alpha}{2},$$

$$CD = \sin\alpha\,,$$

$$AD = 1 - \cos\alpha.$$

Considérons :

1°. Le volume engendré par le quadrilatère DABC $= v$;

2°. Le volume engendré par CDA $= v'$;

3°. Le volume engendré par le triangle mixtiligne ABC $=$ V;

4°. Le volume engendré par le triangle ABD $=$ V'.

Nous aurons

$$\text{(I)}\quad v = \frac{1}{3}\pi\,(1-\cos\alpha)\left(\text{tang}^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\alpha + \text{tang}\,\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right),$$

$$\text{(II)}\quad v' = \frac{1}{6}\pi(1-\cos\alpha)\left[3\sin^2\alpha + (1-\cos\alpha)^2\right].$$

En soustrayant v' de v on obtient

$$\text{(I)}\quad v - v' = \text{V} = \frac{1}{6}\pi(1-\cos\alpha)\left\{\begin{array}{l} 2\,\text{tang}^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\alpha \\ +\,2\,\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}\sin\alpha \\ -\,(1-\cos\alpha)^2 \end{array}\right\},$$

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{array}{l} v - v' = \text{V} = \frac{1}{3}\pi\,(1-\cos\alpha)\,\text{tang}^2\frac{\alpha}{2} \\ -\,\frac{1}{6}\pi\,(1-\cos\alpha)\left\{\begin{array}{l} \sin^2\alpha - 2\,\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}\sin\alpha \\ +\,(1-\cos\alpha)^2 \end{array}\right\}. \end{array}\right.$$

mais comme

$$V' = \frac{1}{3}\pi(1 - \cos\alpha)\,\text{tang}^2\frac{\alpha}{2},$$

et

$$\sin^2\alpha - 2\,\text{tang}\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + (1 - \cos\alpha)^2 = (0),$$

en substituant dans l'équation (III) on obtiendra

$$V = V'.$$

C. Q. F. D.

Théorème II. En soustrayant le segment CDA du quadrilatère ABCD, on obtiendra, d'après le théorème prouvé en haut, le volume du cône ABD; en effet, si du volume du cône ABD on soustrait du quadrilatère ABCD, on obtiendra le volume du triangle engendré par CDB; enfin le segment engendré CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD.

SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES DES QUESTIONS 483 ET 484

(voir t. XVIII, p. 356);

PAR M. JULES PUECH,
Élève du lycée de Castres (Tarn).

Même énoncé; même figure que dans la solution trigonométrique.

Le volume du cône décrit par ABD est représenté par

$$\frac{1}{3}\pi AD \times \overline{AB}^2;$$

d'un autre côté

$$V.ABC = V.ABCD - V.ADC,$$

ce qui donne

$$\text{V.ABC} = \frac{1}{3}\pi\,\text{AD}\left(\overline{\text{AB}}^2 + \overline{\text{CD}}^2 + \text{AB}\times\text{DC}\right) - \left(\frac{1}{2}\pi\,\text{AD}\times\overline{\text{DC}}^2 + \frac{1}{6}\pi\,\overline{\text{AD}}^2\right);$$

par suite

$$\text{V.ABC} = \pi\text{AD}\left(\frac{1}{3}\overline{\text{AB}}^2 + \frac{1}{3}\overline{\text{CD}}^2 - \frac{1}{2}\overline{\text{CD}}^2 + \frac{1}{3}\text{AB}\times\text{DC} - \frac{1}{6}\overline{\text{AD}}^2\right),$$

ou

$$\text{V.ABC} = \frac{1}{3}\pi\,\text{AD}\times\overline{\text{AB}}^2 + \pi\,\text{AD}\left(\frac{1}{3}\text{AB}\times\text{DC} - \frac{1}{6}\overline{\text{CD}}^2 - \frac{1}{6}\overline{\text{AD}}^2\right).$$

Il suffit donc de démontrer que la quantité

$$\frac{1}{3}\text{AB}\times\text{DC} - \frac{1}{6}\overline{\text{CD}}^2 - \frac{1}{6}\overline{\text{AD}}^2$$

placée entre crochets est nulle, ce qui revient à faire voir que

$$\text{CD}\,(2\,\text{AD} - \text{CD}) = \overline{\text{AD}}^2.$$

Cette égalité devient manifeste si l'on mène par le point C, CF perpendiculaire sur AB. Le triangle rectangle FCB donne

$$\overline{\text{AD}}^2 = \overline{\text{CF}}^2 = \overline{\text{BC}}^2 - \overline{\text{BF}}^2 = \overline{\text{BA}}^2 - (\text{BA} - \text{AF})^2$$
$$= \overline{\text{BA}}^2 - (\text{BA} - \text{CD})^2 = 2\,\text{AB}\times\text{DC} - \overline{\text{DC}}^2 = \text{DC}\,(2\,\text{AB} - \text{DC}).$$

Corollaire (question 484). Dans la même figure le segment sphérique CDA est équivalent au volume engendré par le triangle CBD.

Note. MM. de la Brière et de Charodon, élèves de l'école des Carmes, ont résolu la question de la même manière.

SOLUTION DE LA QUESTION 504

(voir p. 43);

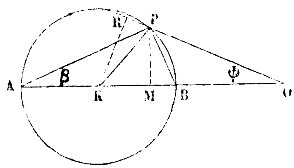
PAR M. CHARLES KESSLER,
Élève du Prytanée Militaire.

AB $= 2R =$ diamètre d'un cercle de centre K, O un point sur le diamètre AB, $KO = a$, $P =$ un point de la circonférence, angle $PAB = \beta$, angle $POB = \psi$. On a

$$\sin\psi = \frac{R\sin 2\beta}{\sqrt{(R-a)^2\cos^2\beta + (R+a)^2\sin^2\beta}},$$

$$\frac{2d\beta}{\sqrt{(R-a)^2\cos^2\beta + (R+a)^2\sin^2\beta}} = \frac{d\psi}{\sqrt{R^2\cos^2\psi + (R^2-a^2)\sin^2\psi}}.$$

Fonction elliptique. JACOBI.



1°. Je mène PK et j'abaisse PM perpendiculaire sur AB; je mène PB :

Triangle PKM........ $PM = R\sin 2\beta$,

Triange POM........ $PM = OP\sin\psi$,

d'où

$$R\sin 2\beta = OP\sin\psi,$$

$$\sin\psi = \frac{R\sin 2\beta}{OP}.$$

Pour démontrer la proposition, il suffit donc de prouver d'abord que l'on a

$$\mathrm{OP} = \sqrt{(\mathrm{R}-a)^2\cos^2\beta + (\mathrm{R}+a)^2\sin^2\beta}$$
$$= \sqrt{4a\mathrm{R}\sin^2\beta + (\mathrm{R}-a)^2};$$

or le triangle PBO

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{BO}}^2 - 2\,\mathrm{PB}.\mathrm{BO}\cos\widehat{\mathrm{PBO}},$$

$$\mathrm{PB} = 2\mathrm{R}\sin\beta,\quad \mathrm{BO} = a-\mathrm{R},\quad \widehat{\mathrm{PBO}} = 90+\beta,$$
$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = 4\,\mathrm{R}^2\sin^2\beta + (\mathrm{R}-a)^2 - 4\,\mathrm{R}\sin^2\beta\,(\mathrm{R}-a)$$
$$= 4\mathrm{R}a\sin^2\beta + (\mathrm{R}-a)^2.$$

C. Q. F. D.

2°.
$$\frac{2d\beta}{\sqrt{(\mathrm{R}-a)^2\cos^2\beta + (\mathrm{R}+a)^2\sin^2\beta}}$$
$$= \frac{d\psi}{\sqrt{\mathrm{R}^2\cos^2\psi + (\mathrm{R}^2-a^2)\sin^2\psi}},$$

ou

$$\frac{d\psi}{d\beta} = 2\,\frac{\sqrt{(\mathrm{R}^2-a^2\sin^2\psi}}{\sqrt{(\mathrm{R}^2-a^2)\cos^2\beta + (\mathrm{R}+a)^2\sin^2\beta}}.$$

J'abaisse KR perpendiculaire sur OP, il faut prouver que

$$\frac{d\psi}{d\beta} = 2\,\frac{\sqrt{\mathrm{R}^2-\overline{\mathrm{KR}}^2}}{\mathrm{OP}} = 2\,\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{OP}},$$

et comme

$$\mathrm{PR} = \mathrm{R}\cos(2\beta+\psi),\quad \mathrm{OP} = \frac{\mathrm{R}\sin 2\beta}{\sin\psi},$$

il faut donc prouver que

$$\frac{d\psi}{d\beta} = 2\,\frac{\cos(2\beta+\psi)\sin\psi}{\sin 2\beta} = \frac{2\mathrm{R}\cos(2\beta+\psi)}{\sqrt{(\mathrm{R}-a)^2\cos^2\beta + (\mathrm{R}^2+a)^2\sin^2\beta}}.$$

En effet la première équation

$$\sqrt{(\mathrm{R}-a)^2\cos^2\beta + (\mathrm{R}+a)^2\sin^2\beta} = \frac{\mathrm{R}\sin 2\beta}{\sin\psi},$$

étant dérivée, en regardant ψ comme fonction de β on a

$$\frac{2(R+a)^2\sin\beta\cos\beta - 2(R-a)^2\sin\beta\cos\beta}{2\sqrt{(R-a)^2\cos^2\beta+(R+a)^2\sin^2\beta}}$$

$$= \frac{2R\cos 2\beta\sin\psi - R\sin 2\beta\cos\psi\,\frac{d\psi}{d\beta}}{\sin^2\psi},$$

et comme

$$a\sin\psi = R\sin(2\beta+\psi),$$

$$2R\,\frac{-R\sin(2\beta+\psi)\sin 2\beta\sin\psi+\cos 2\beta\sin\psi\sqrt{(R-a)^2\cos^2\beta+(R+a)^2}}{R\sin 2\beta\cos\psi\sqrt{(R-a)^2\cos^2\beta+(R+a)^2\sin^2\beta}}$$

$$=\frac{d\psi}{d\beta},$$

ou

$$2R\,\frac{-\sin\psi\sin(2\beta+\psi)+\cos 2\beta}{OP\cos\psi}=\frac{d\psi}{d\beta},$$

$$\frac{2R}{\sqrt{(R-a)^2\cos^2\beta+(R+a)^2\sin^2\beta}}$$

$$\times\left[\frac{\cos 2\beta}{\cos\psi}-\text{tang}\,\psi\sin(2\beta+\psi)\right],$$

$$\frac{2R}{\sqrt{(R-a)^2\cos^2\beta+(R+a)^2\sin^2\beta}}$$

$$\times\left[\frac{\cos 2\beta}{\cos\psi}-\text{tang}\,\psi\,(\sin 2\beta\cos\psi+\cos 2\beta\sin\psi)\right],$$

$$\frac{2R}{\sqrt{(R-a)^2\cos^2\beta+(R+a)^2\sin^2\beta}}$$

$$\times\left(-\sin 2\beta\sin\psi+\frac{\cos 2\beta}{\cos\psi}-\sin^2\psi\,\frac{\cos 2\beta}{\cos\psi}\right),$$

$$\frac{2R\cos(2\beta+\psi)}{\sqrt{(R-a)^2\cos^2\beta+(R+a)^2\sin^2\beta}}=\frac{d\psi}{d\beta}.$$

C. Q. F. D.

Note du Rédacteur. Dans l'énoncé du problème le point O est entre A et B.

NOTE

Sur la loi des petites oscillations du pendule simple dans un milieu résistant;

PAR M. H. RESAL,
Docteur ès Sciences, Officier de l'Instruction publique.

La recherche de la loi des petites oscillations du pendule, dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse, est une question qui fait partie du programme de la licence. La solution que Poisson en donne dans son *Traité de Mécanique* est assez compliquée et comporte deux méthodes, l'une pour le calcul de la décroissance des amplitudes, l'autre pour la détermination de la durée des oscillations.

Dans mes leçons à la Faculté des Sciences de Besançon de 1855 à 1859, j'ai donné la solution suivante qui me paraît plus simple que celle de Poisson, et dans laquelle un seul et même calcul conduit aux divers éléments du mouvement.

Nous prendrons pour origine du temps l'instant où le pendule vient de terminer l'une de ses oscillations et nous désignerons par α_0 la demi-amplitude correspondante.

Soient :

g l'accélération de la gravité;

l la longueur du pendule;

m la masse pesante qui le termine;

α l'angle qu'il forme au bout du temps t avec la verticale : cet angle sera considéré comme positif ou négatif selon que le pendule se trouvera ou non du même côté de la verticale de suspension qu'à l'instant initial;

$V = \mp \frac{l d\alpha}{dt}$ la vitesse correspondante de m.

La résistance éprouvée par m dans le milieu pourra être représentée par $mg \frac{V^2}{K^2}$, K étant une constante linéaire; et l'on aura d'après le principe des forces vives

$$\frac{1}{2} dV^2 = - g \sin \alpha \, d\alpha + g \frac{V^2}{K^2} d\alpha.$$

Cette équation, linéaire en V^2, permettra de déterminer V en fonction de α, et de ramener, à l'aide de la relation $V = \mp \frac{l d\alpha}{dt}$, la recherche du temps à une quadrature, quelle que soit d'ailleurs la grandeur des amplitudes et la nature du milieu; mais les formules auxquelles on arrive ainsi sont trop compliquées pour que l'on puisse bien se rendre compte de l'influence de la résistance du milieu sur le mouvement du pendule : aussi nous bornerons-nous à considérer le cas des petites oscillations, le seul qui sous le rapport de l'observation présente de l'intérêt.

Il résulte des faits tirés de l'observation que le coefficient de la résistance de l'air est très-petit, et que pour des vitesses aussi faibles que celles du pendule, on peut sans inconvénient en négliger le carré; ce qui revient, dans l'évaluation de cette résistance, à remplacer V^2 par sa valeur dans l'hypothèse du vide ou par $g(\alpha_0^2 - \alpha^2)$, en négligeant la quatrième puissance de α_0 et α. On trouve ainsi pour le travail total absorbé par la résistance de l'air

$$- mg^2 \frac{l^2}{K^2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} (\alpha_0^2 - \alpha^2)\, d\alpha = \frac{1}{3} mg^2 \frac{l^2}{K^2} (\alpha_0 - \alpha)^2 (2\alpha_0 + \alpha);$$

le principe des forces vives donne par suite

$$\frac{1}{2}V^2 = \frac{1}{2}gl(\alpha_0^2 - a^2) - \frac{1}{2}g^2\frac{l^2}{K^2}(\alpha_0 - \alpha)(2\alpha_0 + \alpha),$$

d'où

$$(1)\quad V = \sqrt{gl(\alpha_0 - \alpha)\left\{(\alpha_0 + \alpha)\left[1 - \frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}(\alpha_0 - \alpha)\right] - \frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0(\alpha_0 - \alpha)\right\}}.$$

La demi-amplitude ascendante qui suit la demi-oscillation descendante correspondant à $V = 0$ est une racine négative de l'équation $V = 0$, qui, prise en valeur absolue, diffère de α_0 d'une quantité de l'ordre de $\frac{1}{K^2}$. Pour l'obtenir il suffit donc de poser

$$(2)\qquad (\alpha_0 + \alpha)\left[1 - \frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}(\alpha_0 - \alpha)\right] = \frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0(\alpha_0 - \alpha).$$

Si l'on continue à négliger le carré de $\frac{gl}{K^2}$, on pourra remplacer dans le second membre de cette équation, α par $-\alpha_0$, supprimer le terme en $\frac{gl}{K^2}$ du coefficient de $\alpha_0 + \alpha$; et l'on obtient, en désignant par α_1 la demi-amplitude ascendante, ou la racine cherchée prise en valeur absolue,

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{4}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0^2;$$

on a de même pour les demi-amplitudes suivantes, α_1, $\alpha_2 \ldots$,

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{4}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_1^2 = \alpha_0 - 2\frac{4}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0^2,$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \frac{4}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_2^2 = \alpha_0 - 3\frac{4}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0^2;$$

. . . .

de sorte que les demi-amplitudes décroissent sensiblement en progression géométrique.

Le produit des racines de l'équation (2) étant

$$\frac{\alpha_0 - \frac{4}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0^2}{\frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0^2},$$

en le divisant par $-\alpha_1$, on obtient pour l'autre racine

$$\frac{-1}{\frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}},$$

et V se met par suite sous la forme

$$V = \sqrt{gl(\alpha_0+\alpha)(\alpha+\alpha_1)\left(\frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha+1\right)} = \mp\frac{l\,d\alpha}{dt},$$

d'où

$$dt = \mp\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\left(1+\frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha\right)^{-\frac{1}{2}}d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha+\alpha_1)}} = \mp\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{\left(1-\frac{1}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha\right)d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0-\alpha)(\alpha+\alpha_0)}},$$

et

$$t = \mp\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0-\alpha)(\alpha_0+\alpha_1)}}\\ \displaystyle-\frac{1}{3}\frac{gl}{K^2}\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{\alpha\,d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0-\alpha)(\alpha_0+\alpha_1)}}\end{array}\right\}.$$

Or

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0-\alpha)(\alpha+\alpha_1)}}$$

$$= \text{arc sin}\frac{\alpha-\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha)}{\sqrt{\alpha_0\alpha_1+\left(\frac{\alpha_0-\alpha_1}{2}\right)^2}} - \text{arc sin}\frac{\alpha_0+\alpha_1}{\sqrt{\alpha_0\alpha_1+\left(\frac{\alpha_0-\alpha_1}{2}\right)^2}},$$

on peut négliger $\left(\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}\right)$ devant $\alpha_0 \alpha_1$, et de plus on a avec la même approximation

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_0 \alpha_1}} = \frac{1}{\alpha_0}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{gl}{K^2}\,{}_0\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0}{\alpha_0};$$

on peut donc prendre

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)}}$$

$$= -\operatorname{arc\,sin}\left[\frac{\alpha}{\alpha_0}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0\right) - \frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0\right] - \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\alpha\,d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)}} = -\frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d[-\alpha^2 + (\alpha_0 - \alpha_1)\alpha + \alpha_1\alpha_0]}{\sqrt{-\alpha^2 + (\alpha_0 - \alpha_1)\alpha + \alpha_1\alpha_0}}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\alpha_0 - \alpha_1\right)\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)}};$$

mais comme cette expression se trouve multipliée par $\frac{gl}{K^2}$, il convient de négliger l'intégrale du second membre et de poser

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)}} = -\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha + \alpha_1)}.$$

Il vient donc pour l'expression du temps

$$(3)\quad t = \sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin}\left[\frac{\alpha}{\alpha_0}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0\right) - \frac{2}{3}\frac{gl}{K_2}\alpha_0\right] \\ -\frac{1}{3}\frac{gl}{K^2}\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha + \alpha_1)} \end{array}\right\}.$$

En y supposant $\alpha = 0$, on a pour la durée de la première oscillation descendante

$$\theta = \sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{2}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0 - \frac{1}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0\right)$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\frac{gl}{K^2}\alpha_0\right).$$

Pour avoir la durée de l'oscillation complète, on supposera $\alpha = -\alpha_0$ dans la formule (3), et l'on trouve, en négligeant le carré de $\frac{gl}{K^2}$, que cette durée est la même que dans le vide ou $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Il suit de là que la résistance de l'air augmente la durée de chaque demi-oscillation descendante, mais diminue de la même quantité la demi-oscillation ascendante suivante. De sorte que le nombre des oscillations exécutées dans un temps donné est, en raison du mode d'approximation adopté, très-sensiblement le même que dans le vide (*).

SOLUTION DE LA QUESTION 432 (PAINVIN)

(voir t. XVII, p. 185);

PAR M. G.-F. BAEHR,
Professeur à Groningue.

Soit

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = \delta,$$

$$a_n - a_1 = (n-1)\,\delta,$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = s_n,$$

(*) M. Somof a fait un travail très-instructif sur les très-petites oscillations d'un système de points matériels (*Mémoires de l'Académie de Saint-Petersbourg*, t. I, n° 14; 1859). Il y démontre, contre Lagrange et Laplace, l'existence de racines égales, dans l'équation fondamentale de cette théorie, existence seulement énoncée par Cauchy. TM.

et considérons le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & . & a_{n-1} & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & . & a_n & a_1 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & . & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_n & a_1 & a_2 & . & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

On aura, en écrivant les colonnes dans un ordre inverse,

$$D = \pm \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_n & a_{n-1} & . & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_n & . & a_5 & a_4 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & . & a_1 & a_n & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & . & a_2 & a_1 & a_n \end{vmatrix}.$$

$+$ si n est de la forme $4p$ ou $4p+1$,
$-$ si n est de la forme $4p+2$ ou $4p+3$,

parce que dans le premier cas on a échangé un nombre pair $(2p)$ de fois deux colonnes entre elles, tandis que dans le deuxième cas cela a eu lieu un nombre impair $(2p+1)$ de fois, la colonne du milieu, si n est impair, restant à sa place.

Si dans ce dernier déterminant on ôte les éléments de la deuxième colonne de ceux de la première, les éléments de la troisième de ceux de la deuxième, et ainsi de suite, il viendra (*)

$$D = \pm \begin{vmatrix} \delta & \delta & \delta & . & \delta & \delta & a_1 \\ -(n-1)\delta & \delta & \delta & . & \delta & \delta & a_2 \\ \delta & -(n-1)\delta & \delta & . & \delta & \delta & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta & \delta & \delta & . & -(n-1)\delta & \delta & a_{n-1} \\ \delta & \delta & \delta & . & \delta & -(n-1)\delta & a_n \end{vmatrix}$$

(*) Tome XIII, page 73.

puis ajoutant aux éléments de la première ligne la somm des éléments pris en colonnes des lignes suivantes correspondantes, on a

$$D = \pm \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ -(n-1)\delta & \delta & \delta & . & \delta & \delta \\ \delta & -(n-1)\delta & \delta & . & \delta & \delta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta & \delta & \delta & . & -(n-1)\delta & \delta \\ \delta & \delta & \delta & . & \delta & -(n-1)\delta \end{vmatrix}$$

$$= \pm(-1)^{n-1} s_n \begin{vmatrix} -(n-1)\delta & \delta & \delta & . & \delta & \delta \\ \delta & -(n-1)\delta & \delta & . & \delta & \delta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta & \delta & \delta & . & -(n-1)\delta & \delta \\ \delta & \delta & \delta & . & \delta & -(n- \end{vmatrix}$$

ou bien (*)

$$D = \pm(-1)^{n-1} s_n \delta^{n-1}$$

$$\times \begin{vmatrix} -(n-1) & 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ 1 & -(n-1) & 1 & . & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & . & -(n-1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

ou ajoutant encore une fois aux éléments de la première ligne tous ceux pris en colonnes des lignes suivantes, et ensuite, les éléments de la première ligne à ceux de chacune des lignes suivantes en particulier, on obtient suc-

(*) Il n'y a plus que $n-1$ colonnes.

cessivement

$$D = \pm(-1)^{n-1} s_n \delta^{n-1}$$

$$\times \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & . & -1 & -1 \\ 1 & -(n-1) & 1 & . & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & . & -(n-1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . & 1 & -(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= \pm(-1)^{n-1} s_n \delta^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & . & -1 & -1 \\ 0 & -n & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & . & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & . & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & -n \end{vmatrix}$$

ce qui se réduit à

$$D = \pm(-1)^n s_n \delta^{n-1} \begin{vmatrix} -n & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & -n & . & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & . & -n & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & -n \end{vmatrix}$$

$$= \pm(-1)^n s_n \delta^{n-1} (-n)^{n-2} = \pm \delta^{n-1} n^{n-2} s_n.$$

Faisant

$$a_1 = 1, \quad \delta = 1,$$

on a

$$D = \pm n^{n-2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \pm \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

C. Q. F. D.

Soit la progression géométrique

$$a, \ ar, \ ar^2, \ldots, \ ar^{n-1},$$

on aura

$$
D = \begin{vmatrix}
a & ar & ar^2 & . & ar^{n-3} & ar^{n-2} & ar^{n-1} \\
ar & ar^2 & ar^3 & . & ar^{n-2} & ar^{n-1} & a \\
ar^2 & ar^3 & ar^4 & . & ar^{n-1} & a & ar \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
ar^{n-2} & ar^{n-1} & a & . & ar^{n-5} & ar^{n-4} & ar^{n-3} \\
ar^{n-1} & a & ar & . & ar^{n-4} & ar^{n-3} & ar^{n-2}
\end{vmatrix} = \pm a^n (r^n - 1)^{n-1}
$$

$+$ si n est de la forme $4p$ ou $4p+1$,
$-$ si n est de la forme $4p+2$ ou $4p+3$.

Car en intervertissant l'ordre des colonnes, et faisant n fois sortir en dehors du déterminant le facteur a, qui est commun aux éléments de toutes les colonnes, on a

$$
D = \pm a^n \begin{vmatrix}
r^{n-1} & r^{n-2} & r^{n-3} & . & r^2 & r & 1 \\
1 & r^{n-1} & r^{n-2} & . & r^3 & r^2 & r \\
r & 1 & r^{n-1} & . & r^4 & r^3 & r^2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
r^{n-3} & r^{n-4} & r^{n-5} & . & 1 & r^{n-2} & r^{n-2} \\
r^{n-2} & r^{n-3} & r^{n-4} & . & r & 1 & r^{n-1}
\end{vmatrix}
$$

ou, multipliant les éléments de la première ligne par r et ôtant des produits les éléments correspondants de la deuxième, puis multipliant de même les éléments de la deuxième par r et ôtant des produits les éléments de la troisième, et ainsi de suite,

$$
D = \pm \frac{a^n}{r^{n-2}} \begin{vmatrix}
(r^n - 1) & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\
0 & (r^n - 1) & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & (r^n - 1) & . & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & . & 0 & r^{n-2} & 0 \\
r^{n-2} & r^{n-3} & r^{n-4} & . & r & 1 & r^{n-1}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \pm \frac{a^n}{r^{n-1}} (r^n - 1)^{n-1} \, r^{n-1} = \pm a^n (r^n - 1)^{n-1}.
$$

MÉMOIRE SUR LES POLAIRES INCLINÉES

(voir t. XVIII, p. 322) ;

PAR M. DEWULF.

XIV. Reprenons les équations du § X qui nous donnent les n^2 points fixes du faisceau φ^n des polaires inclinées d'un point $\alpha\beta$ par rapport à un faisceau F^n, et dans ces équations remplaçons β par $A\alpha + B$, nous aurons

$$(A\alpha + B - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0,$$

$$(A\alpha + B - y)\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right) = 0.$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{gathered}\alpha\left[A\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + \frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right]\\ + (B - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - x\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\alpha\left[A\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) + \frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right]\\ + (B - y)\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) - x\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right) = 0.\end{gathered}$$

En éliminant α entre ces deux équations, nous aurons le lieu décrit par les n^2 points fixes du φ^n quand le point $(\alpha\beta)$ décrit la droite

$$y = Ax + B.$$

Cette élimination nous conduit à l'équation (5). Donc

Quand un point P *décrit une droite* L, *les* n² *points fixes du faisceau* φ^n *de ses polaires inclinées par rapport à un faisceau* F^n *décrivent le même lieu que les* n (n — 1) *points polaires de* L *par rapport à l'une des courbes du faisceau* F^n *quand cette courbe tourne autour des* n² *points fixes du faisceau.*

Remarque. Ces théorèmes renferment comme cas particuliers les beaux théorèmes que Bobillier a démontrés sur les polaires ordinaires au tome XVIII des *Annales* de Gergonne, p. 89 à 98; 1827.

XV. Je reprends l'équation générale de la polaire inclinée d'un point $(\alpha\beta)$ par rapport à une courbe C^n représentée par l'équation

$$(1) \qquad F(x, y) = 0.$$

Soit

$$(2) \quad (\beta - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0$$

cette équation

Supposons que le point (α, β) décrive la courbe

$$(3) \qquad f(x, y) = 0.$$

Nous aurons la relation

$$(4) \qquad f(\alpha, \beta) = 0.$$

Cherchons l'enveloppe des premières polaires inclinées du point (α, β) par rapport à C_n quand ce point décrit la courbe (3).

Pour cela, différentions les équations (1) et (4) par rapport à α et à β, nous trouverons ainsi

$$\frac{df}{a\alpha} + \frac{df}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

et

$$\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) + \left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right)\frac{d\beta}{d\alpha} = 0;$$

d'où, par l'élimination de α et β,

$$(5) \qquad \frac{df}{d\alpha}\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) = \frac{df}{d\beta}\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right).$$

Éliminant maintenant α et β entre les équations (1), (4) et (5), nous aurons l'équation de l'enveloppe cherchée.

Soient x' et y' un point de la courbe (3); la tangente à cette courbe en ce point a pour équation

$$(x - x')\frac{df}{dx'} + (y - y')\frac{df}{dy'} = 0.$$

Cherchons le lieu décrit par les $n(n-1)$ points polaires inclinés de cette droite par rapport à la courbe C^n, quand le point $x'y'$ décrit la courbe (3).

Reprenons pour cela les équations (3) et (4) du paragraphe XI :

$$A\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + \frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy} = 0,$$

$$(B - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - x\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) = 0.$$

Ces équations donnent les $n(n-1)$ points polaires inclinés d'une droite

$$y = Ax + B.$$

Faisons

$$A = -\frac{\dfrac{df}{dx'}}{\dfrac{df}{dy'}}, \quad B = y' + x'\frac{\dfrac{df}{dx'}}{\dfrac{df}{dy'}}.$$

Il viendra

$$(6)\qquad \frac{dF}{dx'}\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)=\frac{df}{dy'}\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right),$$

$$(7)\qquad (y'-y)\left(\frac{dF}{dy}+k\frac{dF}{dx}\right)+(x'-x)\left(\frac{dF}{dx}-k\frac{dF}{dy}\right)=0.$$

Il suffit, pour avoir le lieu cherché, d'éliminer $x'y'$ entre les équations (6), (7) et l'équation (8)

$$(8)\qquad f(x',y')=0.$$

Or ces équations ne diffèrent pas des équations (5), (1), (4).

De là ce théorème :

L'enveloppe des premières polaires inclinées des points d'une courbe par rapport à une certaine directrice est la même que le lieu des points polaires inclinés des tangentes à cette courbe par rapport à la même directrice.

Ce théorème donne comme cas particulier le célèbre théorème de Poncelet, polaires réciproques.

XVI. Supposons que la courbe C^n ait un point multiple de l'ordre p. Les coordonnées (x, y) de ce point satisfont aux $\frac{p(p+1)}{2}$ équations

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} & F(x,y)=0, & & \\ \frac{dF}{dx}=0, & \frac{dF}{dy}=0, & & \\ \frac{d^2F}{dx^2}=0, & \frac{d^2F}{dx\,dy}=0, & \frac{d^2F}{dy^2}=0, & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d^{p-1}F}{dx^{p-1}}=0, & \frac{d^{p-1}F}{dx^{p-2}\,dy}=0, & \frac{d^{p-1}F}{dx^{p-3}\,dy^2}=0,\ldots, & \frac{d^{p-1}F}{dy^{p-1}}=0, \end{array}\right.$$

et les p valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont données par l'équation

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^p F}{dx^p} + p\,\dfrac{d^p F}{dx^{p-1}\,dy}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + \dfrac{p(p-1)}{1.2}\,\dfrac{d^p F}{dx^{p-2}\,dy^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \ldots \\ \qquad \ldots + \dfrac{d^p F}{dy^p}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^p = 0. \end{array}\right.$$

La première polaire inclinée de l'origine par rapport à C^n est identiquement satisfaite par les coordonnées x et y :

$$\psi(x, y) = \frac{dF}{dx}(x + ky) + \frac{dF}{dy}(y - kx) = 0.$$

Il est facile de voir que les dérivées successives de ψ jusqu'à celle de l'ordre $(p-1)$ sont nulles pour les coordonnées x et y du point multiple. Par conséquent : *Tout point multiple de l'ordre* p *de* C^n *est multiple de l'ordre* p — 1 *sur une première polaire inclinée quelconque d'un point quelconque du plan de* C^n.

Les coefficients angulaires des $p-1$ tangentes sont donnés par l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{d^p F}{dx^p}(x + ky) + \frac{d^p F}{dy\,dx^{p-1}}(y - kx) \\ &+ (p-1)\left[\frac{d^p F}{dy\;dx^{p-1}}(x + ky) + \frac{d^p F}{dy^2\,dx^{p-2}}(y - kx)\right]\left(\frac{dy}{dx}\right) \\ &+ \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\left[\frac{d^p F}{dy^2\,dx^{p-2}}(x + ky) + \frac{d^p F}{dy^3\,dx^{p-3}}(y - kx)\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \left[\frac{d^p F}{dy^{p-1}\,dx}(x + ky) + \frac{d^p F}{dy^p}(y - kx)\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^{p-2} = 0. \end{aligned}$$

La deuxième polaire inclinée d'un point par rapport à une courbe, jouissant, par rapport à la première, des propriétés dont celle-ci jouit par rapport à la courbe, il est clair que

Tout point multiple de l'ordre p *de* C^n *est multiple de l'ordre* p — 2 *sur* C^n_2, *la seconde polaire inclinée.*

De même :

Tout point multiple de l'ordre p *de* C^n *est multiple de l'ordre* p — k *sur la polaire inclinée* C^n_k *de l'ordre* k. En d'autres termes, les premières polaires inclinées seules passent par les points doubles de C^n et elles n'y passent qu'une fois.

Les premières et les secondes polaires inclinées passent seules par les points triples ; les premières y passent deux fois, les secondes une fois.

Et ainsi de suite.

XVII. Nous avons vu au § X que les premières polaires inclinées d'un point par rapport à un faisceau F^n forment un faisceau homographique φ^n_1.

Il est évident que les deuxièmes polaires d'un point quelconque forment aussi un faisceau homographique aux deux précédents, et que les polaires inclinées d'ordre k forment un faisceau homographique φ^n_k. Nous pouvons dire plus généralement que le faisceau φ^n_p des polaires inclinées d'ordre p dont le coefficient est k, d'un certain point, correspond anharmoniquement au faisceau φ^n_q des polaires inclinées, d'ordre q, dont le coefficient est k_1 d'un autre point quelconque.

SOLUTION DE LA QUESTION 515

(voir p. 95);

PAR UN PROFESSEUR.

L'énoncé doit être rectifié comme il suit :

Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 \ldots \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \ldots \alpha_n \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n \ldots \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

dans lequel les indices supérieurs sont des exposants, est égal au produit

$$P = \alpha_1 x_2 \ldots \alpha_n (\alpha_n - \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-2}) \ldots (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-3}) \ldots (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Ce théorème, ordinairement attribué à Vandermonde (*), est démontré de deux manières dans le savant Traité de M. Brioschi (p. 90 de la traduction française). La démonstration suivante, due, je crois, à Cauchy et qui ne suppose que les premières propriétés des déterminants, paraîtra plus simple.

Il est d'abord évident que tous les termes de Δ sont divisibles par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Ensuite si l'on suppose $\alpha_2 = \alpha_1$, Δ s'annule, puisque

(*) Vandermonde (A. S, 1771, p. 369) décompose en facteur un polynôme qui peut être considéré comme un déterminant du 3e ordre : mais rien n'indique qu'il ait eu en vue le théorème général, ni même qu'il ait considéré ce polynôme comme un déterminant.

deux colonnes du déterminant deviennent identiques. Donc Δ est divisible par $\alpha_2 - \alpha_1$. On verra de même que Δ est divisible par toutes les différences des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ prises deux à deux.

Donc Δ est divisible par P, et puisque Δ et P sont évidemment du même degré, ils ne peuvent différer que par une constante. Mais le terme $\alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3^3 \ldots \alpha_n^n$ a le même signe dans Δ et dans P. Donc $\Delta = P$. C. Q. F. D.

Il résulte de ce théorème que le produit P représente symboliquement le déterminant Δ quand les exposants se changent en indices.

Note sur la question 516.

Elle a déjà été résolue t. XVII, p. 331.

SUR LA THÉORIE DES PLANS DIAMÉTRAUX

Dans les surfaces du second ordre;

PAR M. ABEL TRANSON.

Deux théories relatives aux plans diamétraux sont à peu près également répandues dans l'enseignement. L'une d'elles est sujette à des difficultés capables, ainsi que j'en ai l'expérience, d'embarrasser dans un examen les meilleurs élèves. C'est ce qui me décide à publier la présente Note.

Soient a, b, c les coordonnées du milieu de l'une des cordes parallèles à une direction donnée. Si l'on transporte l'origine en ce point, et qu'entre l'équation transformée de la surface et les équations d'une corde menée par cette nouvelle origine on élimine deux des variables, x et y par exemple, l'équation résultante du second degré en z devra manquer du terme du premier degré. En exprimant cette condition, on obtient une relation entre a, b, c qui n'est autre chose que l'équation du lieu cherché.

Cela est simple; mais voici les difficultés : la surface peut être de telle nature, que les cordes menées dans certaines directions ne la rencontrent qu'en un seul point, parce que la seconde rencontre passe à l'infini. Alors il ne semble pas qu'on puisse proposer la recherche d'un lieu diamétral; car s'il existe, ne doit-il pas se trouver tout entier à l'infini? Cependant le résultat de la méthode subsiste encore, et c'est encore un plan situé à une distance finie! Quelle est donc la signification géométrique d'un tel plan, et surtout quelle lumière pouvons-nous espérer à ce sujet d'une méthode qui, dans la circonstance actuelle, nous a fait transporter l'origine successivement dans une suite de points qui n'existent pas, ou au moins qui sont à l'infini?...

C'est pourquoi je trouve préférable la méthode donnée par Leroy dans son *Analyse appliquée à la Géométrie*, p. 81. Voici ce qu'il en est :

L'élimination de x et de y entre les équations générales de la corde mobile et l'équation de la surface donne une équation en z de la forme suivante

$$(1) \qquad Rz^2 + Sz + T = 0.$$

L'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée du premier membre de (1), c'est-à-dire l'équation

$$(2) \qquad 2Rz + S = 0,$$

donnera la coordonnée z du milieu de la corde; et ensuite l'élimination des paramètres variables entre cette équation (2) et les équations de la corde mobile donnera le lieu cherché. D'ailleurs, on peut éviter toute élimination, et obtenir immédiatement le résultat cherché en considérant, dans l'équation de la surface

$$F(x, y, z) = 0,$$

x et y comme étant des fonctions de z déterminées par les équations générales de la corde, et en égalant à zéro la dérivée de $F(x, y, z)$ calculée à ce point de vue.

On voit combien cette méthode est élégante; mais de plus elle éclaircit parfaitement la difficulté que nous avons soulevée. Car dans la circonstance où les cordes dont on cherche les milieux ont une rencontre à l'infini, R est nul; et, par conséquent, l'équation (2) se réduit à $S = 0$; cela veut dire qu'on a écrit la condition pour que l'équation (1) ait sa seconde racine infinie comme la première. Donc le plan qu'on trouve en ce cas est *le lieu des points par où doivent passer des sécantes parallèles à la direction donnée pour que leurs rencontres avec la surface soient toutes les deux à l'infini.*

Et si l'on demande pourquoi un lieu ainsi défini se trouve, par son équation même, faire partie des plans diamétraux, ne pourra-t-on pas répondre que chaque point d'un tel plan est effectivement le milieu d'une corde dont les extrémités sont de part et d'autre infiniment distantes.

THÉORÈMES SUR LA SURFACE DES ONDES (*);

Par M. STREBOR.

Les deux théorèmes suivants semblent établir une espèce de réciprocité entre la surface des ondes (de Fresnel) et l'ellipsoïde.

(*) A démontrer.

1°. Si l'on décrit autour des rayons vecteurs partant du centre d'un ellipsoïde, des cylindres circulaires droits, les rayons des cercles étant les inverses des rayons de l'ellipsoïde, la surface, enveloppe de tous ces cylindres, sera une surface des ondes.

2°. Si l'on décrit autour des rayons vecteurs partant du centre d'une surface des ondes, des surfaces circulaires droites, les rayons des cercles étant les inverses des rayons de la surface des ondes, la surface, enveloppe de tous ces cylindres, sera un ellipsoïde.

NOTE SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. STREBOR.

Considérons deux courbes, dont l'une est le lieu des projections orthogonales du centre d'une ellipse sur ses tangentes, et l'autre l'enveloppe des perpendiculaires aux diamètres, menées par leurs extrémités. Soient P, P′ deux points sur ces courbes, qui répondent au même point sur l'ellipse. Désignons par C le centre, par a, b les demi-axes de l'ellipse, et par ω, φ les angles que font avec a les droites CP, CP′. Alors on aura

$$\frac{d\omega}{\sqrt{b^6(2a^2-b^2)\cos^2\omega+a^6(2b^2-a^2)\sin^2\omega}}$$
$$=\frac{d\varphi}{\sqrt{b^2(2a^2-b^2)^3\cos^2\varphi+a^2(2b^2-a^2)^3\sin^2\varphi}}.$$

Cette relation, remarquable à cause de sa symétrie, comporte le théorème célèbre de Jacobi sur les fonctions elliptiques de première espèce pour le cas particulier de

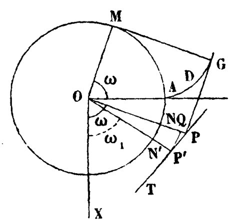
$p = 3$. Il est beaucoup à désirer qu'on la démontre par la Géométrie, ou bien au moins par des considérations mixtes de la Géométrie et de l'Analyse.

SOLUTION DE LA QUESTION 438 (MANNHEIM)

(voir t. XVII, p. 186);

PAR M. MARIUS LAQUIÈRE.

Démontrer que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre O d'une circonférence sur les tangentes à la développante D de cette circonférence est une spirale d'Archimède.



Soit A l'origine des arcs sur le cercle, M le point de contact d'une tangente, G le point de la développante situé sur cette tangente; on a

$$MG = R\omega,$$

en appelant R le rayon du cercle et Q l'angle MOA. Or le cercle étant la développée de la courbe G, MG est la normale en G à la développante; donc la tangente GP est parallèle à OM. Par suite si je prends un axe polaire OX perpendiculaire au diamètre OA, P étant la projection du centre sur GP, l'angle POX sera égal à ω, et l'équation du lieu des points **P** sera

$$\rho = \mathrm{R}\omega,$$

puisque dans le rectangle OPGM

$$\rho = \mathrm{OP} = \mathrm{MG} = \mathrm{R}\omega.$$

Le lieu est donc une spirale d'Archimède.

Remarque. On peut facilement reconnaître la propriété remarquable de la tangente à la spirale. Soient P, P′ deux points de la courbe très-voisins. Soit P′ Q un arc de cercle décrit de O comme centre; en négligeant un infiniment petit du troisième ordre, le point Q est le pied de la perpendiculaire abaissée du point P′ sur PO; et par conséquent le rapport

$$\operatorname{tang}\widehat{\mathrm{OPT}} = \frac{\mathrm{P'Q}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\mathrm{P'Q}}{\mathrm{NN'}} = \frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{R}} = \omega$$

est approché à un infiniment petit du second ordre. Passant à la limite, on a donc rigoureusement

$$\operatorname{tang}\mathrm{V} = \omega$$

pour l'angle de la tangente et du rayon vecteur.

Note du Rédacteur. Le cercle est une spirale où $\mathrm{V} = 90°$. La droite est un cercle à rayon infini et l'hélice une spirale à double courbure; de là résultent trois lignes, et les seules possibles, jouissant de la propriété que les portions de mêmes longueurs peuvent se superposer, propriété connue des Anciens. La spirale plane est exclue, parce que les rayons de courbure y varient de grandeur.

Théorème de M. Dupain, professeur.

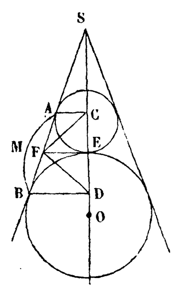
Si une conique à *centre* tourne de 90 degrés autour de ce centre, la somme des carrés des perpendiculaires abaissées des foyers de l'une des coniques sur une tangente de l'autre est constamment égale au demi-carré du grand axe.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 485

(voir page 13);

PAR M. TH. DE CHARODON.

Il s'agit de prouver que le volume engendré par l'espace AEB est égal à la moitié du volume compris entre le cône et la sphère qui passe par les cercles de contact des deux sphères inscrites O et C et du cône.



Par le point de tangence E des deux sphères, je mène une tangente EF commune aux deux cercles. D'après le théorème I (t. XVII, p. 357, question 483), le volume engendré par le triangle mixtiligne AFE tournant autour de SD est égal au volume engendré par le triangle CFE. D'après le même théorème, le volume engendré par le triangle mixtiligne EFB est égal au volume engendré par FED.

On a donc

$$\text{vol. AEB} = \text{vol. CFE} + \text{vol. EFD} = \frac{1}{3}\pi\overline{\text{FE}}^2(\text{CE} + \text{ED})$$

$$= \frac{1}{3}\pi\overline{\text{FE}}^2.\text{CD}.$$

Le volume compris entre le cône et la sphère qui passe par les deux cercles de contact AC, BD est égal au volume engendré par le segment AMB de cette dernière sphère; or ce volume est égal à $\frac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{CD}$.

Il s'agit donc de démontrer que

$$\frac{2}{3}\pi\overline{\text{FE}}^2.\text{CD} = \frac{1}{6}\pi\overline{\text{AB}}^2.\text{CD}$$

ou que

$$4\overline{\text{FE}}^2 = \overline{\text{AB}}^2, \quad 2\,\text{FE} = \text{AB},$$

ce qui est évident. Donc, etc.

TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES

(voir t. XVIII, p. 381);

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

APPLICATIONS.

I. *Relation entre des points situés sur une même droite.*

Si l'on a entre des points a', b', c', d', etc., *situés sur une même droite une relation homogène*

$$F(a'\,b', c'\,d', \ldots) = 0,$$

on aura entre les points correspondants a, b, c, d *de la figure homographique la relation*

$$F\left(\frac{ab}{\alpha.\beta}, \frac{cd}{\gamma.\delta}, \ldots\right) = 0,$$

les lettres grecques désignant les distances des points a, b, c, etc., *a une droite fixe* I.

Car, d'après la formule (1), les valeurs de R et de sin $(c, 1)$ restent les mêmes dans l'expression de chacun des segments $a' b'$, $c' d'$, etc. Au moyen des différentes formules indiquées (9), on pourra mettre la relation précédente sous d'autres formes.

1°. Des points $a', b', c', \ldots, e', f'$ se succédant sur une droite d'une manière quelconque

$$a' b' + b' c' \ldots e' f' = a' f'$$

dans la figure homographique, on aura

$$\frac{ab}{\alpha.6} + \frac{bc}{\beta \gamma} \ldots \frac{ef}{\varepsilon.\varphi} = \frac{af}{\alpha.\varphi}.$$

2°. Deux cercles de centre o' et o'_1 se touchant en un point a', on a

$$o' a' + a' o'_1 = o' o'_1.$$

La figure homographique donne ce théorème :

Lorsque deux coniques se touchent en un point a, *elles se coupent en deux autres points* p *et* p_1, *réels ou imaginaires; si l'on prend les pôles* o *et* o_1 *de la droite* pp_1 *dans les deux coniques, la droite* oo_1 *passera par le point* a, *et si l'on appelle* ω, ω_1, α *les distances des points* o, o_1, a *à la droite* pp_1, *on aura*

$$oa.\omega_1 + ao_1.\omega = oo_1.a.$$

Ce théorème est susceptible de plusieurs corollaires.

II. *Relation entre des segments situés sur des droites parallèles.*

La formule (3), dans laquelle R restera constant, montre que :

Si l'on a une relation homogène

$$F(a'b',\, c'd' \ldots) = 0$$

entre des segments a'b', c'd',... *situés sur des droites parallèles, on aura dans la figure homographique la relation*

$$F\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta},\, \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta} \ldots\right) = 0,$$

dans laquelle α, β, γ, δ *sont les distances des points correspondants* a, b, c, d *à une droite fixe* I.

1° Dans un parallélogramme $a'b'c'd'$ les côtés opposés tels que $a'b'$ et $c'd'$ sont égaux. De là : *Étant donné un quadrilatère* abcd, *si l'on désigne par* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *les distances de ses sommets à la diagonale extérieure, on a*

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta}.$$

2°. Si l'on coupe deux droites parallèles A', B' par des droites issues d'un point arbitraire, en des points a', b', c', d', ..., a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, ..., on a la relation

$$\frac{a'b'}{a'_1 b'_1} = \frac{b'c'}{b'_1 c'_1} = \frac{c'd'}{c'_1 d'_1} = \ldots$$

Dans la figure homographique nous avons deux droites A et B se coupant sur une droite I, et un faisceau de droites rencontrant les premières aux points $abc \ldots a_1 b_1 c_1$, etc., et si l'on appelle $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ les distances de ces points à la droite I, on a

$$\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\beta_1}}=\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{\gamma_1}}=\ldots$$

3°. Considérons deux polygones ayant leurs côtés $a'b'$, $a'_1 b'_1$, $b'c'$, $b'_1 c'_1$, etc., respectivement parallèles; on a

$$\frac{a'\,b'}{a'_1\,b'_1}=\frac{b'\,c'}{b'_1\,c'_1}=\text{constante.}$$

La figure homographique donne deux polygones dont les côtés vont se couper deux à deux sur une droite I; donc *Étant donnés deux polygones homologiques, si l'on appelle* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, *les distances des sommets correspondants à l'axe d'homologie,*

$$\frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\beta_1}}=\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\gamma_1}}\ldots=\text{constante.}$$

III. *Relation entre des points situés sur une conique.*

Si l'on considère une corde $a'b'$ d'un cercle, sa longueur est donnée généralement [formule (2)] par la relation

$$a'b'=\sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}}{pp_1}\,\frac{ab\sqrt{\pi.\pi_1}}{\alpha.\beta}}\quad \text{(t. XVIII, p. 383);}$$

ab sera la corde d'une conique correspondant au cercle donné, α, β les distances des points a et b à la droite pp_1 qui correspond à l'infini de la première figure, π et π_1 sont la distance des points p et p_1 de la conique au segment ab.

Soient P et A les diamètres de la conique parallèles aux droites pp_1 et ab, d'après une propriété bien connue (que nous démontrerons plus loin)

$$\frac{\pi . \pi_1}{\alpha . \beta} = \frac{P^2}{A^2},$$

la formule ci-dessus devient

$$a' b' = \sqrt{\frac{2m\sqrt{-1}\,P^2}{pp_1}} \cdot \frac{ab}{A\sqrt{\alpha\beta}};$$

nous déduirons de là que : *Si l'on a entre des points situés sur un cercle la relation homogène*

$$F(a'b', c'd', \ldots) = 0,$$

on aura entre les points de la conique correspondante la relation

$$F\left(\frac{ab}{A\sqrt{\alpha . \beta}}, \frac{cd}{B\sqrt{\gamma . \delta}}, \ldots\right) = 0,$$

dans laquelle A, B, ... *sont les diamètres de la conique parallèles aux cordes* ab, cd, ..., α, β, γ, δ, ... *les distances de leurs extrémités à une droite fixe* I.

Si l'on suppose que cette droite fixe est à l'infini, on a simplement

$$F\left(\frac{ab}{A}, \frac{cd}{B}, \ldots\right) = 0$$

pour relation correspondante.

1°. Lorsque deux cercles sont concentriques, la corde $a'b'$ de l'un, tangente à l'autre, est de longueur constante. De là : *Lorsque deux coniques ont un double contact suivant une droite* I, *si l'on mène à l'une une tangente et que l'on appelle* ab *la portion de cette tangente comprise dans l'autre, et* A *le diamètre de celle-*

ci parallèle à la tangente

$$\frac{ab}{A\sqrt{\alpha.\beta}} = \text{constante},$$

α et β étant les distances des points a *et* b *à la droite* I.

Si la seconde conique est un cercle dont A est le diamètre, on a

$$\frac{ab}{\sqrt{\alpha.\beta}} = \text{constante}.$$

Si les deux coniques sont homothétiques,

$$\frac{ab}{A} = \text{constante}.$$

2°. Lorsqu'un quadrilatère $a'b'c'd'$ est inscrit dans un cercle

$$a'b'.c'd' + b'c'.d'a' = a'c'.b'd'.$$

Comme correspondant à ce théorème, on trouve celui-ci : *Un quadrilatère* abcd *étant inscrit dans une conique, si l'on appelle* A, B, C, D, E, F *les diamètres de la conique parallèles aux côtés, pris successivement, et aux diagonales, on a la relation*

$$\frac{ab.cd}{A.C} + \frac{bc.da}{B.D} = \frac{ac.bd}{E.F}.$$

3°. Si l'on joint un point arbitraire m' d'un cercle aux extrémités a' et b' d'un diamètre

$$\overline{ma}^2 + \overline{mb}^2 = \overline{ab}^2.$$

D'où ce théorème : *Étant donnés une droite* I *et son pôle* o, *relativement à une conique, menons par ce point une droite arbitraire rencontrant la conique aux points* a *et* b; m *étant un point de la conique,* A, B, C *ses* *diamètres parallèles aux droites* ab, ma, mb, *et enfin* α, β, μ *les distances des points* a, b, m *à la droite* I, *on a la relation*

$$\frac{\overline{am}^2}{B^2}\cdot\beta + \frac{\overline{bm}^2}{C^2}\cdot\alpha = \frac{\overline{ab}^2}{A^2}\cdot\mu.$$

Si la droite I est à l'infini, *ab* est un diamètre de la conique, et l'on a

$$\frac{\overline{am}^2}{B^2} + \frac{\overline{bm}^2}{C^2} = \frac{\overline{ab}^2}{A^2}.$$

(*La suite prochainement.*)

QUESTION.

522. Toutes les surfaces polaires d'un point d'une surface algébrique, prises par rapport à cette surface, ont en ce point même indicatrice; les rayons de courbure des sections faites par un plan issu de ce point dans la surface et ses diverses polaires, sont en ce point inversement proportionnels aux degrés des surfaces diminués d'une unité. (TH. MOUTARD.)

SOLUTION DE LA QUESTION 449 (M. STREBOR)

(voir t. XVII, p. 359);

PAR M. DEWULF ET M. MARTELLI (DE MILAN).

Soient

$$(1) \qquad ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

et

$$(2) \qquad t^6 + P_1 t^5 + P_2 t^4 + P_3 t^3 + P_4 t^2 + P_5 t + P_6 = 0,$$

l'équation aux carrés des différences des racines de cette équation.

Posons

$$t = \frac{1}{t_1},$$

et substituons dans l'équation (2), il vient

$$P_6 t_1^6 + P_5 t_1^5 + \ldots = 0,$$

et

$$\sum \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} = -\frac{P_5}{P_6}.$$

D'après la Note sur l'équation aux carrés des différences, insérée t. XVII, p. 268,

$$P_5 = -256 \times 1296 (\mu\varpi + \lambda)\mu$$

et

$$ac^2 - 4bd + 3c^2 = 12a^2\mu.$$

Donc, si

$$ae^2 - 4bd + 3c^2 = 0,$$

on a aussi

$$\mu = 0,$$

et par suite

$$P_5 = 0,$$

et

$$\sum \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} = 0.$$

D'ailleurs

$$M \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} + N(\mu\varpi + \lambda) = 0,$$

M, N étant des constantes.

Donc, si

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = 0,$$

on a

$$\mu\varpi + \lambda = 0,$$

et

$$P_5 = 0,$$

et par suite

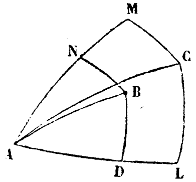
$$\sum \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} = 0.$$

PROPRIÉTÉS DES CONIQUES SPHÉRIQUES HOMOFOCALES;

Par M. VANNSON,
Professeur au lycée de Versailles.

Lemme. Étant donnés deux grands cercles AL, AM et

Fig. 1.



deux points B, C d'où l'on a abaissé les quatre arcs perpendiculaires BD, BM, CL, CM, si l'on accorde que leurs sinus soient proportionnels, les trois points A, B, C seront sur une circonférence de grand cercle; car supposons que AB et AC soient deux arcs distincts l'un de l'autre,

on aura

$$\frac{\sin BAD}{\sin BAN} = \frac{\sin CAL}{\sin CAM},$$

d'où

$$\frac{\sin BAD + \sin BAN}{\sin BAD - \sin BAN} = \frac{\sin CAL + \sin CAM}{\sin CAL - \sin CAM},$$

ou

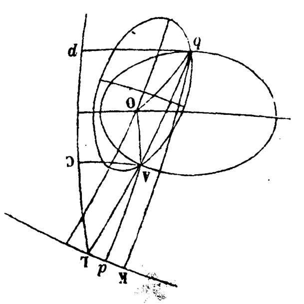
$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A}{2}}{\operatorname{tang}\left(\frac{BAD - BAN}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{A}{2}}{\operatorname{tang}\left(\frac{CAL - CAM}{2}\right)};$$

on conclura de là facilement que BAD = CAL. Donc les trois points A, B, C sont sur un même grand cercle.

THÉORÈME. *Si deux coniques sphériques ont un foyer commun et qu'elles se coupent en deux points, ces deux points seront sur un arc de grand cercle passant par l'intersection des directrices correspondantes au foyer commun; et si elles se coupent en quatre points, on pourra, par deux d'entre eux, mener un arc de grand cercle passant par l'intersection des directrices; il en sera de même des deux autres.*

Soient O le foyer commun et A, B deux points d'inter-

FIG. 2.



section, AC, AD, etc., deux perpendiculaires abaissées sur les directrices ; on a

$$\frac{\sin AC}{\sin bp} = \frac{\sin AO}{\sin bO}$$

et

$$\frac{\sin Ad}{\sin bK} = \frac{\sin AO}{\sin bO},$$

d'où

$$\frac{\sin Ad}{\sin bK} = \frac{\sin AC}{\sin bp};$$

donc les trois points b, A, L sont sur un grand cercle.

La même proposition peut aussi se démontrer par un calcul très-simple. En prenant le foyer commun pour origine, les deux coniques auront pour équations

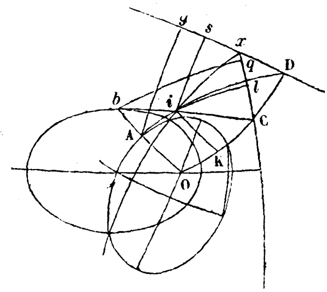
$$y^2 + x^2 = (my + nx + p)^2,$$
$$y^2 + x^2 = (m'y + n'x + p')^2.$$

Les coordonnées réelles ou imaginaires communes à ces équations vérifieront l'équation qui résulte de la soustraction membre à membre, laquelle donne deux circonférences de grands cercles passant au point où se coupent les deux directrices, ce qui démontre le théorème même pour le cas où il n'y a pas de points réels communs aux deux courbes.

Théorème. *Si deux coniques ont un foyer commun, que par ce point on mène un arc coupant les courbes en deux points* A, B, *qu'aux points* A *et* b *on mène deux tangentes, le lieu de leur point de rencontre sera une circonférence de grand cercle passant par la rencontre de directrices.*

Soient O le foyer commun, OCD une perpendiculaire sur Ob prolongée jusqu'à la rencontre des directrices aux points C et D, les arcs Cb et DA seront les tangentes aux points b et A ; abaissons les arcs il et is perpendiculaires

Fig. 3.



sur les directrices, et iK perpendiculaire sur OC, enfin bq et ag perpendiculaires sur les directrices. Nous aurons

$$\frac{\sin il}{\sin i\mathrm{K}} = \frac{\sin bq}{\sin b\mathrm{K}} = \alpha, \text{ rapport constant,}$$

et

$$\frac{\sin i\mathrm{K}}{\sin i\mathrm{S}} = \frac{\sin \mathrm{AO}}{\sin \mathrm{A}g} = \frac{1}{\alpha'}, \text{ rapport constant ;}$$

de là en multipliant

$$\frac{\sin il}{\sin i\mathrm{S}} = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Donc le lieu du point i est une circonférence de grand cercle passant au point x, intersection des bissectrices, et aussi par les deux points communs aux deux courbes.

Problème. *Trouver l'équation générale des courbes du second degré passant par quatre points* ADCD *et le lieu de leurs centres.*

La première partie se traite comme pour les courbes planes, et l'on trouve, en prenant pour axe des x l'arc qui passe par deux des points A, B et CD pour axe des y,

$$(1)\quad \left(\frac{y}{6}-1\right)\left(\frac{y}{6'}-1\right)+\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)\left(\frac{x}{\alpha'}-1\right)+2Bxy=1,$$

B est une indéterminée; $\alpha\alpha'$, $66'$ les coordonnées des points. Pour avoir le lieu des centres, on prendra les deux équations qui donnent ce point, et l'on éliminera B_1. On trouve ainsi une équation du troisième degré. Si l'on suppose

$$6=6',\quad \alpha=\alpha',$$

l'équation (1) deviendra

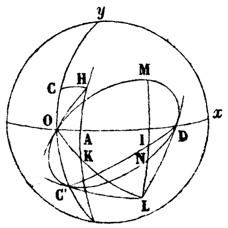
$$\left(\frac{y}{6}-1\right)^2+\left(\frac{x}{\alpha}-1\right)^2+2Bxy=1;$$

c'est l'équation des courbes du second degré, tangentes aux deux axes en deux points donnés. Le premier membre de l'équation du centre est alors divisible par le facteur $\frac{y}{6}+\frac{x}{\alpha}-1$, qui, égalé à zéro, représente la circonférence passant par les deux points de contact. Le lieu des centres est donc une conique sphérique dont l'équation est

$$y^2-x^2+\frac{y}{6}-\frac{x}{\alpha}=0.$$

Nous allons construire cette courbe en supposant les axes Ox, Oy rectangulaires.

Fig. 4.



Soit OA $= \alpha'$, arc dont la tangente égale α, OC $= 6'$; la courbe passe à l'origine, et pour trouver la tangente en ce point, il suffit de joindre l'origine au point H ayant pour coordonnées α', $6'$. Si le rayon de la sphère devenait infini, le lieu des centres se réduirait à cette tangente, qui serait alors une ligne droite.

Si l'on fait $y = 0$, on trouve $x = -\frac{1}{\alpha}$; si donc on prend un quadrant à partir de A, on a un point D de la courbe. Si l'on calcule pour ce point le coefficient de la tangente, on trouve $-\frac{6}{\alpha}$, en sorte que si l'on joint O au point K symétrique de H, l'arc OK ira rencontrer la tangente en D, qui a le même coefficient que OK à 90 degrés de l'origine. Soit donc OKL $= \frac{\pi}{2}$, l'arc DL sera la tangente en D. On trouve de même la rencontre de la courbe avec l'axe des y; elle se construit en prenant OC$' = \frac{\pi}{2} -$ CO, et la tangente en C$'$ s'obtient en joignant L au point C$'$. Ayant trois points et leurs tangentes, la courbe est déterminée, et l'on peut, au moyen du théorème de l'hexagone de Pascal, obtenir autant de points qu'on voudra géométriquement. On peut encore remarquer que le point L étant à $\frac{\pi}{2}$ de l'origine, si par ce point on mène des arcs sécants (m, n), le centre des moyennes distances des points m, n et de leurs analogues sous une circonférence de grand cercle joignant les points de contact C$'$ et D; en sorte que si nous appelons I la rencontre C$'$D avec mn, le point I satisfera à l'équation

$$\operatorname{tang} y = \frac{\operatorname{tang} y' + \operatorname{tang} y''}{2},$$

y, y', y'' étant les ordonnées des trois points l, m, n, et de même à l'équation

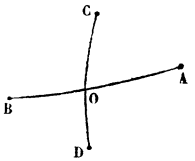
$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} x' + \operatorname{tang} x''}{2}.$$

On peut conclure du problème précédent, par la considération des ellipses supplémentaires, que le lieu des centres des ellipses tangentes à quatre grands cercles donnés est aussi une courbe du troisième degré.

Problème. *Trouver l'équation d'une conique sphérique passant par quatre points, connaissant en un de ces points la direction de la tangente.*

Choisissant les axes comme dans le problème précé-

Fig. 5.



dent, nous avons l'équation d'une courbe passant par les quatre points donnés, savoir

$$(\beta y - 1)(\beta' y - 1) + (\alpha x - 1)(\alpha' x - 1) + \mathrm{B} xy = 1,$$

en appelant, pour plus de simplicité, α la cotangente du segment OA, α', etc. Si nous désignons par $\frac{1}{m}$ le coefficient angulaire de la tangente au point A, nous aurons

$$\frac{1}{m} = -\frac{\varphi'_x\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)}{\varphi'_y\left(0, \frac{1}{\alpha}\right)};$$

tirant B de cette dernière relation, nous trouvons pour équation de la courbe

$$(\beta y - 1)(\beta' y - 1) + (\alpha x - 1)(\alpha' x - 1)$$
$$+ [\beta + \beta' + (\alpha - \alpha')m]\alpha xy = 1.$$

Remarque. On peut trouver l'équation générale des coniques passant par quatre points A, B, C, D, sans donner aux axes une position particulière. Pour cela soit

$$\beta y + \alpha x - 1 = 0$$

l'équation de la circonférence passant par deux des points A, B, et

$$\beta' y + \alpha' x - 1 = 0,$$

celle qui passe par les deux autres; soit aussi

$$\gamma y + \delta x - 1 = 0,$$

la circonférence menée par A et C, et enfin

$$\gamma' y + \delta' x - 1 = 0,$$

l'équation de la circonférence menée par les points B et D; si nous posons l'équation

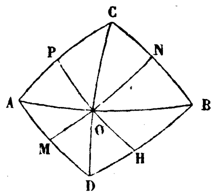
$$(\alpha x + \beta y - 1)(\alpha' x + \beta' y - 1)$$
$$+ \lambda(\delta x + \gamma y - 1)(\delta' x + \gamma' y - 1) = 0$$

(analyse de MM. Briot et Bouquet), il est évident que les coordonnées d'un quelconque des quatre points donnés vérifieront cette équation; λ étant indéterminé : c'est donc l'équation générale des courbes du second degré passant par les quatre points; λ se détermine comme dans les problèmes précédents, si l'on donne un cinquième point, ou le coefficient angulaire de la tangente en un des quatre points donnés.

Problème. *Trouver l'équation générale des coniques sphériques tangentes à quatre circonférences de grand cercle données.*

Nous prendrons pour axes les diagonales du quadrila-

Fig. 6.



tère formé par les quatre tangentes. Soit

$$\operatorname{tang} OB = \alpha, \quad \operatorname{tang} 6\, OA = \alpha', \quad \operatorname{tang} OC = 6, \quad \operatorname{tang} OD = 6',$$

l'angle COB $= \theta$.

Représentons par

$$y = Ax$$

l'équation de l'arc MN passant par deux points de contact opposés ; l'autre arc PH aura pour équation

$$y = -Ax ;$$

nous l'avons démontré précédemment, en faisant voir que les quatre arcs se coupant au point O forment un faisceau harmonique.

Cela posé, il sera facile d'avoir les coordonnées du point N, intersection de deux cercles dont on a les équations, on trouve

$$x = \frac{\alpha 6}{6 + A\alpha}, \quad y = \frac{\alpha 6 A}{6 + A\alpha}.$$

Les coordonnées des points M, H, P se trouvent par des formules analogues. On connaît d'ailleurs le coefficient angulaire de la tangente en N. Or on sait, par une formule précédemment établie, trouver l'équation d'une conique passant par quatre points, connaissant le coefficient de la tangente en un de ces points ; cette équation aura l'indéterminée A, ce sera donc l'équation générale des coniques tangentes à quatre circonférences données. Si on lui applique les deux équations qui donnent le centre en éliminant entre elles A, on aura le lieu des centres.

QUESTIONS D'EXAMEN SUR LES CONIQUES;

PAR J. T., ABONNÉ.

I.

Lieu décrit par le milieu d'une droite de longueur constante, dont les extrémités glissent sur une ellipse.

Soient $2l$ la longueur de la corde, x', y', x'', y'' les coordonnées de ses extrémités, x et y celles de son milieu. Pour résoudre la question, il faut éliminer x', y', x'', y'' entre les cinq équations suivantes, qui expriment les conditions du problème :

$$\begin{gathered} a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \\ a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2, \\ (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2 = 4l^2, \\ 2x = x' + x'', \\ 2y = y' + y''. \end{gathered}$$

Ces relations donnent, pour l'équation du lieu cherché,

$$\begin{aligned} &(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2)(a^4y^2 + b^4x^2) \\ &\qquad + a^2b^2l^2(a^2y^2 + b^2x^2) = 0 \quad (*). \end{aligned}$$

(*) Lorsque $l = a$ ou $l = b$, la courbe doit se condenser au centre; comment? et que devient la courbe lorsque $2l$ signifie le grand axe? TM.

Remarque I. Dans le cas où $a = b$, l'ellipse se réduit à un cercle, et l'équation devient

$$x^2 + y^2 = a^2 l^2,$$

ce qui doit être.

Remarque II. La surface comprise entre la courbe et l'ellipse a pour expression πl^2, d'après un théorème de M. Holdisch. La formule se vérifie immédiatement dans le cas du cercle.

Si la droite glisse sur une parabole, un calcul entièrement analogue donne pour équation du lieu

$$(y^2 - 2px)(y^2 + p^2) + p^2 l^2 = 0.$$

II.

Déterminer, dans le plan d'une ellipse, un point tel, que l'on puisse mener deux tangentes égales à la courbe.

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point cherché. La corde de contact correspondante a pour équation

$$a^2 yy_1 + b^2 xx_1 = a^2 b^2,$$

et la perpendiculaire abaissée du point sur la corde

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^4 x_1}(x - x_1).$$

Éliminant y, on a pour la valeur de l'abscisse du pied de la perpendiculaire

$$x = \frac{a^2 x_1 [b^4 + (a^2 - b^2) y_1^2]}{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}.$$

Si l'on exprime que cette valeur est celle du milieu de la corde de contact, il est évident que les tangentes seront égales.

Les abscisses des points de rencontre de la corde de contact et de l'ellipse sont données par l'élimination de y entre les équations

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1},$$

ce qui conduit à l'équation

$$(a^2 b^2 y_1 + b^4 x_1^2) x^2 - 2 a^2 b^4 x x_1 + a^4 b^4 - a^4 b^2 y_1^2 = 0;$$

d'où

$$\frac{x' + x''}{2} = \frac{a^2 b^4 x_1}{a^2 b^2 y_1^2 + b^4 x_1^2}.$$

La condition à laquelle doivent satisfaire x_1 et y_1 dans le cas des tangentes égales est donc

$$\frac{b^4 - x_1}{a^2 b^2 y_1^2 + b_1^4 x_1^2} = \frac{x_1 [b^4 + (a^2 - b^2) y_1^2]}{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2};$$

cette équation est satisfaite, même par $x_1 = 0$ ou par $y_1 = 0$, c'est-à-dire pour des points situés sur les axes; de plus, simplifiant, on a

$$\frac{b^2}{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2} = \frac{b^4 + (a^2 - b^2) y_1^2}{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2};$$

d'où l'on déduit comme facteur

$$a^2 y^2 + b^2 x_1^2 = a^2 b^2,$$

ce qui donne tous les points situés sur l'ellipse. En effet, alors les deux tangentes sont *également* nulles; de même pour les deux autres coniques.

III.

Deux poids P et P' attachés aux extrémités d'un cordon reposent sur une ellipse dont le grand axe est vertical.

Déterminer la relation qui existe entre les poids et les ordonnées correspondantes à la position d'équilibre.

Soient M et M' les points correspondants à la position d'équilibre. Les poids seront, par rapport aux tangentes menées en ces points, comme sur deux plans inclinés. On aura donc, dans le cas de l'équilibre, α et α' étant les angles que font les tangentes avec le grand axe,

$$P\cos\alpha = P'\cos\alpha';$$

or, l'équation de la courbe étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

on a

$$\cos\alpha = \frac{-a^2y}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}} \quad \text{et} \quad \cos\alpha' = \frac{-a^2y'}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}};$$

et par suite l'équation de l'équilibre devient

$$\frac{P^2y^2}{a^4y^2+b^4x^2} = \frac{P'^2y'^2}{a^4y'^2+b^4x'^2};$$

d'où

$$a^4y^2y'^2(P^2-P'^2) = b^4(P'^2x^2y'^2 - P^2x'^2y^2),$$

et remplaçant x^2 et x'^2 par leurs valeurs déduites de l'équation de la courbe, il vient

$$(a^2-b^2)(P^2-P'^2)y^2y'^2 = b^4(P'^2y'^2 - P^2y^2);$$

d'où, enfin,

$$\frac{(P^2-P'^2)(a^2-b^2)}{b^4} = \frac{P'^2}{y^2} - \frac{P^2}{y'^2},$$

équation qui exprime la relation qui existe entre les poids P et P', et les ordonnées y et y' des points correspondants à la position d'équilibre.

Un calcul entièrement analogue conduit, dans le cas de la parabole, à la condition

$$\frac{P^2-P'^2}{p^2} = \frac{P'^2}{y^2} - \frac{P^2}{y'^2}.$$

Cette relation peut aussi se déduire du résultat qui vient d'être obtenu pour l'ellipse. On pose, à cet effet,

$$a - \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}p, \quad \text{d'où} \quad b^2 = ap - \frac{p^2}{4}.$$

On aura alors

$$\frac{a^2 - b^2}{b^4} = \frac{a^2 - ap + \frac{p^2}{4}}{a^2p^2 - \frac{ap^3}{2} + \frac{p^4}{16}};$$

divisant par a^2, et posant $a = \infty$, cette dernière équation devient

$$\frac{a^2 - b^2}{b^4} = \frac{1}{p^2}, \quad \frac{P^2 - P'^2}{y^2} = \frac{P'^2}{y^2} - \frac{P^2}{y_1^2}.$$

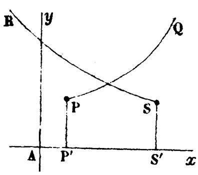
SUR LES COURBES A PLUSIEURS POINTS D'ARRÊT;

PAR M. HERMANN LAURENT,
Élève du lycée Napoléon (*).

Existe-t-il des courbes telles, qu'une même branche présente deux points d'arrêt?

1°. Soit une courbe PQ présentant un point d'arrêt

FIG. 1.



(*) Fils du célèbre chimiste prématurément enlevé à la science qu'il cultivait avec un esprit si philosophique.

en P, une autre courbe présentant un point d'arrêt en S, on pourra toujours placer ces courbes l'une par rapport à l'autre de telle sorte, que, si on les rapporte à deux axes rectangulaires Ax et Ay, les ordonnées de ces courbes correspondant à la même abscisse soient réelles et finies dans l'intervalle compris entre $x = \text{AP}'$ et $x = \text{AS}'$, abscisses des points d'arrêt des deux courbes. Alors soit $y = \varphi(x)$ l'équation de la première courbe, $y = \psi(x)$ l'équation de la seconde; la courbe représentée par

$$y = \text{A}\varphi(x) + \text{B}\psi(x)$$

présentera deux points d'arrêt, l'un pour $x = \text{AP}'$, l'autre pour $x = \text{AS}'$.

Il est clair que la courbe $y = \psi(x)$ peut être remplacée par la courbe $y = \varphi(x)$ placée dans une position différente. En suivant cette règle, on forme les exemples suivants :

$$y = \frac{1}{lx} + \frac{1}{l(a - x)} \qquad 0 < a < 1,$$

$$y = \frac{1}{lx} - \frac{1}{l(a - x)} \qquad \text{»}$$

$$y = \frac{1}{lx} + \sin\sqrt{a - x} \qquad \text{»}$$

Si dans la dernière courbe on prend le radical avec le double signe, on a deux branches de courbe inégales présentant chacune deux points d'arrêt.

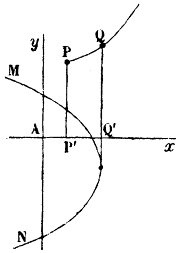
2°. On peut encore obtenir le même résultat de la manière suivante :

Considérons une courbe MN quelconque telle, qu'une même valeur de x fournisse deux valeurs différentes pour y, et de plus située d'un même côté de l'ordonnée QQ'; soit $y = f(x)$ son équation.

Considérons en second lieu une courbe $y = \varphi(x)$

présentant un point d'arrêt en P, le point P ayant une

FIG. 2.



abscisse telle, que $f(x)$ reste réel quand x varie de AP′ à AQ′.

Prenons la courbe $y = f(x)$ et augmentons ses ordonnées de $A\varphi(x)$, nous aurons une courbe présentant deux points d'arrêt sur la même branche.

Exemples :

$$y = \sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}, \quad y = \sqrt{\tfrac{1}{4} - x^2} + \frac{1}{lx}\,\mathrm{K}a, \ldots$$

3°. Il arrive quelquefois que les courbes $y = \varphi(x)$ présentant un point d'arrêt ont une asymptote parallèle à l'axe des y ; en transportant alors l'origine sur l'axe des y de manière que le point d'arrêt ne soit pas sur l'axe des x, on a une équation telle que $y = a + \varphi(x)$, et alors la courbe

$$y = \frac{1}{b + \varphi(x)}$$

présente deux points d'arrêt.

Exemples :

$$y = \frac{1}{b + \dfrac{1}{\mathrm{L}x}}, \quad y = \frac{1}{1 + e^{\tan x}}.$$

La courbe $y = \dfrac{1}{1 + e^{\tan x}}$ se compose d'une infinité de branches présentant deux points d'arrêt.

REMARQUES
sur quelques produits dont les facteurs sont en progression arithmétique;

PAR M. MARIE-PIERRE-ADOLPHE GUIBERT.

I. *Si* n, r *sont premiers entre eux, et* $r^2 < 2^m - 1$, *le produit* $(n-r)\,n\,(n+r)$ *ne sera pas la puissance* $m^{\text{ième}}$ *d'un entier.*

Admettons que ce produit soit une puissance exacte du degré m : comme n est premier avec les deux autres facteurs $n-r$, $n+r$, il faudra que n, n^2-r^2 soient des puissances $m^{\text{ièmes}}$ exactes a^m, b^m ; on aurait alors

$$(a^2)^m - b^m < 2^m - 1,$$

ce qui ne peut être.

II. *Le produit* P *de huit entiers consécutifs n'est point un carré.*

Soit

$$P = (n-3)(n-2)\ldots(n+3)(n+4).$$

Ce produit équivaut à

$$(n^4+2n^3-9n^2-10n+4)^2-16(2n+1)^2;$$

donc

$$P < (n^4+2n^3-9n^2-10n+4)^2.$$

La différence $P-(n^4+2n^3-9n^2-10n+3)^2$, égale à $2n^4+4n^3-82n^2-84n-9$, reste positive tant que n est supérieur à 6 ; donc, pour $n>6$,

$$P > (n^4+2n^3-9n^2-10n+3)^2.$$

Ces inégalités prouvent que pour $n>6$, P n'est point un carré, par conséquent P n'est jamais un carré, puisque d'ailleurs on n'obtient aucun carré, en prenant n égal à l'un quelconque des nombres 4, 5, 6.

On déduit de là que le *produit de trois nombres entiers consécutifs n'est une puissance exacte d'aucun degré.*

III. *Le produit de trois nombres entiers en progression arithmétique n'est jamais un cube.*

Le produit en question est susceptible d'être représenté par

$$d^3(n-r)n(n+r),$$

d étant le plus grand commun diviseur entre la raison et l'un quelconque des termes de la progression.

Supposons que ce produit soit un cube; $n-r$ et $n+r$ étant premiers avec n, $(n-r)$, $(n+r)$ et n devant être des cubes. Soit

$$n=a^3.$$

Si l'un des nombres n, r est pair, $n-r$ et $n+r$ n'auront pas de diviseur commun, chacun de ces facteurs devra être un cube; mais leur somme est égale à $2n$, c'est-à-dire à $2a^3$, on aurait donc la somme de deux cubes égale au double d'un cube, ce qui est impossible.

Si les deux nombres n, r sont impairs, le plus grand commun diviseur de $n-r$ et de $n+r$ sera 2; leur produit ne pourra être un cube que si l'un est le double d'un cube et l'autre égal à quatre fois un cube, ce qui donne toujours une égalité semblable à celle-ci :

$$2n=2\alpha^3+4\beta^3,$$

de laquelle on tire

$$a^3-\alpha^3=2\beta^3,$$

résultat encore impossible.

IV. *Le produit de six, de neuf nombres entiers consécutifs n'est point un cube.*

Soit d'abord

$$\mathrm{P}=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Ce produit n'est pas un cube quand $n=3$; nous allons prouver qu'il n'en est pas un si n est plus grand que 3.

On a identiquement

$$3^3 P = (3n^2+3n-8)^3 - (252n^2+252n+512),$$

d'où

$$3^3 P < (3n^2+3n-8)^3;$$

mais la différence $3^3 P - (3n^2+3n-9)^3$, égale à

$$27n^4+54n^3-378n^2-405n-295,$$

est positive tant que n est supérieur à 3; par conséquent, dans cette hypothèse,

$$3^3 P > (3n^2+3n-9)^3;$$

donc P n'est jamais un cube.

En dernier lieu, considérons le produit de neuf nombres entiers consécutifs

$$P = (n-4)(n-3)\ldots(n+3)(n+4);$$

observons qu'on n'obtient aucun cube, en faisant $n=5$, 6, 7, 8, 9, 10 : il suffira de prouver qu'on n'en obtient pas non plus lorsque n est plus grand que 10.

Or P revient à

$$(n^3-10n)^3-(27n^5-180n^3-576n), \quad \text{d'où} \quad P<(n^3-10n)^3;$$

car $27n^5-180n^3-576n$ est une quantité positive, si, comme on le suppose, on a $n>10$; mais, en soustrayant de P le cube immédiatement inférieur au précédent, on obtient la différence

$$3n^6-27n^5-60n^4+177n^3+300n^2+30n+576,$$

laquelle est aussi positive dès que n est supérieur à 10, ce qui donne

$$P>(n^3-10n-1)^3.$$

Par conséquent P n'est un cube dans aucune circonstance.

TROISIÈME SOLUTION DE LA QUESTION 493

(voir p. 83);

PAR M. FRANÇOIS SIACCI* (DE ROME).

Soient P un point d'une conique, C le centre de courbure en P, Q le centre de la conique; par C on mène une parallèle à la tangente en P; soit D le point où cette parallèle est rencontrée par le diamètre OP : on a CD égal au tiers du rayon de courbure de la *développée* en C.

(ABEL TRANSON.)

Soient ρ le rayon de courbure de la conique au point P, et R le rayon de courbure de la développée au point C; soit φ l'angle que la tangente au point P fait avec l'axe des x; soient enfin s et S deux arcs pris à partir des points P et C sur la conique et sur la développée. Nous aurons

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi}, \quad R = \frac{dS}{d\varphi};$$

mais $d\rho = dS$; donc

$$R = \frac{\rho\, d\rho}{ds}.$$

Soit maintenant A l'angle que fait la tangente au point P avec le diamètre PO. On aura, le triangle PCD étant rectangle en C,

$$CD = CP \cot A = \rho \cot A.$$

La question, par conséquent, se réduit à démontrer l'équation

$$\frac{\rho\, d\rho}{ds} = 3\rho \cot A, \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{d\rho}{ds} = 3 \cot A.$$

Soit en général

$$(1) \qquad y^2 = Ax^2 + 2Bx$$

l'équation de la conique, ε étant l'angle des demi-axes. On

aura

$$(2)\quad\begin{cases} y' = \dfrac{Ax+B}{y}, \\ y'' = \dfrac{Ay^2-(Ax+B)^2}{y^3} = -\dfrac{B^3}{y^3}, \\ y''' = \dfrac{3B^2(Ax+B)}{y^5}. \end{cases}$$

Or

$$\rho = \frac{-(1+y'^2+2y'\cos\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}{y''\sin\varepsilon},$$

$$ds = (1+y'^2+2y'\cos\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\,dx;$$

donc

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{-3}{\sin\varepsilon}\cdot\left[(y'+\cos\varepsilon) - \frac{(1+y'^2+2y'\cos\varepsilon)\,y'''}{y''^2}\right],$$

et remplaçant y', y'', y''' au moyen des équations (2), on aura, réductions faites,

$$(3)\quad\begin{cases} \dfrac{d\rho}{ds} = \dfrac{-3}{\sin\varepsilon} \\ \times\left\{\dfrac{B^2[(Ax+B)+y\cos\varepsilon]-(Ax+B)[y^2+(Ax+B)^2+2y(Ax+B)\cos\varepsilon]}{B^2 y}\right\}. \end{cases}$$

Dans l'équation (1), l'origine des coordonnées se trouve sur un point de la courbe. Ce point, pouvant être quelconque, supposons que ce soit le point P. On aura

$$x=0\quad y=0,\quad \varepsilon=A;$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation (3), on trouve, après avoir exécuté la division,

$$\frac{d\rho}{ds} = 3\cot A,$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME DE M. DE STAUDT SUR LE TÉTRAÈDRE

(voir t. XVIII, p. 441);

PAR M. GENTIL,
Chef d'institution.

Nous conservons les mêmes notations ; il faut démontrer que l'on a

$$6rV = \omega,$$
$$\Delta u = \omega,$$

et appelant Δ' le triangle dont les côtés sont $\frac{a}{\sqrt{u}}, \frac{b}{\sqrt{u}}, \frac{c}{\sqrt{c}}$,

$$\Delta = \Delta'.$$

En se reportant à la *Géométrie* non mutilée de Legendre, on trouve, Note V, problèmes VI et VIII, sur le tétraèdre,

$$(1)\quad P = V = \frac{1}{6} fgh \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2 6 - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos 6\cos\gamma},$$

$$(2)\quad SO = r = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{f^2\sin^2\alpha + g^2\sin^2 6 + h^2\sin^2\gamma + 2fg(\cos\gamma - \cos\alpha\cos 6) - 2fh(\cos 6 - \cos\alpha\cos\gamma) - 2gh(\cos\alpha - \cos 6\cos\gamma)}}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2 6 - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos 6\cos\gamma}}.$$

Le dénominateur de r est égal à $\frac{6\mathrm{V}}{fgh}$; chassant ce dénominateur dans l'équation (2), et multipliant les deux membres par fgh, on a

$$(3) \qquad 6r\mathrm{V} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}f^2g^2h^2\mathrm{M}\right)},$$

en appelant M la quantité sous le radical dans le numérateur de r.

En comparant les notations de Legendre avec celles de M. de Staudt, on voit que

$$a = ff', \quad b = gg', \quad c = hh',$$

$$2s = ff' + gg' + hh',$$

$$\omega^2 = s(s - ff')(s - gg')(s - hh'),$$

$$u = 2v\mathrm{K},$$

K = la hauteur du tétraèdre correspondant à Δ. (Legendre, livre III, théorème XXXII.)

Cela posé,

$$(4) \quad \omega^2 = \frac{1}{16}\left(\begin{array}{l} \quad 2f^2f'^2g^2g'^2 + 2f^2f'^2h^2h'^2 + 2g^2g'^2h^2h'^2 \\ -f^4f'^4 - g^4g'^4 - h^4h'^4 \end{array}\right);$$

mais

$$f'^2 = g^2 + h^2 - 2gh\cos\alpha,$$

$$g'^2 = f^2 + h^2 - 2fh\cos 6,$$

$$h'^2 = f^2 + g^2 - 2fg\cos\gamma.$$

Remplaçant dans l'équation (4) f'^2, g'^2, h'^2, par les valeurs précédentes, on trouve, après calcul fait, pour ω^2, la quantité sous le radical dans le second membre de l'équation (3); donc,

$$6r\mathrm{V} = \omega;$$

mais

$$V = \frac{1}{3} K \Delta, \quad 6 r V = 2 r K \Delta = \omega, \quad u = 2 r K;$$

donc,

$$\Delta' u = \omega.$$

Le triangle Δ' dont les côtés sont $\frac{ff'}{\sqrt{u}}, \frac{gg'}{\sqrt{u}}, \frac{hh'}{\sqrt{u}}$, a pour surface

$$(5) \quad \frac{\sqrt{\frac{1}{16}(2f^2f'^2g^2g'^2 + 2f^2f'^2h^2h'^2 + 2g^2g'^2h^2h'^2 - f^4f'^4 - g^4g'^4 - h^4h'^4)}}{u} = \frac{\omega}{u}.$$

Donc

$$\Delta' u = \omega,$$

et, par conséquent,

$$\Delta = \Delta'.$$

DÉMONSTRATION

D'un théorème de M. Cayley sur les relations entre les fonctions de Sturm (*);

PAR M. V. DE ZEIPEL,
Doyen à l'université d'Upsal.

Quarterly Journal, mai 1859.

1°. Soient

$$F(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_n x^{m-n} \ldots,$$
$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + b_n x^{m-2} + \ldots;$$

opérant comme pour la recherche du plus grand commun

(*) *Journal* de M. Liouville, t. XI, p. 297-299; 1846.

diviseur, on obtient

$$\begin{aligned}
F(x) &= q_1 f(x) + R_1,\\
f(x) &= q_2 R_1 + R_2,\\
R_1 &= q_3 R_2 + R_3,\\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\
R_{n-2} &= q_n R_{n-1} + R_n;
\end{aligned}$$

éliminant les R, on obtient

$$\begin{aligned}
R_n &= \varphi_n(x)\, F x + \psi_n(x)\, f x,\\
\varphi_n(x) &= A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots,\\
\psi_n(x) &= B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} \ldots.
\end{aligned}$$

Il faut déterminer les A et les B de manière que R_n devienne de degré $m-n$; de sorte que les termes d'ordre supérieur s'annulant en

$$\begin{aligned}
R_n = {} & (a_0 A_0 + b_0 B_0) x^{m+n-1} + (a_1 A_0 + a_0 A_1 + b_1 B_0 + b_0 B_1) x^{m+n-2}\\
& + (a_2 A_0 + a_1 A_1 + a_0 A_2 + b_2 B_0 + b_1 B_1 + b_0 B_2) x^{+n-3} + \ldots;
\end{aligned}$$

tous ces termes jusqu'à x^{m-n+1} inclusivement doivent disparaître; ce qui donne ces $2n-1$ équations de condition

$$\begin{array}{l}
a_0 A_0 + 0 \quad + 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots + 0 \quad + 0 \ldots\ldots = -b_0 B_0\\
a_1 A_0 + a_0 A_1 + 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots + b_0 B_1 + 0 \ldots\ldots = -b_1 B_0\\
a_2 A_0 + a_1 A_1 + a_0 A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + b_1 B_1 + b_0 B_2 \ldots = -b_2 B_0\\
a_3 A_0 + a_2 A_1 + a_1 A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + b_2 B_1 + b_1 B_2 \ldots = -b_3 B_0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{2n-2} A_0 + a_{2n-3} A_1 + a_{2n-4} A_2 \ldots + b_{2n-3} B_1 + b_{2n-4} B_2 \ldots = -b_{2n-2} B_0
\end{array}$$

On déduit les valeurs de $2n-1$ quantités $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ de ces $2n-1$ équations, par la méthode de Cramer. A cet effet, posons

$$P_1 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}; \qquad P'_1 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$$

$$P''_1 = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \ldots ; \; P_1^{(r)} = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_{r+1} & b_{r+1} \end{vmatrix};$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Pour avoir $P_2^{(r)}$, on change dans P_2 la dernière ligne les indices en $r+3$; (r) désigne les accents.

$$P_3 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & b_5 & b_6 & b_3 \end{vmatrix};$$

et de là $P_s^{(r)}$ en changeant les indices en $r+s$ dans la dernière ligne.

Les P_s se forment en prenant dans chaque ligne des $2n-1$ équations s termes à partir de la seconde ligne.

On a donc

$$a_0 P_{n-1} A_0 = (-1)^n B_0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots b_0 & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots b_1 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \ldots\ldots b_2 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \ldots\ldots b_3 & b_2 & b_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 \ldots\ldots b_4 & b_3 & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} \ldots\ldots b_{2n-2} & b_{2n-3} & b_{2n-4} \end{vmatrix};$$

et, en général,

$$a_0 P_{n-1} A_i = (-1)^{n+1} B_0$$

$$\times \begin{vmatrix}
a_0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & b_0 & 0 \\
a_1 & a_0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & b_1 & b_0 \\
a_2 & a_1 & a_0 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & b_2 & \\
a_3 & a_2 & a_1 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & b_3 & \\
a_4 & a_3 & a_2 \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & b_4 & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i-1} & a_{i-2} & a_{i-3} \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & b_{i-1} & \\
a_i & a_{i-1} & a_{i-2} \ldots & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & b_i & \\
a_{i+1} & a_i & a_{i-1} \ldots & a_1 & a_0 & 0 \ldots & 0 & b_{i+1} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} \ldots & a_{2n-(i+1)} & a_{2n-(i+2)} & a_{2n-(i+3)} \ldots & a_n & b_{2n-2} & b_{2n-2}
\end{vmatrix},$$

et

$$\varphi_n(x) = (-1)^n \frac{B_0}{a_0 P_{n-1}} S.$$

Pour avoir S, on remplace dans le déterminant précédent la première ligne par x^{n-1}, x^{n-2}, $x^{n-3}, \ldots$, 0, 0, 0, et

$$\psi_n(x) = (-1)^n \frac{B_0}{a_0 P_{n-1}} T;$$

pour avoir T, on remplace la même première ligne par 0, 0, 0, x^{n-1}, x^{n-2}, $x^{n-3}, \ldots +$; de là

$$R_n = (-1)^n \frac{B_0}{a_0 P_{n-1}} U;$$

remplaçant la même ligne par

$$x^{n-1} F x, \quad x^{n-2} F(x), \quad x^{n-3} F(x), \ldots, x^{n-1} f(x), \quad x^{n-2} f(x), \\ x^{n-3} f(x),$$

on obtient U.

Faisant

$$B_0 = \pm a_0 P_{(n-1)},$$

on a

$$R_n = \pm (-1)^{n+1} U;$$

mettant dans U au lieu de $F(x)$, $f(x)$ les développements, et ne conservant que les termes de degré $m-n$ et inférieurs, on a

$$R_n = \pm (-1)^{n+1} P_n x^{m-n} + P'_n x^{m-n-1} + P''_n x^{m-n-2} + P'_n x^{m-n-3} \ldots,$$

n est quelconque; r, s, t étant des nombres entiers positifs, on trouve par le procédé ci-dessus les valeurs de

$$\begin{array}{lll} \varphi_r, & \varphi_s, & \varphi_t, \\ \psi_r, & \psi_s, & \psi_t, \\ R_r, & R_s, & R_t; \end{array}$$

on a identiquement les deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi_r, & \psi_r, & \varphi_r F(x) \\ \varphi_s, & \psi_s, & \varphi_s F(x) \\ \varphi_t, & \psi_t, & \varphi_t F(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \varphi_r, & \psi_r, & \psi_r f(x) \\ \varphi_s, & \psi_s, & \psi_s f(x) \\ \varphi_t, & \psi_t, & \psi_t f(x) \end{vmatrix} = 0;$$

ajoutant

$$\begin{vmatrix} \varphi_r, & \psi_r, & \varphi_r F(x) + \psi_r f(x) \\ \varphi_s, & \psi_s, & \varphi_s F(x) + \psi_s f(x) \\ \varphi_t, & \psi_t, & \varphi_t F(x) + \psi_t f(x) \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} \varphi_r, & \psi_r, & R_r \\ \varphi_s, & \psi_s, & R_s \\ \varphi_t, & \psi_t, & R_t \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation découverte par M. Cayley.

PROPOSITIONS SEGMENTAIRES
sur la parabole, l'hyperbole équilatère et propriété du cercle principal de l'ellipse;

PAR M. ARTHUR LESCAZE,
Elève à Sainte-Barbe (cours de M. Gerono).

PROPOSITION I. *Le produit des distances du sommet d'une parabole à une tangente quelconque et à la courbe, distances comptées sur la même droite, est constant.*

Soient

$$y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet S;

$$y = mx + \frac{p}{2m}$$

l'équation d'une tangente quelconque en fonction de son coefficient angulaire m;

$$y = -\frac{1}{m}x$$

l'équation de la perpendiculaire SP abaissée du sommet S sur la tangente. Enfin, soit R le second point de rencontre de SP prolongée avec la courbe. Cela posé, on a

$$(1) \qquad \overline{SP}^2 = \frac{p^2}{4m^2(m^2+1)},$$

d'après la formule connue qui donne la distance d'un point S à une droite.

Nommons (x', y') les coordonnées du point R. On

aura

$$\overline{\mathrm{SR}}^2 = x'^2 + y'^2;\quad y' = -\frac{1}{m}\cdot x';\quad y'^2 = 2px';$$

éliminant x' et y', il viendra

$$(2)\qquad \overline{\mathrm{SR}}^2 = 4p^2m^2(m^2+1).$$

Multiplions les égalités (1) et (2) membre à membre et extrayons la racine carrée, il vient

$$\mathrm{SP}\times\mathrm{SR} = p^2.$$

(C. Q. F. D.)

Remarque I. Cette remarque peut être utile dans la résolution de certains problèmes. Soit proposé, par exemple, de construire une parabole dont on donne une tangente, le sommet et le paramètre. On aura immédiatement un point R de la courbe, en abaissant du sommet donné S une perpendiculaire SP sur la tangente et déterminant le point R de façon que

$$\mathrm{SP}\times\mathrm{SR} = p^2.$$

On sera alors ramené à cet autre problème dont la solution est connue et fort simple : Construire une parabole, connaissant le sommet, le paramètre et un point de la courbe.

Remarque II. Il y a une démonstration plus simple de la proposition. Le lieu du point P est, comme on sait, une cissoïde dont l'équation est

$$y^2 = -\frac{2x^3}{p+2x};$$

passant aux coordonnées polaires, on trouve

$$\rho = -\frac{p\sin^2\alpha}{2\cos\alpha};$$

l'équation polaire de la parabole est

$$\rho=\frac{2p\cos\alpha}{\sin^2\alpha};$$

le produit des deux rayons vecteurs ρ est $-p^2$.

Note du Rédacteur. M. Lescaze est l'ingénieux auteur du *Lemme* qu'il a proposé comme question (*voir* t. XVIII, p. 171), et qui a été démontré par M. Joseph Vigne (*voir* t. XVIII, p. 265).

PROPOSITION II. *Le produit des distances du centre d'une hyperbole équilatère à une tangente quelconque et à la courbe, distances comptées sur la même droite, est constant.*

Soit en effet

$$x^2-y^2=a^2$$

l'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses axes. Je désigne son centre par O, par P la projection de ce centre sur une tangente quelconque et par R l'un des deux points de rencontre de OP avec la courbe.

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2-a^2}=mx+a\sqrt{m^2-1}$$

étant l'équation d'une tangente quelconque à la courbe, on a

$$(1)\qquad \overline{OP}^2=\frac{a^2(m^2-1)}{(m^2+1)}.$$

Cherchons $\overline{OR}^2$, nommons x', y' les coordonnées du point R, on aura

$$\overline{OR}^2=x'^2+y'^2;$$

d'ailleurs

$$x'^2-y'^2=a^2 \quad \text{et} \quad y'=-\frac{1}{m}.x'.$$

Tirons x'^2 et y'^2 de ces deux dernières expressions et portons dans

$$\overline{OR}^2 = x'^2 + y'^2,$$

il viendra

$$\overline{OR}^2 = \frac{a^2 m^2}{m^2 - 1} + \frac{a^2}{m^2 - 1} = \frac{a^2(m^2 + 1)}{m^2 - 1};$$

$$\overline{OR}^2 = \frac{a^2(m^2 + 1)}{m^2 - 1}; \tag{2}$$

multiplions les égalités (1) et (2) membre à membre et extrayons la racine, il viendra

$$OP \times OR = a^2.$$

(C. Q. F. D)

Remarque. Le lieu du point P est une lemniscate dont l'équation polaire est

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\alpha,$$

l'équation polaire de l'hyperbole est

$$\rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\alpha},$$

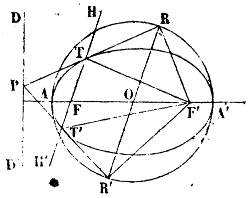
donc, etc.

PROPOSITION III. *Si d'un point de la directrice d'une ellipse on tire deux tangentes à la courbe et qu'on les prolonge* au delà *du point de contact jusqu'à leur rencontre avec la circonférence principale, la droite qui joindra les deux points de rencontre sera un diamètre parallèle à la corde des contacts.*

Lemme. Les projections du sommet d'un triangle sur les bissectrices correspondant aux deux autres sommets sont situées sur une droite qui passe par les milieux des deux côtés se coupant au sommet considéré.

Cela posé, joignons sur la figure TT', TF', T'F', F'R, F'R'

La droite TT′ passe par le foyer F, puisque le point P est



sur la directrice ; donc on a les égalités d'angles

$$R\widehat{T}F' = P\widehat{T}F = H\widehat{T}R.$$

De même

$$F'\widehat{T'}R' = H'\widehat{T'}R'.$$

Donc les droites TR, T′R′ sont les bissectrices des angles $H\widehat{T}F'$, $H'\widehat{T'}F'$. Mais F′R est perpendiculaire sur TR, F′R′ sur T′R′, puisque TR et T′R′ sont des tangentes à l'ellipse et que les points R et R′ appartiennent à la circonférence principale. Donc, d'après le lemme, la droite RR′ passe par les milieux de TF′ et de T′F′, ce qui montre d'abord qu'elle est parallèle à TT′, et en outre elle passera par le milieu O de FF′, c'est-à-dire qu'elle est un diamètre. (C. Q. F. D.)

On déduit de là les deux corollaires suivants :

Corollaire I. Si des extrémités d'un diamètre mobile de la circonférence principale on mène d'un même côté de ce diamètre des tangentes à l'ellipse, le point de concours de ces tangentes décrit la directrice correspondant au foyer relatif au côté considéré.

Corollaire II. Quand l'un des sommets d'un parallélogramme circonscrit à une ellipse est assujetti à se mouvoir sur l'une des deux directrices, le sommet opposé décrit l'autre directrice, et les deux autres sommets décrivent la circonférence principale.

SOLUTION DE LA QUESTION 514

(voir p. 94);

PAR M. ED. GRESSIER,
Élève au collége Stanislas (classe de M. Frin).

L'énoncé de cette question est incorrect. Il faut remplacer

$$b = \tang \frac{\psi}{2} e^{-\cos\psi} \quad \text{par} \quad b = \tang \frac{\psi}{2} e^{\cos\psi},$$

et

$$b = \cot \frac{\psi}{2} e^{\cos\psi} \quad \text{par} \quad b = \cot \frac{\psi}{2} e^{-\cos\psi} \ (*).$$

Nous allons le prouver

Pour qu'une équation transcendante

$$f(x) = 0$$

ait deux racines égales, il faut qu'elle ait une racine commune avec

$$f'(x) = 0.$$

Prenons la dérivée de l'équation proposée.

$$e^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} + xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\left[-\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right] = 0,$$

d'où

$$ax^2 - 2x + a = 0.$$

(*) Nous avons copié les *Comptes rendus* du 9 janvier 1860, p. 111-112.

Cette équation a pour racines

$$\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a} \quad \text{et} \quad \frac{1-\sqrt{1-a^2}}{a},$$

ou, puisque $a = \sin\psi$,

$$\cot\frac{\psi}{2} \quad \text{et} \quad \tang\frac{\psi}{2}.$$

Il faut donc que l'une de ces quantités mise à la place de x dans les équations

$$xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \tang\frac{\psi}{2}\,e^{-\cos\psi},$$

$$xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \cot\frac{\psi}{2}\,e^{\cos\psi},$$

en vérifie au moins une.

Posons

$$x_1 = \cot\frac{\psi}{2}, \quad x_2 = \tang\frac{\psi}{2};$$

alors

$$x_1 - \frac{1}{x_1} = \frac{2\cos\psi}{\sin\psi}, \quad x_2 - \frac{1}{x_2} = -\frac{2\cos\psi}{\sin\psi}.$$

Il faut donc que l'une des relations suivantes se vérifie :

$$(1) \qquad x_1 e^{-\frac{a}{2}\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)} = \tang\frac{\psi}{2}\,e^{-\cos\psi},$$

$$(2) \qquad x_1 e^{-\frac{a}{2}\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)} = \cot\frac{\psi}{2}\,e^{\cos\psi},$$

$$(3) \qquad x_2 e^{-\frac{a}{2}\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)} = \tang\frac{\psi}{2}\,e^{-\cos\psi},$$

$$(4) \qquad x_2 e^{-\frac{a}{2}\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)} = \cot\frac{\psi}{2}\,e^{\cos\psi}:$$

or ces relations se réduisent à

$$(5) \qquad \cot\frac{\psi}{2} = \tang\frac{\psi}{2},$$

$$(6) \qquad e^{-\cos\psi} = e^{\cos\psi},$$

$$(7) \qquad e^{\cos\psi} = e^{-\cos\psi},$$

$$(8) \qquad \tang\frac{\psi}{2} = \cot\frac{\psi}{2}.$$

Pour que l'équation (5) ou l'équation (8) soit satisfaite, il faut que

$$\psi = 90^\circ;$$

et de même, pour que l'équation (6) ou l'équation (7) soit satisfaite, il faut que

$$\psi = 90^\circ.$$

Mais, d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé de la question, ψ est inférieur à 90 degrés. L'équation transcendante proposée ne saurait donc avoir deux racines égales.

Au contraire, si l'on pose

$$b = \tang\frac{x}{2}\, e^{\cos\psi},$$

la valeur

$$x = \tang\frac{\psi}{2}$$

annule à la fois l'équation transcendante proposée et sa dérivée, et par suite l'équation

$$xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \tang\frac{\psi}{2}\, e^{\cos\psi}$$

a deux racines égales à $\tang\frac{\psi}{2}$.

De même, en posant

$$b = \cot\frac{\psi}{2}\, e^{-\cos\psi},$$

l'équation

$$xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \cot\frac{\psi}{2}\, e^{-\cos\psi}$$

a deux racines égales à $\frac{\psi}{2}$.

QUESTIONS.

523. Un débiteur doit acquitter sans intérêt :

Une dette	C_1	au bout de	n_1	années,
»	C_2	»	n_2	»
»	C_3	»	n_3	»
.....	.....	.....	.....	.....
»	C_p	»	n_p	»

Il veut payer les sommes $C_1 + C_2 + \ldots + C_p$ à la fois; démontrer qu'en appelant t le nombre d'années au bout desquelles il doit payer cette somme, on a

$$t = \frac{100}{V}\left(\frac{n_1 C_1}{100 + n_1 i} + \frac{n_2 C_2}{100 + n_2 i} + \frac{n_3 C_3}{100 + n_3 i} + \ldots + \frac{n_p C_p}{100 + n_p i}\right),$$

$i =$ intérêt annuel pour 100,

$$V = \left(\frac{100\,C_1}{100 + n_1 i} + \frac{100\,C_2}{100 + n_2 i} + \ldots + \frac{100\,C_n}{100 + n_p i}\right).$$

524. On donne un triangle conjugué à une ellipse (chaque sommet est le pôle du côté opposé) : la tangente menée du centre de l'ellipse au cercle circonscrit au triangle est égale à la corde du quadrant d'ellipse.

(Faure, capitaine d'artillerie.)

525. Soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ les racines d'une équation

$$f(x) = 0,$$

que nous écrivons sous la forme maintenant bien connue

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, 1)^n = 0;$$

posons

$$A_m = a_0^{2n-4} \sum \frac{x_1^m f'(x_1) f'(x_3) \ldots f'(x_n)}{f'(x_1)},$$

où f' est la dérivée de f; démontrer que la forme

$$(A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2n-4})(x, y)^{2n-4}$$

est un covariant de la forme

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, y)^n.$$

(Michael Roberts.)

526. Si l'équation

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 - 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 = 0$$

a une racine double α, posons

$$M = \frac{(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2)^3}{(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3)^2};$$

démontrer les équations suivantes :

$$\alpha = \frac{\frac{dM}{da^0}}{\frac{dM}{da_1}} = \frac{2}{3}\frac{\frac{dM}{da_1}}{\frac{dM}{da_2}} = \frac{2}{3}\frac{\frac{dM}{da_2}}{\frac{dM}{da_3}} = \frac{\frac{dM}{da_3}}{\frac{dM}{da_4}}.$$

(Michael Roberts)

527. On donne deux cercles tels, que l'on puisse construire un triangle inscrit à l'un et circonscrit à l'autre ; on sait qu'il existe alors une infinité de triangles satisfaisant à cette condition ; le lieu des points de rencontre des hauteurs de tous ces triangles est une circonférence ayant pour rayon l'excès du rayon du cercle circonscrit sur le diamètre du cercle inscrit. (G. Salmon.)

SOLUTION DES QUESTIONS 517, 518, 519 ET 520

(voir p. 95 et 96) ;

Par M. Honoré PRAT (*),
Élève de l'institution Royé-Micé à Bordeaux.

Solution de la question 517.

1°. L'équation de la normale est

$$y = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} x - \frac{c^2 y'}{b^2}.$$

Je cherche les intersections de cette droite avec les axes ; j'obtiens

$$y = \frac{-c^2 y'}{b^2}, \quad x = \frac{c^2 x'}{a^2}.$$

(*) Résolues également par MM. L. Marc, élève du lycée de Caen, Ed. Gressier, élève du collége Stanislas, Jules Faure, élève de l'institution Meyer.

Le segment intercepté par les deux axes a pour expression

(1) $$\sqrt{\frac{c^4 y'^2}{b^4} + \frac{c^4 y'^2}{a^4}} = \frac{c^2}{a^2 b^2} \sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}.$$

La tangente a pour équation

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2.$$

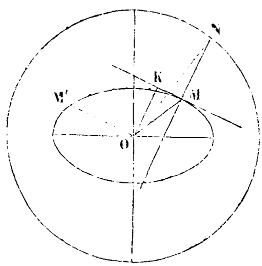
La longueur de la perpendiculaire abaissée du centre est

(2) $$\frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}.$$

En multipliant l'équation (1) par l'équation (2), on obtient un produit constant c^2.

2°. Si l'on joint le point O aux points M et N et si l'on

FIG. 1.



mène le diamètre M'O parallèle à la tangente, en désignant par θ l'angle M'OM, on a dans le triangle OMN

$$(a + b)^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2 - 2\,OM.MN \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right),$$

MN est normale.

Mais, M'O et OM formant un système de diamètres conjugués, on sait que

$$(a + b)^2 = \overline{OM}^2 + \overline{M'O}^2 - 2\,OM.MN \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right);$$

donc

$$MN = OM',$$

c'est-à-dire le demi-diamètre parallèle à la tangente. On trouve aisément que OM' a pour expression $\dfrac{\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}}{ab}$ en cherchant l'intersection de la droite $y = -\dfrac{b^2x'}{\quad}, x$ avec l'ellipse.

La multiplication de OM' par $p = \dfrac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}}$ donne la constante ab.

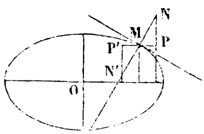
Solution de la question 518 (*).

Soient x et y les coordonnées des points N et N', et

$$MN = MN' = \frac{K^2\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}}{a^2b^2},$$

où K^2 est la quantité constante.

FIG. 2.



Il est évident sur la figure que

$$x = x' \pm MN \cos NMP,$$

$$y = y' \pm MN \sin NMP,$$

x' et y' sont les coordonnées de M,

Eu remplaçant MN par sa valeur, et cos NMP, sin NMP

(*) Cette question a été aussi résolue par M. L. Blanché-Arnault, élève du lycée Louis-le-Grand.

par leurs valeurs $\frac{a^2 y'}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}$ et $\frac{b^2 x'}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}$, on obtient

$$(1) \quad x = x' \pm \frac{K^2 x'}{a^2} = \frac{(a^2 \pm K^2) x'}{a^2}, \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{a^2 X}{a^2 \pm K^2},$$

$$(2) \quad y = y' \pm \frac{K^2 y'}{b^2} = \frac{(b^2 \pm K^2) y'}{b^2}, \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{b^2 y}{b^2 \pm K^2}.$$

Substituant x', y' dans

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

on a

$$(3) \qquad \frac{a^2 x^2}{(a^2 \pm K^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 \pm K^2)^2} = 1.$$

L'équation (3) représente deux ellipses confocales, comme il est facile de s'en assurer en formant les différences des carrés des deux axes.

Solution de la question 519.

Soient (x', y'), $\left(\frac{a'}{a} x', \frac{b'}{b} y'\right)$ deux points correspondants, (x_1, y_1) les coordonnées du milieu M.

On a

$$(1) \qquad x_1 = \frac{x' + \frac{a'}{a} x'}{2} = \frac{(a + a') x'}{2a},$$

$$(2) \qquad y_1 = \frac{(b + b') y'}{2b}.$$

Pour avoir le lieu des points M, je remplace x' et y' par leurs valeurs tirées de l'équation (1) et (2) dans

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

J'obtiens

$$(3)\qquad \frac{4x_1^2}{(a+a')^2}+\frac{4y_1^2}{(b+b')^2}=1,$$

équation d'une ellipse.

La droite

$$y-y'=\frac{\frac{b'}{b}y'-y'}{\frac{a'}{a}x'-x'}(x'-x')$$

est normale à cette ellipse. En effet, si on remplace x' et y' par leurs valeurs, on a

$$y-\frac{2by_1}{b+b'}=\frac{(b'-b)(a+a')}{(a'-a)(b+b')}\frac{y_1}{x_1}\left(x-\frac{2ax_1}{a+a'}\right).$$

En tenant compte de la relation $a^2-b^2=a'^2-b'^2$ qui exprime que les ellipses données sont homofocales, on a

$$y=\frac{(a+a')^2}{(b+b')^2}\frac{y_1}{x_1}x+\frac{2by_1}{b+b'}-\frac{2ay_1(a+a')}{(b+b')^2},$$

ou enfin

$$(4)\qquad y=\frac{(a+a')^2}{(b+b')^2}\frac{y_1}{x_1}x-\frac{c'^2y_1}{(b+b')^2},$$

c'^2 étant égal à $(a+a')^2-(b+b)^2$.

Cette équation (4) est précisément celle de la normale à l'ellipse (3) au point (x_1, y_1), comme il est facile de s'en assurer en la formant directement.

Solution de la question 520.

Correction. ms_1 doit être pris égal au demi-diamètre, parallèle à la tangente et non à la normale.

Il faut démontrer l'égalité

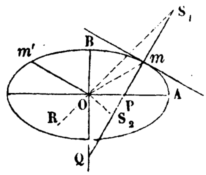
$$(1)\qquad PS_2\times QS_1 = PS_1\times QS_2.$$

On a

$$\mathrm{PS}_2 = (m\mathrm{S}_2 - \mathrm{P}m), \quad \mathrm{QS}_1 = (m\mathrm{S}_2 + \mathrm{Q}m),$$

$$\mathrm{PS}_1 = (m\mathrm{S}_2 + \mathrm{P}m), \quad \mathrm{QS}_2 = (\mathrm{Q}m - m\mathrm{S}_2).$$

Fig. 3.



En remplaçant dans l'égalité (1), on obtient

$$(m\mathrm{S}_2 - \mathrm{P}m)(m\mathrm{S}_2 + \mathrm{Q}m) = (m\mathrm{S}_2 + \mathrm{P}m)(\mathrm{Q}m - m\mathrm{S}_2),$$

ou bien

(2) $$\overline{m\mathrm{S}}_2^2 = \mathrm{P}m.\mathrm{Q}m.$$

Or

$$\overline{m\mathrm{S}}_2^2 = \overline{m'\mathrm{O}}^2 = \frac{a^4y'^2 + b^4x'^2}{a^2b^2},$$

$$\mathrm{P}m = \sqrt{\left(x' - \frac{c^2x'}{a^2}\right)^2 + y'^2} = \frac{\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}}{a^2};$$

de même

$$\mathrm{Q}m = \frac{\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}}{b^2}.$$

En substituant, on voit que l'égalité (2) est vérifiée.

C. Q. F. D.

Les lieux de S_1 et S_2 sont deux cercles concentriques à l'ellipse décrits avec les rayons $(a \pm b)$. On peut le démontrer directement ou considérer la question comme un cas particulier de la question 518.

Dans l'équation

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 \pm K^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 \pm K^2)^2} = 1 \quad \text{(voir } \textit{solution } \mathbf{518}\text{)},$$

il suffit de faire

$$K^2 = ab,$$

et on obtient

$$x^2 + y^2 = (a \pm b)^2.$$

C. Q. F. D.

Remarque. La question n'est qu'un corollaire du problème de la détermination des axes d'une ellipse, connaissant deux diamètres conjugués et leur angle.

On sait, en effet, que les axes OA et OB sont les bissectrices de S_2OS_1 et S_2OR, angles intérieur et extérieur du triangle S_2OS_1. Donc les quatre points Q, S_2, P, S_1, divisent harmoniquement le côté QS_1.

On sait aussi que OS_1 est égal à $(a+b)$ et OS_2 à $(a-b)$. Donc les points S_1 et S_2 sont sur les cercles décrits du centre avec $(a+b)$ ou $(a-b)$ pour rayon.

Note. Ces questions ont été résolues pour l'ellipsoïde, par M. Jules Faure, élève de l'institution Mayer.

Ellipsoïde.

1°. Le segment intercepté sur une normale quelconque à un ellipsoïde par deux des plans principaux étant multiplié par la distance p du centre au plan tangent adjacent à la normale, donne un produit constant.

Soit l'ellipsoïde rapporté à ses axes, en un point x, y, le plan tangent a pour équation

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

Au même point, les équations de la normale sont :

$$a^2\frac{X-x}{x}=b^2\frac{Y-y}{y}=c^2\frac{Z-z}{z},$$

au point où la normale perce le plan zoy pour

$$X=o,\quad Y=y\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right),\quad Z=z\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right);$$

au point où elle perce ZoX pour

$$Y=o,\quad X=x\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right),\quad Z=z\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right).$$

La distance de ces deux points est

$$\sqrt{x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^3+y^2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)^2+z^2\left(\frac{a^2}{c^2}-\frac{b^2}{c^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)(a^2-b^2)^2};$$

la distance de l'origine au plan tangent,

$$p=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Le produit de ces distances $=a^2-b^2$.

De même, si l'on avait pris le segment de la normale compris entre zox et xoy, le produit aurait été

$$b^2-c^2.$$

Enfin, si l'on avait considéré le segment compris entre xoy et yoz, ce produit aurait été

$$a^2-c^2.$$

2°. Pour l'ellipsoïde, si l'on prolonge une normale quelconque à un ellipsoïde dont les axes sont $2a$, $2b$, $2c$, jusqu'à un ellipsoïde de révolution de mêmes plans principaux, dont les axes sont, par exemple, $2(a+b)$ pour les deux axes situés dans xoy, $2\left(c+\frac{ab}{c}\right)$ pour celui qui est dirigé suivant oz, le produit du segment de la normale compris entre les deux ellipsoïdes par la perpendiculaire p abaissée du centre sur le plan tangent adjacent à la normale est constant.

En suivant la même marche que pour l'ellipse, on arrive à une équation en k

$$\frac{x^2\left(1+\frac{k}{a^2}\right)}{(a+b)^2}+\frac{y^2\left(1+\frac{k}{b^2}\right)}{(a+b)^2}+\frac{z^2\left(1+\frac{k}{c^2}\right)}{\left(c+\frac{ab}{c}\right)}=1,$$

qui est vérifiée pour $k=ab$, h étant le produit cherché.

Dans le cas où l'ellipsoïde proposé serait de révolution, par exemple pour $a=c$, le second ellipsoïde deviendrait une sphère de rayon $a+b$.

Même résultat en prenant $a-b$, $c-\frac{ab}{c}$ pour axes.

3°. Si l'on porte sur une normale quelconque à un ellipsoïde, de part et d'autre de son origine, deux longueurs MN_1, MN_2 telles, que le produit de MN_1 ou de MN_2 par p soit constant, les lieux des points N_1, N_2 sont deux ellipsoïdes confocaux de même centre que l'ellipsoïde donné.

En suivant la même marche que pour l'ellipse, on trouve pour équations de ces deux lieux

$$\frac{X^2}{\left(a\pm\frac{k}{a}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(b\pm\frac{k}{b}\right)^2}+\frac{Z^2}{\left(c\pm\frac{k}{c}\right)^2}=1.$$

On voit d'ailleurs que pour $k=ab$, on trouve les deux ellipsoïdes de révolution indiqués plus haut, qui deviennent des sphères si $c = a$ ou b.

4°. *Ellipse.* Soient P, Q, les intersections respectives d'une normale par les axes a, b; si à partir de l'origine M de la normale on porte des longueurs égales entre elles MS_1, MS_2, telles que MS_1 soit égale au demi-diamètre parallèle à la tangente adjacente à cette normale, les quatre points S_1, P, S_2, Q, sont placés harmoniquement; les lieux de S_1, S_2 sont deux cercles concentriques à l'ellipse, de rayons $a + b$.

La tangente à un point x, y de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a pour coefficient angulaire $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$, le diamètre parallèle est

$$Y = -\frac{b^2 x}{a^2 y} X, \tag{1}$$

les coordonnées X, Y de son intersection avec l'ellipse vérifient aussi

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Des équations (1), (2), on tire

$$X^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^4 y^2} \right) = 1,$$

$$X^2 = \frac{a^4 y^2}{a^2 y^2 + b^2 x^2} = \frac{a^2 b^2 \frac{y^2}{b^4}}{\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}};$$

de même

$$Y^2 = \frac{a^2 b^2 \frac{x^2}{a^4}}{\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}},$$

et

$$X^2 + Y^2 = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right).$$

Tel est le carré de la longueur du demi-diamètre. Les coordonnées des points S_1, S_2, satisferont l'équation de la normale

$$\text{(3)} \qquad \frac{X - x}{\dfrac{x}{a^2}} = \frac{Y}{\dfrac{y}{b^2}}.$$

On aura en outre, puisque $MS_1 = MS_2 =$ le demi-diamètre

$$\text{(4)} \qquad (X - x)^2 + (Y - y)^2 = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y_2}{b^4}\right).$$

De ces équations on déduit

$$(X - x)^2 \left(1 + \frac{a^4 y^2}{b^4 x^4}\right) = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right),$$

d'où

$$X = x\left(1 \pm \frac{b}{a}\right);$$

de même

$$Y = y\left(1 \pm \frac{a}{b}\right),$$

pour P

$$X = x\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right), \quad Y = 0,$$

pour Q

$$X = 0, \quad Y = y\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right),$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\overline{S_1 P}^2 &= x^2 \left[\left(1 + \frac{b}{a}\right) - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\right]^2 + y^2 \left(1 + \frac{a}{b}\right)^2 \\ &= b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)(a + b)^2,\end{aligned}$$

et

$$\overline{S_2P}^2 = x^2\left[\left(1+\frac{b}{a}\right)-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right]^2 + y^2\left(1+\frac{a}{b}\right)^2$$

$$= b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)(a-b)^2,$$

de même

$$\overline{S_1Q}^2 = x^2\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 - y^2\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\right]^2$$

$$= a^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)(a+b)^2,$$

$$\overline{S_2Q}^2 = x^2\left(1+\frac{b}{a}\right)^3 - y^2\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\right]^2$$

$$= a^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)(a-b)^2,$$

$$\frac{S_1P}{S_1Q}=\frac{S_2P}{S_2Q}=\frac{b}{a}.$$

Les deux points S_1, S_2, divisent la ligne P, Q dans le même rapport, par conséquent S_1, P, S_2, Q sont placés harmoniquement; car en admettant un sens positif et un sens négatif sur la normale, comme P_2 est entre P et Q, S_2P sera de sens contraire des autres longueurs. On aura donc

$$\frac{S_1P}{S_1Q}:\frac{S_2P}{S_2Q}=-1.$$

S_2 est entre P et Q, car

$$MP=\frac{b^4}{a^4}x^2+y^2,$$

$$MS_2=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)=MP\times\frac{a^3}{b^2},$$

$$MS_1=MS=ab\sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)}.$$

Or, la longueur du segment de normale intercepté par le cercle de rayon $a \pm b$ est aussi $\pm ab\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}$, donc les lieux de S_n, S_2, sont ces deux circonférences. Pour l'ellipsoïde, on prend MS_1 égal à un demi-diamètre, quatrième proportionnelle de μ; et par exemple a, b, et au lieu du cercle, l'ellipsoïde de révolution $a+b$ a été $\frac{c^2+ab}{i}$.

M. Saphore, élève du lycée de Douai, a résolu de même ces diverses questions.

QUESTIONS.

528. Le nombre figuré par 1121 ne peut être un carré parfait dans aucun système de numération.

(ROUCHÉ, professeur.)

529. Deux cubes étant premiers entre eux et se terminant (à droite) par les trois mêmes derniers chiffres significatifs, démontrer que les deux racines cubiques ont aussi les trois derniers chiffres communs dans un système quelconque de numération.

(ROUCHÉ, professeur.)

530.

$$\frac{\sin P}{\sin Q} = \tang\varphi;$$

d'où

$$\tang\frac{P-Q}{2}\tang\frac{P+Q}{2} = \tang(\varphi - 45).$$

531. Soit A l'aire d'un polygone régulier circonscrit à un cercle, A' l'aire du polygone semblable inscrit, l'aire du cercle est comprise entre A et $A - \frac{1}{3}(A - A')$.

(HUYGHENS.)

532. Soit A l'aire d'un polygone régulier de $2n$ côtés inscrit dans un cercle, A' l'aire d'un polygone régulier inscrit d'un nombre n de côtés, l'aire du cercle est comprise entre A et $A + \frac{1}{3}(A - A')$.

(HUYGHENS.)

533. Soient deux cercles *égaux* dans le même plan; P un point variable duquel on mène des tangentes aux cercles et dont le produit est constant. Le lieu de ce point est la podaire du centre d'une ellipse.

534. Soient $y^m = F(x)$ l'équation d'une courbe algébrique; $y - y_1 = F'(x_1)(x - x_1)$ l'équation d'une tangente au point $x_1 y_1$; X, Y un point quelconque de cette tangente. $\frac{Y^m}{F(X)}$ est un maximum ou un minimum lorsque $Y = y_1$, $X = x_1$.

(DUHAMEL.)

SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET DE NEWTON (*);

PAR M. ABEL TRANSON.

---

1. Il faut, de la formule de Lagrange, déduire celle de Newton, lorsque les nombres $x_0, x_1, \ldots, x_m$ forment une progression arithmétique.

Cette déduction consistera à faire voir que si, dans la formule de Lagrange, on remplace $u_1, u_2, \ldots, u_m$, par leurs valeurs en fonction de u_0 et de ses différences, le

---

(*) *Voir* t. XVI, p. 237, 398; t. XVIII, p. 26 à 193.

coefficient d'une différence d'ordre quelconque sera, pour la circonstance indiquée, le même que dans la formule de Newton. Le calcul s'appliquera d'ailleurs au cas où l'indice de la différence dont on étudie le coefficient est nul, c'est-à-dire qu'elle s'appliquera au coefficient de u_0 ; car u_0 est représenté par $\Delta_0\, u_0$.

2. Pour abréger l'écriture, je représenterai un produit de facteurs qui croissent en progression arithmétique et qui sont en nombre n, tel que le produit $a(a+h)\ldots[a+(n-1)h]$ par le symbole usité $a^{n/h}$; et le produit de n facteurs décroissants, tel que $a(a-h)\ldots[a-(n-1)h]$ par $a^{n/-h}$. Et à ce sujet je rappellerai qu'on a la formule suivante

$$(a-b)^{n/h} = a^{n/h} - \frac{n}{1}\, b^{1/-h}\, a^{n-1/h} + \frac{n.n-1}{1.2}\, b^{2/-h}\, a^{n-2/h}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Priant le lecteur d'observer que les facteurs qui commencent par a dans chaque terme sont *croissants* au lieu que ceux dont le premier est b sont *décroissants.*

3. Je vais calculer le coefficient de $\Delta_p u_0$, et je remarque premièrement que par la substitution des valeurs de $u_1, u_2 \ldots u_m$ en fonction de u_0, $\Delta u_0, \ldots, \Delta_m u_0$, la différence $\Delta p\, u_0$ ne s'introduira que par la valeur de u_p et par celles de $u_{p+1}, \ldots$, jusqu'à u_m.

C'est pourquoi, avant de faire cette substitution, je vais transformer les coefficients fractionnaires de la formule de Lagrange, mais seulement à partir du terme qui contient u_p.

4. Tous les coefficients, à partir de celui de u_p, ont en facteur commun au numérateur le produit

$$(\alpha) \qquad (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{p-1}).$$

Ensuite le numérateur de l'un de ces coefficients, de celui par exemple qui multiplie u_{p+n}, se complète par cet autre produit

$$(x-x_p)\ldots(x-x_{p+n-1})(x-x_{p+n+1})\ldots(x-x_m).$$

Ce nouveau produit contient $m-p$ facteurs; je le décompose en deux autres : l'un formé de n facteurs décroissants, savoir :

$$(x-x_p)\ldots(x-x_{p+n-1}),$$

et l'autre de $m-n-p$ croissants, savoir :

$$(x-x_m)(x-x_{m-1})\ldots(x-x_{p+n+1}).$$

Donc je puis dire, en employant les symboles convenus, que le coefficient de u_{p+m} a pour numérateur le produit ci-dessus (α) multiplié par l'expression suivante :

$$(x-x_p)^{n/-h}.(x-x_m)^{m-p-u/h}.$$

5. Considérons maintenant le dénominateur de u_{p+n}, c'est-à-dire le produit

$$(x_{p+n}-x_0)\ldots(x_{p+n}-x_{p+n-1})(x_{p+n}-x_{p+n+1})\ldots(x_{p+n}-x_m).$$

D'après la relation qui est entre les $x_0, x_1, \ldots, x_m$, tous ces binômes en nombre m contiennent le facteur h; de plus les $m-p-n$ derniers, c'est-à-dire les binômes à partir de $x_{p+n}-x_{p+n+1}$, sont négatifs. Ce produit reçoit donc la forme suivante :

$$(-1)^{m-p-n}.h^m.(p+n)(p+n-1)\ldots 2.1.1.2\ldots(m-p-n).$$

Mais pour mettre en évidence ce qui est commun à tous ces dénominateurs, j'écris la même expression comme il suit :

$$(-1)^{m-p}.h^m.(1.2\ldots p)(1.2\ldots m-p)$$
$$\times\frac{(p+1)\ldots(p+n)}{(-1)^n(m-p-n+1)\ldots(m-p)}.$$

6. Finalement le coefficient de u_{p+n} se compose : 1° d'un facteur commun à tous les coefficients à partir de u_p, et que voici :

$$(\beta)\qquad \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots[x-x_0-(p-1)h]}{(-1)^{m-p}.h^m.(1.2\ldots p)[1.2\ldots(m-p)]}$$

et 2° du facteur suivant qui lui est propre

$$(-1)^n\frac{(m-p)(m-p-1)\ldots(m-p-n+1)}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}$$
$$\times(x-x_p)^{n/-h}(x-x_m)^{m-p-n/h}.$$

7. Donc la formule de Lagrange reçoit des relations prescrites une première transformation telle que l'ensemble des termes à partir de celui qui contient u_p jusqu'au dernier, se trouve égal au facteur ci-dessus (β) multiplié par la suite des termes que voici :

$$(x-x_m)^{m-p/h}u_p-\frac{m-p}{p+1}(x-x_p)^{1/-h}(x-x_m)^{m-p-1/h}u_{p+1}$$
$$+\frac{(m-p)(m-p-1)}{(p+1)p+2}(x-x_p)^{2/-h}$$
$$\times(x-x_m)^{m-p-2/h}u_{p+2}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

8. Et maintenant il est manifeste que pour avoir le terme en $\Delta_p u_0$ il faudra multiplier le même facteur (β) par la suite précédente dans laquelle on aura rem-

placé

$$u_p \quad \text{par} \quad \Delta_p u_0,$$

$$u_{p+1} \quad \text{par} \quad \frac{p+1}{1} \Delta_p u_0,$$

$$u_{p+2} \quad \text{par} \quad \frac{(p+2)(p+1)}{1.2} \Delta_p u_0.$$

. . . .

Mais alors cette suite devient égale au produit de $\Delta_p u_0$ par

$$(x - x_m)^{m-p/h} - \frac{m-p}{1}(x - x_p)^{1/-h}(x - x_m)^{m-p-1/h}$$

$$+ \frac{(m-p)(m-p-1)}{1.2}(x - x_p)^{2/-h}(x - x_m)^{m-p-2/h} - \ldots$$

c'est-à-dire par

$$[x - x_m - (x - x_p)]^{m-p/h} = (x_p - x_m)^{m-p/h},$$

expression égale à

$$(-1)^{m-p}.h^{m-p}(m-p)(m-p-1)\ldots 2.1.$$

Si on la combine avec le facteur (β), on reconnaîtra que le coefficient de $\Delta_p u_0$ dans la formule de Lagrange transformée est égal à

$$\frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)\ldots[x - x_0 - (p-1)h]}{(1.2.3\ldots p)h^p},$$

ce qui est précisément son coefficient dans la formule de Newton.

LIEU DES POLES DES CORDES

qui dans les courbes du second degré joignent les pieds des normales à ces courbes menées d'un point de la développée. — Théorèmes;

PAR M. DESBOVES.

Ellipse. Rappelons d'abord les formules de la page 51

$$(1)\qquad y=\frac{c^2\beta(\alpha^2-a^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2},\quad x=\frac{c^2\alpha(b^2-\beta^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}\ (*).$$

a, b, c ont leur signification ordinaire dans les coniques à centre, α et β sont les coordonnées du pôle d'une corde quelconque de l'ellipse, et x et y celles du point d'intersection des normales menées par les extrémités de la corde.

On aura immédiatement l'équation du lieu demandé, en remplaçant, dans l'équation de la développée de l'ellipse

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

x et y par les valeurs que donnent les formules (1). On obtient ainsi pour équation du lieu

$$(2)\qquad [a\alpha(b^2-\beta^2)]^{\frac{2}{3}}+[b\beta(\alpha^2-a^2)]^{\frac{2}{3}}=(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)^{\frac{2}{3}}.$$

En chassant les radicaux on trouverait une équation du 18^e degré, c'est-à-dire que le degré atteint le maximum fixé par le théorème II (p. 45).

Mais cette équation peut se décomposer en facteurs.

(*) *Voyez* la note page 268.

En effet, posant

$$\alpha = a\rho\cos\omega, \quad \beta = b\rho\sin\omega,$$

et faisant disparaître les radicaux, on obtient

$$\begin{aligned} & 27\rho^2\sin^2\omega\cos^2\omega\,(\rho^2 - 1 - \rho^4\sin^2\omega\cos^2\omega)^2 \\ & = (\rho^2 - 1 - \rho^4\sin^2\omega\cos^2\omega + 4\rho^2\sin^2\omega\cos^2\omega)^3, \end{aligned}$$

et si l'on pose

$$\rho^2\sin^2\omega\cos^2\omega = u, \quad \rho^2 - 1 = z,$$

il vient

$$z(1-u)[z(1-u) - 9u]^2 = 0.$$

Le lieu cherché se compose donc des trois courbes

$$z = 0, \quad u = 1, \quad z = \frac{9u}{1-u};$$

si l'on remet pour z et u leurs valeurs en ρ, $\sin\omega$ et $\cos\omega$, puis pour ces dernières quantités leurs valeurs en α et β, on obtient pour équations en coordonnées rectangulaires

$$(3) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - 1 = 0,$$

$$(5) \qquad \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - 1\right) = 9.$$

En laissant de côté la solution qui donne la courbe elle-même, on voit que le lieu se compose de deux courbes distinctes (4) et (5), faciles à construire (*).

(*) La construction de la courbe (5) se ramène facilement à celle de la courbe dont l'équation polaire est

$$\cos 4\omega = \frac{\rho^4 + 8}{\rho^2(\rho^2 + 8)}.$$

Il reste à expliquer pourquoi on trouve deux courbes. Pour cela nous allons déterminer successivement les lieux des cordes qui joignent, les premières, les pieds d'une normale double et d'une normale simple, et, les secondes, les pieds des deux normales simples, et on verra que les deux lieux ont précisément pour équation les équations (5) et (4). (J'appelle normale *double* celle des trois normales qui est tangente à la développée au point de départ, et normales *simples* les deux autres.)

Déterminons un point X, Y de l'ellipse par des équations de la forme $X = a\cos\varphi$, $Y = b\sin\varphi$. L'angle d'anomalie φ caractérisera alors un point de l'ellipse que nous appellerons, pour abréger, le point φ.

Soient x', y' les coordonnées du point de la développée d'où l'on mène les trois normales, φ' le pied de la normale double et φ'', φ''' les pieds des deux normales simples. Soient aussi α', β' les coordonnées du pôle d'une corde de l'ellipse qui passe par deux points φ' et φ'', et x et y les coordonnées du point d'intersection des normales menées par les extrémités de la même corde.

L'équation de la corde $(\varphi'\varphi'')$ sera

$$(6) \qquad \frac{\cos\varphi' - \cos\varphi''}{\sin(\varphi'' - \varphi')}\,\frac{y}{b} - \frac{\sin\varphi' - \sin\varphi''}{\sin(\varphi'' - \varphi')}\,\frac{x}{a} = 1,$$

et on aura les coordonnées du pôle de la corde par les équations

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha'}{a} &= \frac{\sin\varphi'' - \sin\varphi'}{\sin(\varphi'' - \varphi')}, \\ \frac{\beta'}{b} &= -\frac{\cos\varphi'' - \cos\varphi'}{\sin(\varphi'' - \varphi')}. \end{aligned} \right.$$

Si d'un autre côté on cherche les coordonnées du point x, y, point d'intersection des normales menées par les points φ', φ'', il vient

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} y &= \frac{c^2 \sin\varphi' \sin\varphi'' (\cos\varphi'' - \cos\varphi')}{b \sin(\varphi'' - \varphi')}, \\ x &= \frac{c^2 \cos\varphi' \cos\varphi'' (\sin\varphi'' - \sin\varphi')}{a \sin(\varphi'' - \varphi')}. \end{aligned}\right.$$

En faisant dans les équations précédentes $\varphi' = \varphi''$, on trouve pour les coordonnées x', y' du point de la développée correspondant au point φ'

$$(9)\qquad x' = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi', \quad y' = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi';$$

mais les points x, y étant sur la développée, on a

$$x' = x, \quad y' = y,$$

et par suite il vient

$$(10)\quad \frac{\sin\varphi'' - \sin\varphi'}{\sin(\varphi'' - \varphi')} = \frac{\cos^2\varphi'}{\cos\varphi''}, \quad \frac{\cos\varphi'' - \cos\varphi'}{\sin(\varphi'' - \varphi')} = -\frac{\sin^2\varphi'}{\sin\varphi''},$$

ou

$$(11)\qquad \sin\varphi''\cos^3\varphi' + \sin^3\varphi'\cos\varphi'' - \cos\varphi''\sin\varphi'' = 0.$$

Remplaçant maintenant dans cette dernière équation $\sin\varphi''$ par sa valeur $\sqrt{1 - \cos^2\varphi''}$, faisant disparaître le radical et divisant les deux membres de l'équation résultante par le facteur double $(\cos\varphi'' - \cos\varphi')^2$, il viendra

$$(12)\qquad \cos^2\varphi'' + 2\cos\varphi'\sin^2\varphi'\cos\varphi'' - \cos^4\varphi' = 0,$$

et une équation semblable en changeant φ'' en φ'''.

D'ailleurs, en vertu des équations (10), les équations (7) deviennent

$$(13)\qquad \frac{\alpha'}{a} = \frac{\cos^2\varphi'}{\cos\varphi''}, \quad \frac{\beta'}{b} = \frac{\sin^2\varphi'}{\sin\varphi''}.$$

Nous pouvons maintenant obtenir séparément les deux lieux, et d'abord le premier.

Pour cela, remplaçons dans les équations (11) et (12) $\cos\varphi''$ et $\sin\varphi''$ par leurs valeurs tirées des équations (13), il viendra

$$(14)\quad \frac{\alpha'}{a}\cos\varphi' + \frac{\beta'}{b}\sin\varphi' = 1,\quad \frac{a}{\alpha'}\cos\varphi' + \frac{b}{\beta'}\sin\varphi' = -1,$$

et éliminant $\cos\varphi'$ et $\sin\varphi'$ entre ces équations et l'équation

$$\sin^2\varphi' + \cos^2\varphi' = 1,$$

on aura

$$(b^2\alpha'^2 - a^2\beta'^2)^2 = a^2\alpha'^2(b^2 + \beta'^2)^2 + b^2\beta'^2(\alpha^2 + \alpha'^2)^2,$$

et il est facile de voir que cette équation peut se ramener à la forme

$$\left(\frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{a^2}{\alpha'^2} + \frac{b^2}{\beta'^2} - 1\right) = 9,$$

sous laquelle nous l'avons d'abord trouvée.

Cherchons maintenant le second lieu. Soient α'', β'' les coordonnées du pôle des cordes $(\varphi''\varphi''')$. Si dans les équations (7) et (8) on remplace α', β', φ' par α'', β'', φ'' et que x et y représentent maintenant les coordonnées du point d'intersection des normales menées par les points φ'', φ''', on déduira de ces équations

$$y = -\frac{c^2}{b^2}\beta''\sin\varphi''\sin\varphi''',\quad x = \frac{c^2}{a^2}\alpha''\cos\varphi''\cos\varphi'''.$$

En égalant les valeurs précédentes de y et x respectivement à $-\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi'$ et $\frac{c^2}{a}\cos^3\varphi'$, il vient

$$(15)\quad \frac{b}{\beta''}\sin^3\varphi' = \sin\varphi''\sin\varphi''',\quad \frac{a}{\alpha''}\cos^3\varphi' = \cos\varphi''\cos\varphi''';$$

mais l'équation (12) étant une équation du second degré en $\cos\varphi''$ qui admet à la fois pour racines $\cos\varphi''$ et $\cos\varphi'''$,

on a

(16) $$\cos\varphi''\cos\varphi''' = -\cos^4\varphi',$$

et par un calcul semblable on a de même

(17) $$\sin\varphi''\sin\varphi''' = -\sin^4\varphi';$$

remplaçant maintenant dans les équations (15) $\cos\varphi''\cos\varphi'''$, $\sin\varphi''\sin\varphi'''$ par les valeurs que donnent les équations précédentes, il vient

(18) $$\frac{a}{\alpha''} = -\cos\varphi', \quad \frac{b}{\beta''} = -\sin\varphi',$$

et par suite

$$\frac{a^2}{\alpha''^2} + \frac{b^2}{\beta''^2} = 1.$$

C'est ce qu'il fallait trouver.

Nous allons donner maintenant deux équations très-simples qui lient entre eux, la première, les angles φ' et φ'', et la seconde, les angles φ'' et φ'''.

En complétant deux carrés dans le premier membre de l'équation (12), on a

$$(\cos\varphi' + \cos\varphi'')^2\sin^2\varphi' = \cos^2\varphi'\sin^2\varphi'';$$

mais si on était parti de l'équation en $\sin\varphi''$, analogue à l'équation (12), on aurait eu de même

$$(\sin\varphi' + \sin\varphi'')^2\cos^2\varphi' = \sin^2\varphi'\cos^2\varphi'',$$

en extrayant les racines, on a donc

$$-\sin\varphi'\cos\varphi' = \sin(\varphi' \pm \varphi''), \qquad -\sin\varphi'\cos\varphi' = \sin(\varphi'' \pm \varphi').$$

Pour que les résultats donnés par ces dernières équations soient d'accord, on doit avoir

(19) $$-\sin\varphi'\cos\varphi' = \sin(\varphi' + \varphi''):$$

c'est la première équation que nous voulions obtenir.

On aurait évidemment de même

$$-\sin\varphi'\cos\varphi' = \sin(\varphi' + \varphi'''),$$

et par suite

$$\sin(\varphi' + \varphi'') = \sin(\varphi' + \varphi''').$$

Mais pour que deux arcs aient le même sinus, il faut que leur différence soit un nombre pair ou que leur somme soit un nombre impair de demi-circonférences. Or la première hypothèse doit être rejetée, puisque les deux arcs φ'' et φ''' étant tous deux plus petits que 2ϖ ou au plus égaux à 2ϖ (ce qu'on peut toujours supposer en géométrie), leur différence est toujours inférieure à 2ϖ. Cela a lieu aussi d'ailleurs dans le cas où l'un des angles est nul, parce qu'alors l'autre est nécessairement égal à ϖ. La seule hypothèse possible est donc, en représentant par $2k+1$ un nombre impair quelconque,

$$2\varphi' + \varphi'' + \varphi''' = (2k+1)\varpi.$$

De l'équation précédente on tire

$$\cos(\varphi' + \varphi''') = -\cos 2\varphi',$$

$$[(1 + \cos(\varphi'' + \varphi'''))]^2 = 4\sin^4\varphi' = -4\sin\varphi''\sin\varphi''',$$

$$(20) \qquad \cos^4\frac{\varphi'' + \varphi'''}{2} + \sin\varphi''\sin\varphi''' = 0;$$

l'équation (20) est la seconde équation demandée.

Les équations (19) et (20) peuvent être utiles dans la résolution de plusieurs problèmes.

Hyperbole. Les deux méthodes sont applicables; seulement, dans la seconde, on détermine un point X, Y de l'hyperbole par des équations

$$X = a\,\text{séc}\varphi, \quad Y = b\,\text{tang}\varphi.$$

Parabole. On trouve l'équation du lieu par la première méthode, c'est-à-dire en substituant dans l'équation de la développée

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3,$$

les valeurs de y et de x données par les formules

$$y = -\frac{2\alpha\beta}{p}, \quad x = \frac{2\beta^2 - \alpha p + p^2}{p} \quad \text{(page 51)};$$

on a ainsi l'équation

$$(\beta^2 - 2p\alpha)(4\beta^2 + p\alpha)^2 = 0;$$

le lieu est donc la parabole

$$4\beta^2 + p\alpha = 0.$$

On peut aussi résoudre la question en supposant un point de la parabole déterminé par des équations

$$X = 2p\,\text{tang}^2\varphi, \quad Y = 2p\,\text{tang}\,\varphi.$$

En désignant par φ' et φ'' les angles qui déterminent les pieds de la normale double et de la normale simple, on voit immédiatement qu'on est ramené à éliminer tangφ' et tangφ'' entre les trois équations

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2p\,\text{tang}\,\varphi'\,\text{tang}\,\varphi'', \quad \beta = p(\text{tang}\,\varphi' + \text{tang}\,\varphi''), \\ \qquad 2\,\text{tang}\,\varphi' + \text{tang}\,\varphi'' = 0. \end{array} \right.$$

THÉORÈMES.

I. X', Y' étant les coordonnées du pied de la normale double dans l'ellipse, si on remplace dans les équations (14) $\cos\varphi'$ et $\sin\varphi'$ par $\frac{X'}{a}$, $\frac{Y'}{b}$, il vient

$$\frac{\alpha' X'}{a^2} + \frac{\beta' Y'}{b^2} = 1, \quad \frac{-X'}{\alpha'} + \frac{-Y'}{\beta'} = 1,$$

d'où résulte ce théorème :

Si on projette un point de la courbe (5) *sur les deux axes de l'ellipse, la ligne droite qui joint les deux projections passe toujours par le point de l'ellipse diamétralement opposé au pied de la normale double correspondante.*

II. Si on remplace dans les équations (18) $\cos\varphi'$ et $\sin\varphi'$ par leurs valeurs $\frac{X'}{a}$, $\frac{Y'}{b}$, il vient

$$a^2 = -X'\alpha'', \quad b^2 = -Y'\beta'',$$

et on a le théorème suivant :

Si on projette un point de la courbe (4) *sur les deux axes de l'ellipse, la ligne qui joint les projections touche l'ellipse donnée en un point diamétralement opposé au pied de la normale double correspondant au point de la courbe* (4).

Les mêmes théorèmes ont lieu pour l'hyperbole.

III. Les équations (21), dans lesquelles on remplace $\tang\varphi'$ par $\frac{Y'}{2p}$, $\tang^2\varphi'$ par $\frac{X'}{2p}$, donnent évidemment

$$\beta = -\frac{Y'}{2}, \quad \alpha = -2X'.$$

De là on déduit facilement ce théorème :

Si on mène une tangente quelconque à la parabole et qu'on la prolonge, à partir de sa rencontre avec l'axe, d'une longueur égale à sa moitié, l'extrémité de cette longueur engendrera une courbe identique au lieu des pôles des cordes qui joignent les pieds des normales menées d'un point de la développée.

IV. Il a été démontré que les angles d'anomalie correspondant aux pieds des trois normales menées d'un point de la développée de l'ellipse sont liés entre eux par l'équation

$$2\varphi' + \varphi'' + \varphi''' = (2k+1)\varpi.$$

On peut prouver de plus que le nombre $2k+1$ est 5 ou 3 suivant que le point de la développée est au-dessus ou au-dessous du grand axe de l'ellipse. Mais ce théorème est un corollaire évident d'un théorème plus général qu'on peut énoncer ainsi :

Si d'un point intérieur à la développée de l'ellipse on mène les quatre normales à cette courbe, la somme des quatre angles d'anomalie correspondant aux pieds des normales (chacun d'eux variant entre o *et* 2ϖ) *est égale à* 5ϖ *ou* 3ϖ *suivant que le point est situé au-dessus ou au-dessous du grand axe.*

En effet, si d'un point x, y du plan de l'ellipse on mène les normales à cette courbe, et qu'on désigne par X, Y les coordonnées d'un des pieds des normales, on sait que les pieds se trouveront sur une hyperbole équilatère

$$(22) \qquad c^2XY + b^2yX - a^2xY = 0.$$

En remplaçant dans cette équation X et Y par $a\cos\varphi$ et $b\sin\varphi$, puis $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ par leurs valeurs en $\tan\varphi$, il vient

$$a^2x^2\operatorname{tang}^4\varphi - 2abx\operatorname{tang}^3\varphi + (a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)\operatorname{tang}^2\varphi - 2abxy\operatorname{tang}\varphi + b^2y^2 = 0.$$

Les coefficients de $\operatorname{tang}^3\varphi$ et $\operatorname{tang}\varphi$ étant égaux dans l'équation précédente, on en conclut, en désignant par φ', φ'', φ''', φ^{IV} les quatre valeurs de φ correspondant aux pieds des quatre normales, et représentant par k un nombre entier quelconque,

$$\varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi^{\text{IV}} = k\varpi;$$

mais si l'on se rappelle que par hypothèse les angles d'anomalie sont compris entre o et 2ϖ, et que le centre de courbure d'un point de l'ellipse a toujours une ordonnée de signe contraire à l'ordonnée du point lui-même, on voit sans difficulté que, suivant que le point de départ des quatre normales est au-dessus ou au-dessous du grand axe de l'ellipse, la somme $\varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi^{\text{iv}}$ est toujours comprise entre 4ϖ et 6ϖ ou entre 2ϖ et 4ϖ; elle est donc 5ϖ dans le premier cas et 3ϖ dans le second.

V. Si l'on suppose qu'un point de l'hyperbole est déterminé par des équations de la forme

$$X = a \operatorname{séc}\varphi, \quad Y = b \operatorname{tang}\varphi,$$

l'angle φ étant toujours un angle compris entre o et 2ϖ, et tellement choisi, que $a \operatorname{séc}\varphi$ et $b \operatorname{tang}\varphi$ donnent X et Y à la fois en grandeur et en signe, on prouve par une démonstration toute semblable à la précédente que la somme $\varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi^{\text{iv}}$, correspondant aux pieds des quatre normales menées d'un point du plan de l'hyperbole à cette courbe, est égale à 5ϖ ou 3ϖ, suivant que le point de départ des quatre normales est situé dans le premier et le troisième angle des coordonnées, ou dans le second et le quatrième.

VI. Quant à la parabole, si l'on suppose, comme précédemment, un de ses points X,Y déterminé par des équations

$$X = 2p \operatorname{tang}^2\varphi, \quad Y = 2p \operatorname{tang}\varphi,$$

on trouve, pour déterminer les valeurs de $\operatorname{tang}\varphi$ correspondant aux pieds des normales menées d'un point x, y du plan, l'équation

$$4p \operatorname{tang}^3\varphi + 2(p - x)\operatorname{tang}\varphi - y = 0;$$

on a donc

$$\operatorname{tang}\varphi' + \operatorname{tang}\varphi'' + \operatorname{tang}\varphi''' = 0,$$

et si l'on suppose le point de départ des normales sur la développée, on retrouve l'équation précédemment citée

$$2 \tang \varphi' + \tang \varphi'' = 0.$$

VII. On a trouvé que la somme des angles d'anomalie était égale à $k\varpi$ pour les points d'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole équilatère (22); on est conduit alors à se demander, en général, par quelles courbes du second degré on doit couper l'ellipse pour que la même relation subsiste. Cette question, avec plusieurs autres du même genre énoncées par M. Joachimstal, a été résolue par M. Terquem (*Annales*, t. IX, p. 170). Les démonstrations sont semblables à celle que nous avons donnée tout à l'heure. On voit, en particulier, que la somme des quatre angles d'anomalie est toujours égale à $k\varpi$ quand la seconde courbe est un cercle.

J'ajouterai ici que lorsque les quatre points d'intersection sont d'un même côté du grand axe, la somme des angles d'anomalie (supposés toujours compris entre 0 et 2ϖ) est égale à 2ϖ ou 6ϖ, suivant que les quatre points sont au-dessus ou au-dessous du grand axe, et que la somme est égale à 4ϖ, lorsque deux points sont au-dessus et les deux autres au-dessous du grand axe.

Le théorème est évident lorsque les quatre points sont symétriques deux à deux par rapport à l'un des axes; et lorsque la symétrie n'existe pas, on remarque qu'en remplaçant deux des points par les symétriques des deux autres, on ne pourrait qu'augmenter ou diminuer la somme des angles d'anomalie d'une quantité plus petite que ϖ, et que par conséquent la somme qui est un multiple de ϖ doit rester la même. Les réciproques sont évidentes.

En rapprochant le théorème actuel de celui que nous avons démontré sur les pieds des normales à l'ellipse, on arrive à une démonstration très-simple d'un autre théorème dû à M. Joachimstal, et dont voici l'énoncé :

Dans l'ellipse, trois des pieds des normales à cette courbe menées d'un point de son plan, et le point diamétralement opposé au pied de la quatrième normale, sont sur une même circonférence.

En effet, supposons, pour fixer les idées, qu'on ait mené les quatre normales d'un point situé au-dessous du grand axe. Trois des pieds des normales sont au-dessus de l'axe et le quatrième au-dessous. Alors, suivant qu'on remplacera l'un des trois premiers pieds ou le quatrième par le point diamétralement opposé, on augmentera ou on diminuera de ϖ la somme des angles d'anomalie. Dans le premier cas on aura deux points au-dessus de l'axe et deux au-dessous, et la somme des angles d'anomalie sera égale à 4ϖ. Dans le second cas les quatre points seront au-dessus de l'axe, et la somme sera égale à 2ϖ. Les quatre points sont donc, dans les deux cas, sur une même circonférence. Le cas où le point de départ des normales est au-dessous de l'axe conduit à la même conclusion.

Pour l'hyperbole, les mêmes théorèmes ont lieu encore, et se démontrent d'une manière analogue.

Détermination du lieu par la géométrie.

Théorème I. *Si deux points pris dans le plan d'une conique à centre sont tels, que les rapports de leurs coordonnées aux demi-axes sur la direction desquels on les compte sont inverses et de signe contraire, les deux polaires correspondantes coupent la courbe en quatre points, dont les normales vont concourir en un même point du plan.*

Le théorème est une conséquence évidente des formules (1). En effet les valeurs de x et y données par ces formules ne changent pas, quand on y remplace α et β par $\frac{-a^2}{\alpha}$ et $\frac{-b^2}{\beta}$.

Théorème II. *Deux points étant donnés sur une conique à centre, si l'on trace la corde qui joint les deux points diamétralement opposés aux premiers, que par les points où cette corde rencontre les axes on mène des parallèles à ces lignes, et, par le point d'intersection des deux parallèles, des tangentes à la conique, les deux points de contact et les deux points donnés seront tels, que les normales des quatre points se couperont en un même point du plan.*

En effet, les cordes qui joignent respectivement les deux premiers et les deux derniers points ont pour pôles deux points dont les coordonnées satisfont à la condition indiquée par le premier théorème.

Théorème III. *Étant donné un quadrilatère circonscrit à une conique à centre dont les points de contact avec la courbe sont les pieds de normales menées d'un même point du plan, si on projette les quatre sommets sur les axes et qu'on mène les droites qui joignent les projections d'un même sommet, les quatre droites ainsi obtenues formeront un quadrilatère inscrit dans la conique et dont les sommets seront diamétralement opposés aux points de contact du premier quadrilatère.*

Soient A, B, C, D les quatre points de contact; A′, B′, C′, D′ les points diamétralement opposés; (A, B), (B, C), (C, D), (D, A) les quatre sommets; (A, B) désignant le sommet situé entre A et B; (B, C) le sommet entre B et C, etc. Les deux droites qui réunissent les projections sur les axes des points (A, B) et (A, D) viendront toutes deux passer par le point C′ (théorème II). Pour les autres, la démonstration est évidemment la même. On a donc un quadrilatère inscrit A′, B′, C′, D′.

THÉORÈME IV. *Si l'on projette sur les axes le point d'intersection d'une normale simple et d'une normale double, et celui de deux normales simples, et qu'on joigne les projections de chaque point par une droite, les deux droites passeront par le point diamétralement opposé au pied de la normale double, et de plus la deuxième sera tangente à l'ellipse.*

En effet, si l'un des points de contact, D par exemple, se confond avec le sommet voisin A, D′ se confond avec A′, et le quadrilatère A′B′C′D′ est remplacé par la figure formée du triangle A′B′C′ et d'une tangente en A′; mais alors le point de départ des quatre normales est sur la développée, et la normale partant de A est la normale double. Le théorème est donc démontré.

Le théorème IV comprend les deux théorèmes démontrés par le calcul p. 261, § I et § II.

Il est facile maintenant d'obtenir les équations des deux courbes. En effet, si l'on désigne par X et Y les coordonnées du point A, par α', β' celles du point (A, B), par α'', β'' celles du point (B, C), on a évidemment, d'après le théorème IV, les équations suivantes :

$$\frac{-X}{\alpha'}+\frac{-Y}{\beta'}=1,\quad \frac{X\alpha'}{a^2}+\frac{Y\beta'}{\pm b^2}=1,\quad \alpha''=\frac{-X}{a^2},\quad \beta''=\frac{-Y}{\pm b^2}.$$

En substituant dans l'équation de la conique les valeurs de X et de Y deduites des deux premières, et aussi celles qui sont déduites des deux dernières, on aura immédiatement les équations du double lieu.

Remarque. On peut aussi déduire du théorème I une démonstration très-simple du théorème de M. Joachimstal (§ VII, p. 265).

En effet, conservant les mêmes notations que précédemment, nous voyons, d'après le théorème I, que si le coefficient de AD est m, celui de BC est $\frac{b^2}{a^2 m}$, et par suite celui de BC$'$, corde supplémentaire de BC, est $-m$. Les droites AD et BC$'$ sont donc également inclinées sur les axes, et par conséquent, d'après un théorème connu, le quadrilatère ADBC$'$ est inscriptible dans une circonférence.

NOTE.

Démonstration des formules (1). Soient α et β les coordonnées du pôle d'une corde quelconque $(\varphi'\,\varphi'')$; des équations (7) et (8), dans lesquelles on efface les accents de α et β, on déduit

$$y = -\frac{c^2}{b^2}\beta \sin\varphi' \sin\varphi'', \quad x = \frac{c^2}{a^2}\alpha \cos\varphi' \cos\varphi'';$$

d'un autre côté, en introduisant dans les équations (7) les angles $\frac{\varphi'}{2}$ et $\frac{\varphi''}{2}$, il vient

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\cos\frac{\varphi'+\varphi''}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi''}{2}}, \quad \frac{\beta}{b} = \frac{\sin\frac{\varphi'+\varphi''}{2}}{\cos\frac{\varphi'-\varphi''}{2}},$$

et on en tire immédiatement

$$\frac{a^2-\alpha^2}{a^2} = \frac{\sin\varphi'\sin\varphi''}{\cos^2\frac{\varphi'-\varphi''}{2}}, \quad \frac{b^2-\beta^2}{b^2} = \frac{\cos\varphi'\cos\varphi''}{\cos^2\frac{\varphi'-\varphi''}{2}},$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi'-\varphi''}{2}},$$

et par suite

$$\sin\varphi' \sin\varphi'' = \frac{b^2(a^2-\alpha^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}, \quad \cos\varphi' \cos\varphi'' = \frac{a^2(b^2-\beta^2)}{a^2\beta^2+b^2\alpha^2};$$

substituant maintenant dans les deux premières équations les valeurs de $\sin\varphi' \sin\varphi''$, $\cos\varphi' \cos\varphi''$, on aura les formules (1).

SUR LES CONIQUES SPHÉRIQUES ET NOUVELLE SOLUTION GÉNÉRALE DE LA QUESTION 498 (*);

PAR M. CREMONA,
Professeur au lycée de Saint-Alexandre à Milan.

Dans le n° 13 (26 mars 1860) des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, M. Chasles a communiqué un résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales. L'illustre géomètre déduit ses nombreux théorèmes d'un petit nombre de propositions fondamentales. Ce sont ces propositions fondamentales que nous allons démontrer.

A cause de la dualité constante à laquelle est soumise toute la géométrie de la sphère, la théorie des coniques homofocales donne lieu à une autre série de théorèmes. C'est, comme le dit l'auteur même, la théorie des *coniques homocycliques*. Dans notre analyse, les variables x, y, z pourront exprimer indifféremment des coordonnées cartésiennes de points ou des coordonnées *tangentielles* de lignes. Dans la première hypothèse, il s'agira de coniques homocycliques; dans l'autre, de coniques homofocales. Pour fixer les idées, nous supposerons que les coordonnées se rapportent à des points; le lecteur en fera

(*) Pour bien comprendre ce travail, il est nécessaire d'avoir devant soi le n° 13 des *Comptes rendus*.

mentalement la transformation, s'il veut obtenir les propriétés des coniques homofocales.

1. Soient $x:y:z$ les coordonnées orthogonales d'un point quelconque d'une surface sphérique donnée. L'équation générale d'une conique (ligne de second ordre) est

$$(1) \qquad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta yz + 2\varepsilon zx + 2\varphi xy = 0.$$

La conique est un (petit) cercle si son équation est de la forme qui suit :

$$(2) \qquad \lambda(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = 0;$$

le centre *sphérique* du cercle est le pôle (absolu) de la ligne géodésique (grand cercle) :

$$ax + by + cz = 0.$$

Le cercle (2) devient géodésique (grand cercle) si $\lambda = 0$.
Pour λ infini on a le cercle imaginaire

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

situé à une distance infinie (car il est la ligne du contact idéal entre la sphère et son cône asymptote).

L'équation (2) démontre que :

Tous les cercles (grands ou petits) tracés sur la sphère peuvent être considérés comme des coniques sphériques qui ont un double contact avec le cercle imaginaire à l'infini.

2. Soit

$$(4) \qquad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$$

un point de la surface sphérique. La géodésique polaire relative au cercle imaginaire (3) pris comme courbe directrice est

$$(5) \qquad x_0 x + y_0 y + z_0 z = 0,$$

et la géodésique polaire du même point, par rapport à la conique (1), est

$$(6)\quad \begin{cases} x(\alpha x_0 + \varphi y_0 + \varepsilon z_0) + y(\varphi x_0 + \beta y_0 + \delta z_0) \\ \qquad + z(\varepsilon x_0 + \delta y_0 + \gamma z_0) = 0. \end{cases}$$

Si les deux lignes géodésiques (5) et (6) doivent coïncider, c'est-à-dire si le point (4) a la même polaire par rapport à la conique (1) et au cercle imaginaire, (3) on aura

$$\alpha x^2 + \varphi y_0 + \varepsilon z_0 = \theta x_0,$$
$$\varphi x_0 + \beta y_0 + \delta z_0 = \theta y_0,$$
$$\varepsilon x_0 + \delta y_0 + \gamma z_0 = \theta z_0.$$

L'élimination de $x_0 : y_0 : z_0$ de ces équations donne une équation cubique en θ; on sait que cette équation résultante a ses racines réelles, et que si l'on désigne par

$$(7)\qquad (x_1 : y_1 : z_1),\quad (x_2 : y_2 : z_2),\quad (x_3 : y_3 : z_3)$$

les systèmes de valeurs de $(x_0 : y_0 : z_0)$ qui correspondent aux trois valeurs de l'indéterminée θ, on a

$$x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 = 0,$$
$$x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 = 0,$$
$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Donc les trois points (7) sont les sommets d'un triangle trirectangle, et par conséquent la géodésique polaire de chacun d'eux par rapport à la conique (1) et au cercle (3) (ou absolue) passe par les autres deux. En prenant ce triangle pour triangle des coordonnées, c'est-à-dire en posant

$$(7)'\qquad y_1 = z_1 = 0,\quad z_2 = x_2 = 0,\quad x_3 : y_3 = 0,$$

l'équation (1) deviendra

$$(8)\qquad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0.$$

La forme de cette équation enseigne que si par un quelconque des points $(7)'$ on mène arbitrairement une corde (géodésique) de la conique (8), elle y est partagée en parties égales.

Donc les points $(7)'$ sont des *centres* de la conique sphérique. En supposant $\alpha > \beta > 0$ et $\gamma < 0$, le point $x = y = 0$ est le centre intérieur; les autres sont au dehors de la courbe.

Ainsi :

Les centres d'une conique sphérique sont des points dont chacun a la même géodésique polaire par rapport à la conique et au cercle imaginaire situé à l'infini.

3. Le tétragone (*) complet (imaginaire) inscrit à la conique (8) et au cercle imaginaire (3) a deux côtés réels; les autres sont imaginaires. En effet, en combinant les équations (3) et (8), on obtient

$(\alpha - \beta) y^2 + (\alpha - \gamma) z^2 = 0$, deux géodésiques imaginaires;

$(\beta - \gamma) z^2 - (\alpha - \beta) x^2 = 0$, deux géodésiques réelles;

$(\alpha - \gamma) x^2 + (\beta - \gamma) y^2 = 0$, deux géodésiques imaginaires.

Donc la conique (8) et le cercle (3) ont en commun les cordes géodésiques réelles

$$(9)\qquad z\sqrt{\beta - \gamma} + x\sqrt{\alpha - \beta} = 0, \quad z\sqrt{\beta - \gamma} - x\sqrt{\alpha - \beta} = 0.$$

Une géodésique quelconque

$$(10)\qquad ax + by + cz = 0$$

est tangente à la courbe (8), si on satisfait à la condition

$$(11)\qquad \frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} = 0.$$

Soient ω, ω' les angles que la géodésique (10) fait avec

(*) Donné par les quatre grands cercles joignant les intersections de (3) et (8). Tm.

les géodésiques (9), nous aurons

$$\cos\omega = \frac{a\sqrt{\alpha-\beta} + c\sqrt{\beta-\gamma}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{\alpha-\gamma}}, \quad \cos\omega' = \frac{a\sqrt{\alpha-b} - c\sqrt{\beta-\gamma}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{\alpha-\gamma}};$$

donc, si l'on pose

$$\frac{\gamma}{\alpha} = -\operatorname{tang}^2\theta,$$

en vertu de la condition (11), on obtient

$$\cos^2\omega + \cos^2\omega' - 2\cos 2\theta.\cos\omega\cos\omega' = \sin^2 2\theta,$$

d'où

$$\omega \pm \omega' = 2\theta = \text{constante},$$

c'est-à-dire la surface du triangle sphérique formé par les trois géodésiques (9) et (10) est constante, quelle que soit la tangente (10).

Les géodésiques (9) sont appelées *lignes cycliques* de la conique sphérique (8).

Donc :

Les lignes cycliques d'une conique sphérique sont les deux arcs de grands cercles (toujours réels) sur lesquels se trouvent les points d'intersection (imaginaires) de la conique et du cercle imaginaire situé à l'infini.

4. Pour obtenir les géodésiques tangentes communes à la conique (8) et au cercle (3), cherchons les points communs à leurs courbes réciproques :

$$(12) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Celles-ci ont en commun les cordes réelles

$$(13) \qquad z\sqrt{\beta(\alpha-\gamma)} \pm y\sqrt{\gamma(\beta-\alpha)} = 0;$$

donc les pôles (absolus ou relatifs au cercle (3), ce qui est la même chose) de ces lignes, savoir les points

$$(14) \qquad x=0, \quad y:z=\pm\sqrt{\gamma(\beta-\alpha)}:\sqrt{\beta(\alpha-\gamma)}$$

sont les sommets réels du quadrilatère complet (imaginaire) circonscrit à la conique (8) et au cercle (3). Les géodésiques (13) sont les lignes cycliques de la conique (12), et par conséquent la somme ou la différence des angles qu'elles forment avec une tangente quelconque de cette courbe est constante. Donc la somme ou la différence des arcs géodésiques qui joignent les points (14) à un point quelconque de la conique (8) est constante.

Ces points (14) sont appelés les *foyers* de la conique sphérique (8).

Ainsi :

Les foyers d'une conique sphérique sont les points de concours (toujours réels) des géodésiques tangentes communes à la conique et au cercle imaginaire situé à l'infini (*).

Il s'ensuit :

Deux coniques sphériques homocycliques sont deux coniques dont le tétragone inscrit est aussi inscrit au cercle imaginaire situé à l'infini.

Deux coniques sphériques homofocales sont deux coniques dont le quadrilatère circonscrit est aussi circonscrit au cercle imaginaire situé à l'infini.

5. Les équations

$$A = ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2) = 0,$$
$$A' = ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2) = 0,$$

représentent deux sphériques homocycliques. Soit

$$U = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta yz + 2\varepsilon zx + 2\varphi xy = 0$$

(*) Comme dans les coniques planes. Tm.

une autre conique quelconque. Les équations

$$(15) \qquad B = U + \mu A = 0, \quad B' = U + \mu' A' = 0$$

représenteront deux coniques circonscrites, l'une au tétragone UA (*), l'autre au tétragone UA'. Des équations (15) on tire

$$B - B' = \mu A - \mu' A',$$

$$\mu' B - \mu B = (\mu' - \mu) U + (\lambda - \lambda') \mu\mu' (x^2 + y^2 + z^2);$$

donc l'équation

$$B - B' = 0$$

représente une conique circonscrite au tétragone BB' et homocyclique aux coniques A, A', et l'équation

$$\mu' B - \mu B' = 0$$

représente une conique circonscrite au tétragone BB' et homocyclique à U.

Donc :

Théorème I. *Étant données deux coniques homocycliques* A, A' *et une troisième conique quelconque* U, *si aux tétragones* UA, UA' *on circonscrit deux coniques quelconques* B, B', *le tétragone* BB' *sera inscrit tout à la fois à une conique homocyclique aux deux* A, A' *et à une conique homocyclique à* U. (Chasles.)

6. Soient encore données les coniques A, A', U, d'où l'on déduit B, B'. On peut donner à la fonction $B + kB'$ la forme

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

Il suffit, en effet, de poser

$$k + 1 = 0, \quad \mu - \mu' = 0;$$

(*) Donné par l'intersection de U et de A. Tm.

alors on a

$$B - B' = \mu(\lambda - \lambda')(x^2 + y^2 + z^2),$$

c'est-à-dire les coniques B, B' sont homocycliques.

Ainsi :

Théorème II. *Étant données deux coniques homocycliques* A, A' *et une troisième conique quelconque* U, *si au tétragone* UA *on circonscrit une conique quelconque* B, *on pourra circonscrire au tétragone* UA' *une conique* B' *homocyclique à* B. (Chasles.)

7. Soient données trois coniques homocycliques

$$A = ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda\ (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$
$$A' = ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda'\ (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$
$$A'' = ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda''\ (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

et une quatrième conique quelconque

$$U = 0,$$

d'où nous dérivons les trois coniques qui suivent :

$$B = U + \mu\ A = 0,$$
$$B' = U + \mu'\ A' = 0,$$
$$B'' = U + \mu'' A'' = 0.$$

On peut circonscrire au tétragone BB' une conique qui coïncide avec B''. En effet, on a

$$B + k B' = (1 + k) U + \mu A + k \mu' A',$$

donc, si nous posons

$$k = \frac{\mu(\lambda'' - \lambda)}{\mu'(\lambda - \lambda')} \quad \text{et} \quad \mu'' = \frac{\mu\mu'(\lambda' - \lambda)}{\mu(\lambda'' - \lambda) + \mu'(\lambda' - \lambda'')},$$

on obtient

$$B + kB' = (1 + k)\ B''.$$

Donc :

Théorème III. *Étant données trois coniques homo-*

cycliques A, A′, A″ *et une quatrième conique quelconque* U, *si aux deux tétragones* UA, UA′ *on circonscrit deux coniques* B, B′, *les deux tétragones* UA″ *et* BB′ *seront inscrits dans une même conique* B″. (Chasles.)

8. Soient données trois coniques

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = U - V = 0$$

circonscrites à un même tétragone. On décrit une conique

$$U' = U + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

homocyclique à U, et une antre conique

$$V' = V + \mu(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

homocyclique à V. Il s'ensuit que la conique

$$W' = U' - V' = W + (\lambda - \mu)(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

est tout à la fois circonscrite au tétragone U′V′ et homocyclique à W. De plus, les tétragones UV, U′V′ sont inscrits dans une même conique

$$K = \mu U' - \lambda V' = \mu U - \lambda V = 0.$$

Ainsi :

Théorème IV. *Quand trois coniques* U, V, W *sont circonscrites à un même tétragone, si l'on décrit deux coniques* U′, V′ *homocycliques à* U *et* V *respectivement, on pourra circonscrire au tétragone* U′V′ *une conique* W′ *homocyclique à la troisième conique* W. *Et les deux tétragones* UV, U′V′ *auront leurs huit sommets situés dans une même conique.* (Chasles.)

Il suit d'ici qu'on aura deux faisceaux homographiques de coniques, dont les bases sont les tétragones UV, U′V′, et les deux coniques correspondantes

$$U - iV = 0, \quad U' - iV' = 0$$

sont toujours homocycliques.

Il est évident qu'à la condition d'être homocycliques, on peut substituer celle de rencontrer une conique donnée dans un même système de quatre points réels ou imaginaires. En vertu de cette observation, les quatre théorèmes de M. Chasles ne constituent qu'un théorème unique, auquel on peut donner l'énoncé suivant :

Étant données plusieurs coniques

$$U = o, \quad V = o, \quad W_r = U - i_r V = o$$

circonscrites à un même tétragone, et une autre conique quelconque

$$C = o;$$

si aux tétragones UC, VC *on circonscrit deux coniques* U', V', *on pourra circonscrire aux tétragones* $W_r C$ *respectivement des coniques* W'_r *qui soient toutes circonscrites au tétragone* U'V'. *Et les deux tétragones* UV, U'V' *auront leurs huit sommets situés sur une même conique*

$$K = o.$$

Il s'ensuit encore :

• *Si deux tétragones* UK, U'K *inscrits dans une même conique* K *sont les bases de deux faisceaux homographiques de coniques, les points d'intersection de deux coniques correspondantes*

$$\lambda W_r = (\lambda - i_r \mu) U - i_r K = o,$$
$$\lambda W'_r = (\lambda - i_r \mu) U' - i_r K = o$$

se trouvent toujours dans une même conique

$$U - U' = o.$$

Et réciproquement :

Afin que toutes les intersections des couples de coni-

ques correspondantes de deux faisceaux homographiques appartiennent à une même conique, il faut que les tétragones, bases des faisceaux, soient inscrits à une même conique.

Ces théorèmes généraux ne cessent pas d'avoir lieu en substituant aux coniques circonscrites à un même tétragone des courbes sphériques de l'ordre n circonscrites à un même polygone sphérique de n^2 sommets.

Théorème général comprenant comme cas très-particulier la question 498 (p. 154).

On donne dans un plan : 1° une droite fixe; 2° un point O sur cette droite; 3° un point fixe A. Trouver une courbe telle, qu'en menant par un point quelconque pris sur cette courbe une tangente, et par le point A une parallèle à cette tangente, ces deux droites interceptent sur la droite fixe deux segments comptés du point O, liés entre eux par une relation algébrique du degré n.

On peut considérer ces segments comme des coordonnées tangentielles; donc l'enveloppe demandée est une courbe de la classe n (*voir* la *Géométrie supérieure* de M. Chasles, chap. XXIV).

On donne dans l'espace : 1° une droite fixe; 2° un point O sur cette droite; 3° deux points fixes A, B. Trouver une surface telle, qu'en menant par un point quelconque pris sur cette surface un plan tangent, et par A, B deux plans parallèles au plan tangent, ces trois plans interceptent sur la droite fixe trois segments comptés du point O, liés entre eux par une relation algébrique du degré n.

L'enveloppe demandée est une surface de la classe n.

THÉORÈME D'INÉGALITÉ SUR UN PRODUIT CONTINU; D'APRÈS M. LE Dr SCHLOMILCH.

THÉORÈME. $1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots n^2 > n^n$.

Démonstration. On a l'inégalité

$$ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b},$$

lorsque $a > b > 0$.

Faisant

$$b = m, \quad a = m + 1,$$

il vient

$$m(m+1)^{m-1} > (m+1)^m - m^m,$$
$$m^m > (m+1)^{m-1} \text{ (excepté pour } m = 1),$$
$$m^m (m+1)^2 > (m+1)^{m+1},$$
$$(m+1)^2 > \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}.$$

Faisant successivement m égal à $1, 2, 3, \ldots, n-1$, et multipliant ces inégalités, on obtient

$$1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots n^2 > n^n.$$

Corollaire. La série

$$S_n = \frac{\log 1}{n+1} + \frac{\log 2}{n+2} + \ldots + \frac{\log n}{n+n}$$

devient infinie lorsque $n = \infty$.

En effet

$$S_n > \frac{\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n}{2n},$$

$$S_n > \frac{\log(1 . 2 . 3 \ldots n)}{2n}.$$

Or $2 \log 1.2.3\ldots n > n \log n$ (*voir* ci-dessus), donc

$$S_n > \frac{\log n}{4},$$

donc, etc.

NOTE SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT;

PAR M. PROUHET,
Professeur.

Les limites les plus approchées du produit $1.2.3\ldots n$ sont fournies par la série de Stirling, dont M. A. Serret vient de donner une belle démonstration, complétée par M. Bonnet (*); cependant des limites moins approchées, mais plus simples comme celle de M. Schlomilch, peuvent être utiles dans des recherches particulières. En voici deux qui se prêtent à une démonstration tout à fait élémentaire.

1°. Lorsque n est supérieur à 5, on a

$$1.2.3\ldots n < \left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

ou

$$\frac{1.2.3\ldots n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n} < 1.$$

Représentons le premier membre de cette inégalité par x_n. On aura

$$x_n = \frac{1.2.3\ldots n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n}$$

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. L (1860), p. 662 et 862.

et

$$x_{n+1} = \frac{1.2.3\ldots n(n+1)}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n},$$

et par suite

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Le second membre est égal à 1 pour $n=1$, et diminue quand n augmente; donc $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ est toujours moindre que 1. Ainsi les fonctions désignées par x_n vont en diminuant. Or déjà x_6 est moindre que 1, donc x_n sera moindre que 1 lorsque n sera plus grand que 5 : ce qu'il fallait démontrer.

2°. Quand n est >5, on a

$$1.2.3\ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

e désignant la base des logarithmes népériens.

En effet, en posant

$$x_n = \frac{1.2.3\ldots n}{5\left(\frac{n}{e}\right)^n},$$

on trouvera, comme dans le cas précédent,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Le second membre est toujours plus grand que 1. Donc x_n augmente avec n. Mais pour $n=5$, on trouve $x_5>1$. Donc, etc.

En suivant la même marche, on pourrait trouver des valeurs plus approchées, pour $n > 6, 7, 8$, etc. Mais ces limites finissent toujours par être en dehors des suivantes

$$1.2.3\ldots n > \sqrt{2\pi}.n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^{n},$$

$$1.2.3\ldots n < \sqrt{2\pi}.n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^{n} e^{\frac{1}{12n}},$$

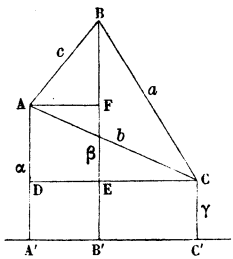
qui résultent d'une formule donnée par M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. IV, p. 321).

SOLUTION DE LA QUESTION 478

(voir t. XVIII, p. 171);

PAR M. G. WIART,
Élève du lycée de Douai (classe de M. David).

A, B, C, trois points fixes; AB $=$ C, BC $= a$, CA $= b$;



α, β, γ, distances respectives des trois points à une droite fixe : on a

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\alpha\beta - (b^2 + c^2 - a^2)\beta\gamma$$
$$- (c^2 + a^2 - b^2)\gamma\alpha = 4S^2,$$

S $=$ aire du triangle ABC (Salmon).

Soient

$$AA' = \alpha, \quad BB' = \beta, \quad CC' = \gamma,$$

on a

$$\text{surf. } AA'C'CB = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)\, B'C' + \frac{1}{2}(\beta + \alpha)\, A'B',$$

$$\text{surf. } AA'C'C \ = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)\, B'C' + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)\, A'B',$$

d'où, en retranchant, on tire

$$2S = (\beta - \alpha)\, B'C' + (\beta - \gamma)\, A'B'.$$

Élevant les deux membres au carré, il vient

$$4S^2 = (\beta - \alpha)^2\, \overline{B'C'}^2 + (\beta - \gamma)^2\, \overline{A'B'}^2 + 2(\beta - \alpha)(\beta - \gamma) \times B'C' \times A'B'.$$

Par C, je mène une parallèle à A'C'; dans le triangle rectangle ADC, on a

$$\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = (A'B' + B'C')^2,$$

ou

$$(1) \qquad \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{A'B'}^2 - \overline{B'C'}^2 = 2\, A'B' \times B'C'.$$

Par les points A et C, je mène des parallèles à A'C' et dans les triangles ABF, BEC ainsi formés, on a

$$\overline{AF}^2 \text{ ou } \overline{A'B'}^2 = c^2 - (\beta - \alpha)^2,$$

et

$$\overline{EC}^2 \text{ ou } \overline{B'C'}^2 = a^2 - (\beta - \gamma)^2.$$

Je porte dans (1) ces valeurs de $\overline{A'B'}^2$ et $\overline{B'C'}^2$ et je remplace AC et AD par leur valeur, on a

$$b^2 - (\alpha - \gamma)^2 - [c^2 - (\beta - \alpha)^2] - [a^2 - (\beta - \gamma)^2] = 2A'B' \times B'C',$$

ou, toute réduction faite,

$$b^2 - c^2 - a^2 + 2(\beta^2 + \alpha\gamma - \beta\alpha - \beta\gamma) = 2A'B' \times B'C'.$$

On remarque ici que $(\beta^2 + \alpha\gamma - \beta\alpha - \beta\gamma)$ est égal au produit $(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)$. Je remplace maintenant dans l'expression de $4S^2$, $2A'B' \times B'C'$ par sa valeur trouvée et je remplace $\overline{B'C'}^2$, $\overline{A'B'}^2$ par leur valeur, on obtient

$$\begin{aligned}4S^2 = (\beta - \alpha)^2[a^2 - (\beta - \gamma)^2] + (\beta - \gamma)^2[c^2 - (\beta - \alpha)^2]\\ + (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)[b^2 - a^2 - c^2 + 2(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)],\end{aligned}$$

ou

$$4S^2 = a^2(\beta - \alpha)^2 + c^2(\beta - \gamma)^2 + (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(b^2 - a^2 - c^2).$$

En effectuant les calculs et les réductions et disposant les termes convenablement, on arrive à la relation

$$\begin{aligned}a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\alpha\beta - (b^2 + c^2 - a^2)\beta\gamma\\ - (a^2 + c^2 - b^2)\alpha\gamma = 4S^2.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

RAYONS DE COURBURE.

Trouver l'équation de la courbe telle, que ses rayons de courbure soient vus d'un point donné sous un angle donné;

PAR M. H. LECOCQ,
Licencié ès Sciences mathématiques, Maître répétiteur au lycée Louis-le-Grand.

En prenant le point donné pour origine des coordonnées et désignant par x, y, r, θ les coordonnées rectangulaires et polaires, on a

$$\tang\theta = \frac{y}{x}.$$

D'un autre côté, le rayon vecteur mené de l'origine au centre de courbure fait avec l'axe des x un angle ω dont la tangente est le rapport de l'ordonnée à l'abscisse de ce centre, savoir

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{y + \dfrac{1+p^2}{q}}{x - p\,\dfrac{1+p^2}{q}},$$

p et q étant respectivement égaux à $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$. On doit donc avoir, en appelant K la tangente de l'angle donné,

$$K = \operatorname{tang}(\omega - \theta),$$

ce qui conduit à l'équation différentielle du deuxième ordre

$$K = \frac{(1+p^2)(x+py)}{q(x^2+y^2)+(1+p^2)(y-px)}.$$

Cette équation étant homogène par rapport à x, y, dx, dy, d^2y, on sait que si l'on pose

$$y = ux, \quad dy = pdx, \quad d^2y = \frac{Q}{x}dx^2,$$

x et dx disparaissent : on obtient en effet par ces substitutions

$$(1)\quad K[Q(1+u^2)+(1+p^2)(u-p)] = (1+p^2)(1+pu);$$

on sait aussi qu'alors on doit avoir

$$(2)\quad \frac{du}{p-u} = \frac{dp}{Q} = \frac{K\,dp\,(1+u^2)}{(1+p^2)(1+pu)+K(1+p^2)(p-u)};$$

or si l'on pose encore

$$p = \operatorname{tang}\varphi, \quad u = \operatorname{tang}\theta,$$

d'où l'on tire

$$dp = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = d\varphi\,(1 + p^2), \quad du = \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = d\theta\,(1 + u^2),$$

l'équation (2) se transformera finalement dans l'équation

(3) $$d\theta = \mathrm{K}\,\mathrm{tang}(\varphi - \theta).d\,(\varphi - \theta).$$

En intégrant, on en tire

$$-\frac{\theta}{\mathrm{K}} = \mathrm{L}\sqrt{\mathrm{A}}\cos(\varphi - \theta),$$

A désignant une constante arbitraire.

Passant aux exponentielles et développant le cosinus en se servant des relations

$$\sin\varphi = \frac{dy}{ds}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r},$$

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r},$$

on trouve facilement

$$r\frac{d\theta}{dr} = \sqrt{\mathrm{A}\,e^{\frac{2\theta}{\mathrm{K}}} - 1},$$

d'où

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{\sqrt{\mathrm{A}\,e^{\frac{2\theta}{\mathrm{K}}} - 1}} = \mathrm{K}\frac{dz}{1 + z^2},$$

si l'on a posé

$$z^2 = \mathrm{A}\,e^{\frac{2\theta}{\mathrm{K}}} - 1.$$

L'équation cherchée se trouvera en intégrant de nouveau. On obtient ainsi

$$\mathrm{L.B}r = \mathrm{K} \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\mathrm{A}\,e^{\frac{2\theta}{\mathrm{K}}} - 1},$$

B étant une seconde constante arbitraire.

On peut remarquer que la formule

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \sqrt{\mathrm{A}\,e^{\frac{2\theta}{\mathrm{K}}\theta} - 1} = z$$

donne la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente en un point quelconque de la courbe avec le rayon vecteur de ce point.

Si l'on suppose $\mathrm{K} = 0$, on en conclut $dr = 0$ ou $r =$ constante. C'est-à-dire que la courbe se réduit à une circonférence dont le point de vue est le centre. De ce point on voit en effet les différents rayons sous un angle nul. La valeur de z est infinie, car la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon.

Si l'on suppose $\mathrm{K} = \infty$, l'équation donne pour z une valeur constante, propriété qui appartient à une spirale logarithmique. Dans ce cas on voit que tous les triangles qui ont pour sommet le point de vue et pour base le rayon de courbure sont tous semblables entre eux, car ils sont rectangles et ont un angle aigu égal dont la tangente est $\frac{1}{z}$: il en résulte que le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur.

En général, les coordonnées du centre de courbure α et β seront

$$\beta = y + \frac{1 + p^2}{q} = \frac{\mathrm{K}x + y}{1 + \mathrm{K}z},$$

$$\alpha = x - \frac{p(1 + p^2)}{q} = \frac{x - \mathrm{K}y}{1 + \mathrm{K}z},$$

en se servant des valeurs

$$p = \frac{xz + y}{x - yz}, \quad q = \frac{(1 + z^2)(1 + Kz)r^2}{K(x - yz)^3}.$$

Les valeurs de α et β donnent

$$\frac{y}{x} = \frac{\beta - K\alpha}{\alpha + K\beta},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(1 + K^2)r^2}{(1 + Kz)^2}.$$

Or z n'étant fonction que de $\frac{y}{x}$, il en résulte qu'entre les deux équations précédentes et celle de la courbe, on peut facilement éliminer x et y, ce qui conduit à l'équation de la développée qui est, en appelant γ l'angle donné dont la tangente est K,

$$\mathrm{L}\,\frac{\mathrm{B}r}{\sqrt{1 + \mathrm{K}^2}} + \mathrm{L}\left[1 + \mathrm{K}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\mathrm{A}\,e^{\frac{2}{\mathrm{K}}(\theta - \gamma)} - 1}\right]$$

$$= \mathrm{K}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\mathrm{A}\,e^{\frac{2}{\mathrm{K}}(\theta - \gamma)} - 1}.$$

Le valeur générale du rayon de courbure est

$$\rho = \frac{\mathrm{K}r\sqrt{1 + z^2}}{1 + \mathrm{K}z}.$$

PROPRIÉTÉS DES TETRAÈDRES CONJUGUÉS DANS LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ
et solution de la question 524 (Faure);

PAR M. PAINVIN,
Professeur.

1. Un tétraèdre est dit *conjugué* lorsque chacun de ses sommets est le pôle du plan qui passe par les trois autres.

Je désignerai par M_1, M_2, M_3, M_4 les quatre sommets d'un semblable tétraèdre, et par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) leurs coordonnées respectives.

1°. *Surfaces à centre.*

2. Prenons, par exemple, l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Posons

$$(1) \qquad D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \quad \text{où} \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1,$$

et

$$(2) \qquad D_r = \frac{dD}{da_r}.$$

Si l'on se rappelle que l'équation d'un plan passant par les trois points M_2, M_3, M_4 peut se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 & x_4 \\ y & y_2 & y_3 & y_4 \\ z & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

qu'on identifie cette équation avec celle du plan polaire du point M_1, savoir :

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1,$$

et qu'on opère de la même manière pour les quatre sommets M_1, M_2, M_3, M_4, on obtient les douze relations suivantes

$$(3)\quad D_r x_r=-a^2\frac{dD}{dx_r},\quad D_r y_r=-b^2\frac{dD}{dy_r},\quad D_r z_r=-c^2\frac{dD}{dz_r},$$

où

$$r=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Remarquons tout de suite que D est égal à six fois le volume du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$; D_1 à six fois le volume du tétraèdre $OM_2M_3M_4$; D_2 à six fois le volume de $OM_3M_4M_1$, etc. ; O est le centre de l'ellipsoïde.

3. Les formules bien connues du développement d'un déterminant au moyen de ses déterminants dérivés, appliquées au déterminant D, en ayant égard aux relations (3), nous conduisent aux égalités suivantes :

$$(4)\qquad D_1+D_2+D_3+D_4=D\,;$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} D_1x_1^2+D_2x_2^2+D_3x_3^2+D_4x_4^2+a^2D=0,\\ D_1y_1^2+D_2y_2^2+D_3y_3^2+D_4y_4^2+b^2D=0,\\ D_1z_1^2+D_2z_2^2+D_3z_3^2+D_4z_4^2+c^2D=0\,; \end{array}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} D_1x_1y_1+D_2x_2y_2+D_3x_3y_3+D_4x_4y_4=0,\\ D_1x_1z_1+D_2x_2z_2+D_3x_3z_3+D_4x_4z_4=0,\\ D_1y_1z_1+D_2y_2z_2+D_3y_3z_3+D_4y_4z_4=0\,; \end{array}\right.$$

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_r^2}{a^2}+\dfrac{y_r^2}{b^2}+\dfrac{z_r^2}{c^2}-1=-\dfrac{D}{D_r},\\ r=1,\ 2,\ 3,\ 4\,; \end{array}\right.$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x_rx_s}{a^2}+\dfrac{y_ry_s}{b^2}+\dfrac{z_rz_s}{c^2}=1,\\ r,s=1,\ 2,\ 3,\ 4\,;\quad r\gtrless s. \end{array}\right.$$

Les six dernières relations (8) sont suffisantes pour exprimer que le tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$ est conjugué; car elles indiquent que le plan polaire d'un quelconque de ses sommets passe par les trois autres.

4. Cherchons maintenant l'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre en question. Si,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0$$

étant l'équation de cette sphère, on exprime qu'elle passe par les quatre sommets, l'élimination de m, n, p, q entre les cinq équations obtenues nous donnera pour l'équation de la sphère circonscrite

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & 2x & 2y & 2z & 1 \\ r_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 1 \\ r_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & 1 \\ r_3^2 & 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 & 1 \\ r_4^2 & 2x_4 & 2y_4 & 2z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

on a posé

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} & r_i^2 = \overline{OM}_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \\ & i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \right.$$

On voit facilement qu'en représentant par X, Y, Z les coordonnées du centre de la sphère et par L^2 le carré de la tangente menée de l'origine à cette sphère, on a les relations suivantes :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2DX &= r_1^2 \frac{dD}{dx_1} + r_2^2 \frac{dD}{dx_2} + r_3^2 \frac{dD}{dx_3} + r_4^2 \frac{dD}{dx_4}, \\ 2DY &= r_1^2 \frac{dD}{dy_1} + r_2^2 \frac{dD}{dy_2} + r_3^2 \frac{dD}{dy_3} + r_4^2 \frac{dD}{dz_4}, \\ 2DZ &= r_1^2 \frac{dD}{dz_1} + r_2^2 \frac{dD}{dz_2} + r_3^2 \frac{dD}{dz_3} + r_4^2 \frac{dD}{dz_4}, \\ -DL^2 &= r_1^2 D_1 + r_2^2 D_2 + r_3^2 D_3 + r_4^2 D_4. \end{aligned} \right.$$

5. Les formules que je viens d'établir permettent de constater de nombreuses propriétés relatives aux tétraèdres conjugués. Je signalerai les suivantes.

Les égalités (5), ajoutées membre à membre, donnent

$$(12)\quad D_1 r_1^2 + D_2 r_2^2 + D_3 r_3^2 + D_4 r_4^2 + D(a^2+b^2+c^2) = 0.$$

D'où

Théorème I. *Désignant par* V *le volume d'un tétraèdre conjugué* $M_1 M_2 M_3 M_4$, *par* V_1 *celui de* $OM_2 M_3 M_4$, *par* V_2 *celui de* $OM_3 M_4 M_1$, *etc., on aura entre ces volumes la relation constante*

$$V(a^2+b^2+c^2) = V_1 . \overline{OM_1}^2 + V_2 . \overline{OM_2}^2 + V_3 . \overline{OM_3}^2 + V_4 . \overline{OM_4}^2 .$$

Les volumes V_1, V_2, V_3, V_4 doivent être affectés d'un signe tel, que leur somme soit égale V (4); O est le centre de l'ellipsoïde.

6. Le déterminant D peut s'écrire des deux manières suivantes :

$$D = abc \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{x_2}{a} & \frac{x_3}{a} & \frac{x_4}{a} \\ \frac{y_1}{b} & \frac{y_2}{b} & \frac{y_3}{b} & \frac{y_4}{b} \\ \frac{z_1}{c} & \frac{z_2}{c} & \frac{z_3}{c} & \frac{z_4}{c} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-D = abc \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{x_2}{a} & \frac{x_3}{a} & \frac{x_4}{a} \\ \frac{y_1}{b} & \frac{y_2}{b} & \frac{y_3}{b} & \frac{y_4}{b} \\ \frac{z_1}{c} & \frac{z_2}{c} & \frac{z_3}{c} & \frac{z_4}{c} \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Effectuons par colonnes la multiplication de ces deux déterminants; en faisant intervenir les relations (7) et (8), on trouve

$$-D^2 = a^2 b^2 c^2 \frac{D^4}{D_1 D_2 D_3 D_4}.$$

On en conclut que

THÉORÈME II. *Entre les volumes* V, V_1, V_2, V_3, V_4 *et le tétraèdre construit sur les axes de l'ellipsoïde, on a la relation constante*

$$\frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^2} = \left(\frac{abc}{6}\right)^2.$$

7. Eu égard à la relation (12), la dernière des égalités (11) nous donne

$$(13) \qquad L^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

d'où

THÉORÈME III. *Le carré de la tangente menée du centre de l'ellipsoïde à la sphère circonscrite à un tétraèdre conjugué quelconque est constante et égale à*

$$(a^2 + b^2 + c^2).$$

C'est la généralisation du beau théorème énoncé par M. Faure sur les coniques (p. 234) (*).

8. Si l'on multiplie les égalités (11) par x_i, y_i, z_i, 1, respectivement, et qu'on ajoute les résultats, on obtient les quatre relations suivantes :

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 2(Xx_i + Yy_i + Zz_i) = r_i^2 + a^2 + b^2 + c^2, \\ i = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right.$$

D'où

THÉORÈME IV. *Si l'on se donne un point fixe,* M_4 *par exemple, les centres des sphères circonscrites aux tétraè-*

(*) Origine de tout ce travail. TM.

dres conjugués en nombre infini, ayant un de leurs sommets au point fixe, seront constamment dans un plan perpendiculaire à $\overline{OM_4}$ et à une distance de l'origine égale à

$$\frac{\overline{OM}_4^2 + a^2 + b^2 + c^2}{2\overline{OM}_4}.$$

2°. *Surfaces dénuées de centre.*

9. Prenons, par exemple, le paraboloïde elliptique

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0.$$

Conservant toujours les notations (1), (2), les conditions qui expriment que le tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$ est *conjugué* pourront s'écrire

$$(15)\quad \left(D_r = x_r \frac{dD}{dx_r},\quad \frac{dD}{dy_r} = -\frac{y_r}{p}\frac{dD}{dx_r},\quad \frac{dD}{dz_r} = -\frac{z_r}{q}\frac{dD}{dx_r}\right),$$

où

$$r = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Remarquons encore que $\frac{dD}{dx_1}$, $\frac{dD}{dx_2}$, $\frac{dD}{dx_3}$, $\frac{dD}{dx_4}$ représentent le double de la projection sur le plan des xy des triangles $M_2 M_3 M_4$, $M_3 M_4 M_1$, $M_4 M_1 M_2$, $M_1 M_2 M_3$.

10. Les formules relatives aux déterminants, combinées avec les relations (15), nous donneront ici

$$(16)\qquad \frac{dD}{dx_1} + \frac{dD}{dx_2} + \frac{dD}{dx_3} + \frac{dD}{dx_4} = 0;$$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&x_1^2 \frac{dD}{dx_1} + x_2^2 \frac{dD}{dx_2} + x_3^2 \frac{dD}{dx_3} + x_4^2 \frac{dD}{dx_4} = 0,\\
&y_1^2 \frac{dD}{dy_1} + y_2^2 \frac{dD}{dy_2} + y_3^2 \frac{dD}{dy_3} + y_4^2 \frac{dD}{dy_4} + pD = 0,\\
&z_1^2 \frac{dD}{dz_1} + z_2^2 \frac{dD}{dz_2} + z_3^2 \frac{dD}{dz_3} + z_4^2 \frac{dD}{dz_4} + qD = 0;
\end{aligned}\right.$$

$$(18)\quad \begin{cases} x_1 y_1 \dfrac{dD}{dx_1} + x_2 y_2 \dfrac{dD}{dx_2} + x_3 y_3 \dfrac{dD}{dx_3} + x_4 y_4 \dfrac{dD}{dx_4} = 0, \\ x_1 z_1 \dfrac{dD}{dx_1} + x_2 z_2 \dfrac{dD}{dx_2} + x_3 z_3 \dfrac{dD}{dx_3} + x_4 z_4 \dfrac{dD}{dx_4} = 0, \\ y_1 z_1 \dfrac{dD}{dx_1} + y_2 z_2 \dfrac{dD}{dx_2} + y_3 z_3 \dfrac{dD}{dx_3} + y_4 z_4 \dfrac{dD}{dx_4} = 0; \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} 2x_r - \dfrac{y_r^2}{p} - \dfrac{z_r^2}{q} = \dfrac{D}{\dfrac{dD}{dx_r}}, \\ r = 1, 2, 3, 4; \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} (x_r + x_s) - \dfrac{y_r y_s}{p} - \dfrac{z_r z_s}{q} = 0, \\ r, s = 1, 2, 3, 4; \quad r \gtrless s. \end{cases}$$

11. Les égalités (17), ajoutées membre à membre, conduisent à

$$(21)\quad r_1^2 \frac{dD}{dx_1} + r_2^2 \frac{dD}{dx_2} + r_3^2 \frac{dD}{dx_3} + r_4^2 \frac{dD}{dx_4} + (p+q)D = 0.$$

D'où

Théorème V. *Désignant par* V *le volume d'un tétraèdre conjugué* $M_1M_2M_3M_4$, *par* S_1, S_2, S_3, S_4 *les projections, sur le plan des yz, des faces* $M_2M_3M_4$, $M_3M_4M_1$, $M_4M_1M_2$, $M_1M_2M_3$, *on a entre ces quantités la relation constante*

$$3(p+q)V + S_1.\overline{OM_1}^2 + S_2.\overline{OM_2}^2 + S_3.\overline{OM_3}^2 + S_4.\overline{OM_4}^2 = 0.$$

Les surfaces S_1, S_2, S_3, S_4 doivent être affectées de signes tels, que leur somme soit nulle (16).

12. Le déterminant D peut encore s'écrire sous les deux formes suivantes :

$$D = \sqrt{pq}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{y_1}{\sqrt{p}} & \frac{y_2}{\sqrt{p}} & \frac{y_3}{\sqrt{p}} & \frac{y_4}{\sqrt{p}} \\ \frac{z_1}{\sqrt{q}} & \frac{z_2}{\sqrt{q}} & \frac{z_3}{\sqrt{q}} & \frac{z_4}{\sqrt{q}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$-D = \sqrt{pq}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{-y_1}{\sqrt{p}} & \frac{-y_2}{\sqrt{p}} & \frac{-y_3}{\sqrt{p}} & \frac{-y_4}{\sqrt{p}} \\ \frac{-z_1}{\sqrt{q}} & \frac{-z_2}{\sqrt{q}} & \frac{-z_4}{\sqrt{q}} & \frac{-z_4}{\sqrt{q}} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

Effectuant, par colonnes, la multiplication de ces deux déterminants et faisant intervenir les relations (19) et (20), on trouve

$$-D^2 = pq\frac{D^4}{\frac{dD}{dx_1}\cdot\frac{dD}{dx_2}\cdot\frac{dD}{dx_3}\cdot\frac{dD}{dx_4}}.$$

On en conclut que

Théorème VI. *Entre le volume* V *et les surfaces* S_1, S_2, S_3, S_4, *on a la relation constante*

$$\frac{S_1 S_2 S_3 S_4}{V^2} = \frac{9}{4}pq.$$

13. La première des relations (11) comparée avec la relation (21) nous donne

$$X = -\frac{p+q}{2}. \tag{22}$$

D'où

Théorème VII. *Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre conjugué quelconque est constamment dans un plan perpendiculaire à l'axe de la surface et à une distance du sommet égale à*

$$-\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

DES COORDONNÉES PARABOLIQUES
et de leur application à la géométrie des paraboloïdes (*) ;

Par M. C.-Alph. VALSON,
Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

J'ai essayé précédemment de faire une théorie générale de l'ellipsoïde et des figures qu'on peut tracer à sa surface, en partant des méthodes de M. Lamé relatives aux coordonnées elliptiques. C'est l'objet d'une thèse éditée chez M. Mallet-Bachelier en 1854, et dont il a été rendu compte dans les *Nouvelles Annales* (*voir* année 1859, p. 46 du Journal et p. 10 du *Bulletin bibliographique*).

Je me propose, dans ce nouveau travail, d'étendre les mêmes recherches aux surfaces du second degré dénuées de centre et en particulier au paraboloïde elliptique.

(*) Le calcul différentiel fait partie de l'enseignement des lycées sous le nom de *dérivées* et de *limite*. Le nom ne fait rien à l'affaire. Ainsi ce Mémoire est à la portée des élèves des lycées, excepté ce qui concerne les lignes géodésiques ; mais cette partie s'adresse aux élèves de l'École Normale et de l'École Polytechnique, et il n'y a pas de professeur qui ignore les travaux de MM. Lamé, Liouville, Bertrand, Bonnet sur cette géométrie des surfaces *réellement supérieure*. (*Note du Rédacteur.*)

I.

Des paraboloïdes orthogonaux.

Considérons le système des trois équations

$$(1)\qquad\begin{cases}\dfrac{y^2}{u}+\dfrac{z^2}{u-e}=u+2x,\\[2mm]\dfrac{y^2}{v}+\dfrac{z^2}{v+e}=v-2x,\\[2mm]\dfrac{y^2}{w}-\dfrac{z^2}{e-w}=w+2x,\end{cases}$$

dans lesquelles e conserve une valeur fixe et où l'on donne aux variables u, v, w toutes les valeurs possibles, pourvu toutefois que u reste toujours supérieur à e et que w lui soit au contraire toujours inférieur.

On vérifie facilement que ces trois équations appartiennent à trois séries de paraboloïdes dont les deux premiers sont elliptiques et le troisième hyperbolique, et de plus que ces surfaces sont orthogonales. L'équation qui exprime, par exemple, que les deux premières surfaces se rencontrent à angle droit est

$$\frac{y}{u}\cdot\frac{y}{v}+\frac{z}{u-e}\cdot\frac{z}{v+e}-1=0,$$

et elle se déduit immédiatement des deux équations de ces surfaces en les ajoutant et supprimant le facteur commun $u+v$.

Ce système est analogue à certaines surfaces orthogonales du second degré douées de centre qui constituent la base de la méthode des *coordonnées elliptiques*. Dans le cas actuel, on aura à considérer ce qu'on peut appeler les *coordonnées paraboliques* dont je vais examiner les principales propriétés.

II.

Des coordonnées paraboliques.

On voit, d'après ce qui précède, qu'en un point M de l'espace on peut faire passer trois paraboloïdes orthogonaux. Réciproquement, ce point pourra être considéré comme déterminé au moyen de ces trois paraboloïdes, ou bien analytiquement au moyen des trois variables u, v, w qui les caractérisent; ces trois variables seront les *coordonnées paraboliques* du point.

Cela posé, occupons-nous d'abord d'exprimer les coordonnées rectilignes x, y, z du point M en fonction de ses coordonnées paraboliques u, v, w. On remarquera que les trois équations (1) se déduisent de la première en changeant u en $-v$ dans la seconde et en $+w$ dans la troisième. L'équation en u peut être mise ensuite sous la forme (*)

$$u^3 + u^2(2x - e) - u(2ex + y^2 + z^2) + ey^2 = 0.$$

Si l'on y regarde x, y, z comme connus, ses trois racines seront u, $-v$, $-w$, et on en conclura

$$u - v + w = e - 2x,$$
$$uvw = ey^2,$$

d'où

$$2x = v - w - u + e,$$
$$y\sqrt{e} = \sqrt{u}.\sqrt{v}.\sqrt{w}.$$

On aura ensuite sans difficulté

$$z\sqrt{e} = \sqrt{u-e}\,\sqrt{v+e}\,\sqrt{e-w}.$$

On a en définitive les trois formules de transforma-

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. V, p. 164.

tion

$$(2)\quad\begin{cases} x = \dfrac{v - w - v + e}{2}, \\ y = \dfrac{\sqrt{u}.\sqrt{v}.\sqrt{w}}{\sqrt{e}}, \\ z = \dfrac{\sqrt{u-e}.\sqrt{v+e}.\sqrt{e-w}}{\sqrt{e}}. \end{cases}$$

Voici quelques formules qui s'en déduisent. On a en différentiant

$$2dx = -du + dv - dw,$$

$$(3)\quad\begin{cases} 2dy = \dfrac{\sqrt{v}.\sqrt{w}}{\sqrt{e}.\sqrt{u}}du + \dfrac{\sqrt{u}.\sqrt{w}}{\sqrt{e}.\sqrt{v}}dv - \dfrac{\sqrt{u}.\sqrt{v}}{\sqrt{e}.\sqrt{w}}dw, \\ 2dz = \dfrac{\sqrt{e+v}.\sqrt{e-w}}{\sqrt{e}.\sqrt{u-e}}du + \dfrac{\sqrt{u-e}.\sqrt{e-w}}{\sqrt{e}.\sqrt{v+e}}dv \\ \qquad - \dfrac{\sqrt{u-e}.\sqrt{v+e}}{\sqrt{e}.\sqrt{e-w}}dw. \end{cases}$$

Si l'on fait varier séparément u, v, w, on en déduira les différentielles des trois lignes de courbure qui résultent des intersections des surfaces prises deux à deux; il suffira d'ajouter les carrés des valeurs précédentes où l'on conserve successivement les termes qui contiennent du, dv, dw, on aura

$$(4)\quad\begin{cases} ds_u = \dfrac{\sqrt{u+v}.\sqrt{u-w}}{\sqrt{u}.\sqrt{u-e}}.du = \mathrm{U}du, \\ ds_v = \dfrac{\sqrt{u+v}.\sqrt{v+w}}{\sqrt{v}.\sqrt{v+e}}.dv = \mathrm{V}dv, \\ ds_w = \dfrac{\sqrt{u-w}.\sqrt{v+w}}{\sqrt{w}\ \sqrt{e-w}}.dw = \mathrm{W}dw. \end{cases}$$

Pour un arc de courbe quelconque dans l'espace, on aura

$$(5)\quad ds^2 = ds_u^2 + ds_v^2 + ds_w^2 = \mathrm{U}^2du^2 + \mathrm{V}^2dv^2 + \mathrm{W}^2dw^2.$$

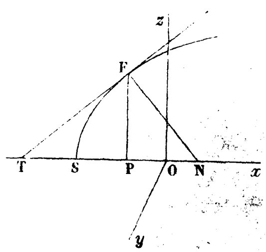
III.

Des ombilics et des sections circulaires.

On sait que le paraboloïde elliptique a deux ombilics situés dans le plan zOx de la parabole de moindre paramètre en deux points symétriques où la tangente à la courbe fait avec l'axe des x un angle défini par la relation

$$(6)\qquad \operatorname{tang}\theta = \sqrt{\frac{u-e}{e}}.$$

Soit F un de ces points, FT la tangente, FN la normale,



FP la coordonnée z. La parabole SF a pour équation

$$\frac{z^2}{u-e} = u + 2x,$$

on aura

$$\operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\mathrm{FTN} = \operatorname{tang}\mathrm{NFP} = \frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{FP}} = \frac{u-e}{z},$$

et à cause de la valeur précédente de $\operatorname{tang}\theta$, on aura pour l'ombilic

$$(7)\qquad \mathrm{FP} = \sqrt{e(u-e)}.$$

Il sera encore utile, par la suite, de remarquer que la même figure donne pour la normale

$$(8)\qquad \mathrm{R} = \mathrm{FN} = \frac{\mathrm{FP}}{\cos\theta} = \sqrt{u(u-e)},$$

et pour l'abscisse de l'ombilic

$$(9) \qquad -x = \mathrm{OP} = \frac{u-e}{2}.$$

Ainsi les coordonnées de l'ombilic seront

$$(10) \qquad x = -\frac{u-e}{2}, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{u(u-e)}.$$

Si l'on remonte aux valeurs de y et de z (2), on en conclura, en les identifiant aux valeurs précédentes, que pour les ombilics on a

$$v = 0, \quad w = 0.$$

Enfin nous aurons à considérer une sphère ayant pour centre le pied v de la normale à l'ombilic et pour rayon cette normale elle-même. On peut encore la définir en disant qu'elle est tangente au paraboloïde en ses deux ombilics. Nous conviendrons de l'appeler *sphère focale*, ce qui sera justifié par ses propriétés.

Nous rappellerons encore que les sections circulaires du paraboloïde sont parallèles au plan tangent de la surface à l'ombilic.

IV.

De la courbure du paraboloïde elliptique.

Nous commencerons l'étude du paraboloïde par les propriétés relatives à sa courbure.

Soient

$$(11) \qquad \begin{cases} X - x + p(Z - z) = 0, \\ Y - y + q(Z - z) = 0, \end{cases}$$

les équations d'une normale, et

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dv} + p\dfrac{dz}{dv} - (Z - z)\dfrac{dp}{dv} = 0, \\[2ex] \dfrac{dy}{dv} + q\dfrac{dz}{dv} - (Z - z)\dfrac{dq}{dv} = 0, \end{cases}$$

les équations de la normale infiniment voisine quand on se déplace suivant la ligne de courbure $w =$ constante.

On trouvera sans difficulté

$$\frac{dx}{dv} = \frac{1}{2}, \quad \frac{dz}{dv} = \frac{\sqrt{u-e}.\sqrt{e-w}}{2\sqrt{e}.\sqrt{v+e}},$$

$$p = \frac{\sqrt{e}.\sqrt{u-e}}{\sqrt{v+e}.\sqrt{e-w}}, \quad \frac{dp}{dv} = -\frac{\sqrt{e}.\sqrt{u-e}}{2(v+e)^{\frac{3}{2}}.\sqrt{e-w}}.$$

La première des équations (12) devient alors

$$1 + \frac{u-e}{v+e} + \frac{Z-z}{z}\cdot\frac{u-e}{v+e} = 0 \; (*),$$

on en déduira $Z - z$; on aura de même $X - x$, $Y - y$, ce qui donne le système

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} X - x &= u + v, \\ Y - y &= -\frac{u+v}{u}\cdot y, \\ Z - z &= -\frac{u+v}{u-e}\cdot z, \end{aligned} \right.$$

où x, y, z désignent les coordonnées d'un point M de la surface et X, Y, Z celles du centre de courbure correspondant. Par l'élimination de x, y, z, on trouvera

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{u + 3v - w + e}{2}, \\ Y &= -\frac{v\sqrt{v}.\sqrt{w}}{\sqrt{e}.\sqrt{u}}, \\ Z &= -\frac{(v+e)\sqrt{v+e}.\sqrt{e-w}}{\sqrt{e}.\sqrt{u-e}}. \end{aligned} \right.$$

Pour le rayon de courbure lui-même on aura

$$R_v = (Z - z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

(*) *Voir* l'équation (2).

on trouvera

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{\sqrt{e}.\sqrt{u+v}.\sqrt{u-w}}{\sqrt{u}.\sqrt{e+v}.\sqrt{e-w}},$$

on en conclura la valeur de R_v, on aura de même la valeur du second rayon de courbure R_w, c'est-à-dire

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} R_v &= \frac{(u+v)^{\frac{3}{2}}.\sqrt{u-w}}{\sqrt{u}.\sqrt{u-e}},\\ R_w &= \frac{(u-w)^{\frac{3}{2}}.\sqrt{u+v}}{\sqrt{u}.\sqrt{u-e}}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on voulait avoir le lieu des centres de courbure, il suffirait d'éliminer v et w des équations (14), ce qui se ferait sans difficulté. Mais il sera plus simple de définir cette nappe de courbure par deux séries de lignes dont les unes correspondent à $v=$ constante et les autres à $w=$ constante, c'est-à-dire aux deux systèmes des lignes de courbure du paraboloïde.

Si l'on élimine w, on trouve

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{u\mathrm{Y}^2}{v^2}+\frac{u-e}{(e+v)^2}\mathrm{Z}^2 = 2\mathrm{X}-u-2v,\\ &\frac{u^2\mathrm{Y}^2}{v^3}+\frac{(u-e)^2}{(e+v)^3}\mathrm{Z}^2 = 2u+3v-2\mathrm{X},\end{aligned}\right.$$

équations qui expriment que les lignes de la nappe de courbure qui correspondent à l'hypothèse $v=$ constante, résultent de l'intersection de deux paraboloïdes ayant même axe que le paraboloïde proposé. De plus, en éliminant successivement X, Y, Z, on reconnaît que ces courbes se projettent suivant des ellipses sur le plan des YZ et suivant des paraboles sur les deux autres plans.

Si au contraire on élimine v des équations (14), on aura les trois équations

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{u-e}{e-w}\right)^{\frac{1}{3}}.Z^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{u}{w}\right)^{\frac{1}{3}}.Y^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}},\\ &3\left(\frac{eu}{w}\right)^{\frac{1}{3}}Y^{\frac{2}{3}}=2X-u+w-e,\\ &3\left[\frac{e(u-e)}{e-w}\right]^{\frac{1}{3}}.Z^{\frac{2}{3}}=2X-u+w+2e,\end{aligned}\right.$$

qui expriment que les projections des lignes du second système seront des développées d'hyperbole sur le plan des YZ et des développées de paraboles sur les deux autres plans.

Au sujet des rayons de courbure, on peut remarquer que l'on a

$$(18)\qquad \frac{R_v^3}{R_w}=\frac{(u+v)^4}{u(u-e)},\qquad \frac{R_w^3}{R_v}=\frac{(u-w)^4}{u(u-e)}.$$

D'où l'on conclut que le premier rapport reste constant tout le long d'une même ligne de courbure $v=$ constante, et le second tout le long d'une ligne de courbure $w=$ constante. Cette relation, qui a été démontrée par M. Ossian Bonnet pour les surfaces du second degré à centre, se conserve donc pour les paraboloïdes.

QUESTIONS.

535. Si deux polygones, 1° sont semblables, 2° ont les côtés homologues parallèles, 3° ont les intervalles entre les côtés homologues égaux, ces deux polygones sont circonscriptibles à des cercles. (Bordoni.)

536. Quel est le minimum de matière pour construire

un vase cylindrique *droit* dont on donne : 1° l'épaisseur uniforme du fond ; 2° l'épaisseur uniforme de la partie latérale ; 3° la capacité ; 4° l'aire de la paroi intérieure ; 5° l'aire de la paroi extérieure ; 6° enfin une section faite parallèlement au fond, et semblable à une figure plane donnée ? (BORDONI.)

537. Discuter la surface donnée par l'équation polaire

$$\rho^3[3\sin^2\theta\cos^2\psi + \nu(1+\mu)\sin^2\theta - 1] = \mu a^3,$$

surface à centre ; trouver les longueurs des trois axes ; démontrer qu'aux valeurs

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = 0, \quad \rho = a\sqrt{\frac{\mu}{2+\nu(1+\mu)}},$$

répond un point singulier de la surface, tel, que le système de plans tangents qu'on peut mener par ce point forme un cône du second degré qui devient de révolution lorsque $\nu = 0$.

Nota. Extrait d'un Mémoire de haute importance sur les atmosphères planétaires, et particulièrement sur les atmosphères cométaires. Les professeurs y trouveront d'instructifs exercices sur la discussion des équations. Le savant professeur de la Faculté de Montpellier démontre qu'on ne peut expliquer l'existence d'une *queue unique* opposée au Soleil qu'en admettant dans la phoronomie céleste une nouvelle force, une *force répulsive*, déjà soupçonnée par Newton, et qui *paraît* devoir être confirmée de nos jours.

538. Discuter la cubique donnée par l'équation

$$13y = p(25x - 12x^3).$$

Nota. Extrait d'un Mémoire du même profond analyste sur la loi de la pesanteur dans l'intérieur de la terre; y est la pesanteur correspondant au rayon x, et p la pesanteur à la surface où $x = 1$.

M. Edouard Roche signale (p. 9) une erreur échappée à Poinsot, dans son Mémoire sur la théorie des cônes circulaires, n° 34.

539. Trouver l'équation d'une courbe qui représente les trois folioles égales du *Trifolium pratense*. Chaque foliole est partagée symétriquement par une droite qui aboutit vers l'intérieur à un point de rebroussement, et à l'extérieur à un point d'inflexion. Les trois droites formant entre elles des angles de 120 degrés se réunissent (*) au même point du pédoncule.

IDENTITÉ
de deux expressions du reste de la série de Taylor;
D'APRÈS CHR. JURGENSEN.

(CRELLE, t. XVII, p. 291.)

1° *Lagrange*. On a

$$f(z) = f(x + z - x) = fx + f'x.\frac{z - x}{1}$$
$$+ f''x.\frac{(z - x)^2}{1.2} + \ldots + f^n x.\frac{(z - x)^n}{1.2.3\ldots n} + \mathrm{R},$$

où R est une fonction de z et de x qui devient nulle en faisant $z = x$.

Différentiant par rapport à x, et intégrant dans les limites de z à x, il vient

$$\mathrm{R} = -\int_z^x f^{(n+1)}\,\frac{s\,(z - s)^n}{1.2\ 3\ldots n}\,ds.$$

(*) A peu près.

2° *Ampère.*

$$fz = fx + \mathrm{P}(z - x); \quad \mathrm{P} = \frac{fz - fx}{z - x}.$$

Différentiant par rapport à x, jusqu'à l'ordre n, il vient successivement

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = f'x + \mathrm{P}'(z - x) - \mathrm{P}, \\ 0 = f''x + \mathrm{P}''(z - x) - 2\mathrm{P}', \\ 0 = f'''x + \mathrm{P}'''(z - x) - 3\mathrm{P}'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = f^{(n)}x + \mathrm{P}^{(n)}(z - x) - n\mathrm{P}^{(n-1)}. \end{array} \right.$$

Éliminant les n quantités $\mathrm{P}, \mathrm{P}', \mathrm{P}'', \ldots, \mathrm{P}^{(n-1)}$ entre les $n+1$ équations, il vient

$$f(z) = f(x) + f'x.z - x + f''x.\frac{(z - x)^2}{1.2} + \ldots$$
$$+ f^n x.\frac{(z - x)^n}{1.2.3\ldots n} + \frac{\mathrm{P}^{(n)}(z - x)^{n+1}}{1.2.3\ldots n}.$$

On a donc ici

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}^{(n)}(z - x)^{n+1}}{1.2.3\ldots n}.$$

(*Annales de Gergonne*, t. XVII, p. 317.)

Cette expression est aussi celle de M. Cauchy (Moigno, *Calcul différentiel*, p. 62).

Différentiant la dernière des équations (a) par rapport à x, on a

$$0 = f^{(n+1)}x + \mathrm{P}^{(n+1)}(z - x) - (n + 1)\mathrm{P}^{(n)};$$

multipliant cette équation par $(z - x)^n$, elle peut se mettre sous la forme

$$f^{(n+1)}x.(z - x)^n + [\mathrm{P}^{(n)}(z - x)^{(n+1)}] = 0;$$

intégrant, on a

$$\int_z^x f^{(n+1)} s \frac{(z-s)^n}{1.2.3\ldots n} ds + \frac{P^n (z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots n} = 0.$$

Donc l'expression d'Ampère est identique avec celle de Lagrange.

NOTE SUR LA DIFFÉRENCE DE DEUX PUISSANCES CONSÉCUTIVES ;

Par M. A. TRONSENS,
Élève du lycée de Douai.

1. La différence de deux carrés *consécutifs* est égale à la somme des deux racines.

2. La différence de deux cubes consécutifs est égale à la somme arithmétique d'une suite de termes de la progression arithmétique 6, 12, 18, 24, etc., augmentée d'une unité.

3. La différence de deux quatrièmes puissances consécutives $(n+1)^4 - n^4$ est égale à la somme de la suite des nombres consécutifs

$$2n^2 + n + 1, \quad 2n^2 + 2n + 2, \quad \ldots, \quad 2n^2 + 3n + 1.$$

Le nombre des termes est $2n+1$, car

$$(n + 1)^4 - n^4 = (2n+1)(2n^2 + 2n + 1).$$

Soit x le premier terme d'une progression arithmétique; 1 la raison et $2n+1$ le nombre de termes; la somme sera $(x+n)(2n+1)$; pour que cette somme soit égale à la différence de deux quatrièmes puissances, il suffit de faire

$$x = 2n^2 + n + 1.$$

4. Il existe une infinité de progressions arithmétiques dont la somme est égale à $(1+n)^p$, p étant un entier positif.

NOUVELLE SOMME DU RESTE DE LA SÉRIE DE TAYLOR

(voir p. 308);

D'APRÈS M. E. ROCHE,
Professeur à Montpellier.

---

1. *Lemme.* Lorsque la dérivée d'une fonction par rapport à une variable reste constamment positive pour toutes les valeurs comprises entre deux limites, la fonction primitive va en croissant depuis la petite jusqu'à la grande limite.

2. R désignant le reste de la série de Taylor, on a, en s'arrêtant au $n^{ième}$ terme,

$$R = f(x+h) - fx - hf'x - \frac{h^2}{1.2}f''x + \ldots - h^n f^n x;$$

faisons $x + h = z$, on a

$$R = fz - fx - (z-x)f'x - \frac{(z-x)^2}{1.2}f''x$$

$$- \frac{(z-x)^3}{1.2.3}f'''x - \ldots - \frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n}f^n(x);$$

de là

$$\frac{dR}{dx} = -\frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n}f^{n+1}(x).$$

Retranchant de cette équation l'identité

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(z-x)^{p+1}C}{1.2.3\ldots n.p+1}\right) = -\frac{(z-x)^p}{1.2.3\ldots n},$$

où C est une constante quelconque, on obtient

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{R}-\frac{(z-x)^{p+1}\mathrm{C}}{1.2.3..n.p+1}\right)$$

$$=\frac{(z-x)^p}{1.2.3...n}[\mathrm{C}-(z-x)^{n-p}f^{(n+1)}x]=\frac{(z-x)^p}{1.2.3...n}(\mathrm{C}-\varphi(x)].$$

Supposons $x<z$; p un nombre positif ne surpassant pas n, et $f^{(n+1)}x$ restant continue dans l'intervalle de x à z; dès lors

$$(z-x)^{n-p}f^{(n+1)}x=\varphi(x)$$

reste continue dans le même intervalle.

Désignons par M la plus grande valeur que prend cette fonction $\varphi(x)$ dans cet intervalle.

Prenons

$$\mathrm{C}=\mathrm{M};$$

$\mathrm{M}-\varphi(x)$ reste donc constamment positif; donc, d'après le lemme, la fonction primitive

$$\mathrm{R}-\frac{(z-x)^{p+1}\mathrm{M}}{1.2.3...n.p+1}=\psi(x)$$

va toujours en croissant depuis x jusqu'à z.

Mais lorsque $x=z$, on a

$$\mathrm{R}=0 \quad \text{et} \quad \frac{(z-x)^{p+1}\mathrm{M}}{1.2.3...n.p}=0;$$

et par conséquent $\psi(x)=0$, et puisque $\psi(x)$ va en croissant, il faut donc que les valeurs de $\psi(x)$ soient négatives.

On a donc dans l'intervalle de x à z

$$\mathrm{R}<\frac{(z-x)^{p+1}\mathrm{M}}{1.2.3...n.p+1}.$$

Désignons maintenant par m la plus petite valeur de $\varphi(x)$, croissant de x à z; le même genre de raisonnement conduirait à l'inégalité

$$R > \frac{(z-x)^{p+1} m}{1.2.3\ldots n\, p+1}.$$

Il existe donc entre M et m une valeur intermédiaire N de $\varphi(x)$, correspondant à une valeur intermédiaire entre x et z, telle que

$$R = \frac{(z-x)^{p+1} N}{1.2.3\ldots n.p+1}.$$

La valeur intermédiaire entre x et z est égale à $x+\theta(z-x)$, où θ est une fraction, un nombre compris entre o et 1; on a donc

$$\begin{aligned} N &= [z-x-\theta(z-x)]^{n-p} f^{(n+1)}[x+\theta(z-x)] \\ &= (z-x)^{n-p}(1-\theta)^{n-p} f^{n-1}[x+\theta(z-x)]; \end{aligned}$$

donc

$$R = \frac{(z-x)^{p+1}}{1.2\ldots n.p+1}(z-x)^{n-p}(1-\theta)^{n-p} f^{(n+1)}[x+\theta(z-x)].$$

Posons

$$h = z - x;$$

où h est positif, on a

$$\text{(A)} \quad R = \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots n.p+1}(1-\theta)^{n-p} f^{n+1}(x+\theta h);$$

telle est la nouvelle expression de R.

On arrive au même résultat en supposant $x > z$; et dès lors h négatif.

2. Lorsque $n = 0$, cette formule n'est plus applicable; alors on a

$$R = f(z) - fx,$$

$$\frac{dR}{dx} = -f'(x);$$

retranchant de cette équation l'identité

$$\frac{d}{dx}\frac{(z-x)^{p+1}}{p+1}C = -(z-x)^p C,$$

il vient

$$\frac{d}{dx}\left(R - \frac{(z-x)^{p+1}}{p+1}\right) = (z-x)^p[C - (z-x)^{-p} f'x].$$

Si p est positif $(z-x)^{-p}$ devient infini lorsque $x = z$; si p est négatif, c'est $(z-x)^p$ qui devient infini; la continuité exige donc que $p = 0$: donc

$$\frac{d}{dx}[R - (z-x)]C = C - f'x.$$

M et m étant la plus grande et la plus petite valeur de $f'(x)$ dans l'intervalle de x à z, $R - M(z-x)$ et $R - m(z-x)$ sont de signes contraires; donc

$$R = (z-x)f'[x + \theta(z-x)],$$

ou

$$R = hf'(x + \theta h).$$

θ et h comme ci-dessus.

3. Si l'on fait dans (A) $p = n$, et ensuite $p = 0$, on obtient

$$R = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n.n+1} f^{n+1}(x + \theta h) \quad (\text{Cauchy}),$$

$$R = \frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n+1)}(x + \theta h)\ldots.$$

Le nombre p qui entre dans la formule générale pouvant prendre toutes les valeurs depuis 0 jusqu'à n, donne des limites plus resserrées que celles qui sont en usage.

Remarque. L'auteur fait observer que ce procédé est analogue à celui de Sturm (*Cours d'Analyse*, t. I,

p. 87) ; mais il donne encore un second procédé fondé sur le calcul intégral, et qui a déjà été employé par M. Jurgensen, géomètre danois (p. 308).

4. Série de Maclaurin (*). Faisant $x = 0$ et remplaçant h par x, on a

$$f(x) = f(0) + xf(0) + \ldots + \frac{x^n f^n(0)}{1.2.3\ldots n} + \frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n-p}}{1.2\ldots n.p+1} f^{n-1}(\theta x).$$

SOLUTION DE LA QUESTION 190

(voir t. VII, p. 240) ;

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur.

L'énoncé nous semble devoir être un peu modifié. Voici nos notations : Par un point P de la surface d'une sphère, nous menons deux arcs d'un quadrant PA, PB, perpendiculaires entre eux. Soit M un point à déterminer ; nous traçons l'arc de grand cercle AM qui intercepte sur PB l'arc PC $= \eta$; nous traçons encore l'arc de grand cercle BM qui intercepte sur PA l'arc PD $= \xi$; enfin nous appelons ρ l'arc PM et θ l'angle MPA. On peut prendre pour coordonnées du point M, ξ et η, ou ρ et θ. On passe d'ailleurs d'un système à l'autre au moyen des formules

$$\operatorname{tang}\xi = \operatorname{tang}\rho . \cos\theta, \quad \operatorname{tang}\eta = \operatorname{tang}\rho . \sin\theta.$$

En géométrie plane l'équation d'une droite perpendi-

(*) M. Houel, le savant professeur de Bordeaux, croit que la formule appartient à Stirling. A examiner. Quelle est la forme du reste pour une série *taylorienne* à plusieurs variables ?

culaire à l'axe polaire est

$$r = \frac{A}{\cos t},$$

et l'équation de l'hyperbole équilatère qui rencontre l'axe polaire est

$$r^2 = \frac{A}{\cos 2t}.$$

Sur la sphère, l'équation du grand cercle perpendiculaire à PA sera $\xi =$ constante, ou

$$\tang \rho = \frac{A}{\cos \theta},$$

l'équation d'une hyperbole équilatère rencontrant PA sera

$$\tang^2 \xi - \tang^2 \eta = A \quad \text{ou} \quad \tang^2 \rho = \frac{A}{\cos 2\theta}.$$

De même qu'on passe de la ligne droite à l'hyperbole plane en doublant l'angle t et en élevant r au carré, ainsi on passe du grand cercle à l'hyperbole sphérique en doublant l'angle θ et en élévant $\tang \rho$ au carré.

Tel est, sauf erreur, ce que M. Roberts proposait de faire voir.

SOLUTION DE LA QUESTION 407

(voir t. XVI, p. 402);

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

LEMME. *Étant données, sur une droite, deux séries de segments en involution, qui se correspondent anharmoniquement, il existe deux segments de la première* *série qui sont divisés harmoniquement par ceux qui leur correspondent dans la seconde série.*

En effet, supposons que les équations

$$(1)\qquad x^2 + ax + b = 0$$

et

$$(2)\qquad x^2 + Ax + B = 0$$

aient respectivement pour racines les distances des *points doubles* des deux involutions proposées à une origine fixe prise sur la droite donnée; a, b, A, B sont des quantités connues; les équations suivantes :

$$(3)\qquad x^2 + a'x + \frac{aa'}{2} - b = 0$$

et

$$(4)\qquad x^2 + A'x + \frac{AA'}{2} - B = 0,$$

dans lesquelles a' et A' sont deux indéterminées, pourront représenter les deux séries de segments en involution. Car chaque valeur particulière de a' détermine un segment qui est divisé harmoniquement par le segment fixe que représente l'équation (1), puisque la relation

$$b + \left(\frac{aa'}{2} - b\right) - \frac{aa'}{2} = 0 \qquad \text{(voir } \textit{Géom. sup.}, \text{ n}^{\text{o}}\ \mathbf{93}, \text{ p. 61)}$$

est satisfaite; et réciproquement, chaque segment de la première involution détermine une valeur de a', et le même raisonnement s'applique à l'équation (2). Mais, d'après l'énoncé, les segments des deux séries se correspondent anharmoniquement; donc il existe, entre les deux variables a' et A', une relation du premier degré de la forme

$$a'A' + \lambda . a' + \mu . A' + \nu = 0;$$

d'où

$$A' = -\frac{\lambda . a' + \nu}{a' + \mu},$$

et, par conséquent, l'équation (4) devient, en y substituant cette valeur de A',

$$(5) \qquad x^2 - \frac{\lambda . a' + \nu}{a + \mu} x - \left(B + \frac{A}{2} \cdot \frac{\lambda . a' + \nu}{a' + \mu} \right) = 0.$$

Pour que les deux équations (3) et (5), qui ne contiennent plus qu'un seul paramètre variable a', représentent deux segments en rapport harmonique, il faut qu'on ait (*Géom. sup.*, n° 93)

$$\frac{aa'}{2} - b - B - \frac{A}{2} \cdot \frac{\lambda a' + \nu}{a' + \mu} + \frac{a'(\lambda . a' + \nu)}{2(a' + \mu)} = 0,$$

c'est-à-dire une équation de la forme

$$a'^2 + \alpha a' + \beta = 0$$

qui donnera pour a' deux valeurs (réelles ou imaginaires) auxquelles correspondront, dans chaque série, deux segments satisfaisant à la question. C. Q. F. D.

Théorème. *Étant données deux coniques dans un même plan, le lieu d'un point tel, que les quatre tangentes, menées de ce point aux deux coniques, forment un faisceau harmonique est une conique* (les deux tangentes d'une même conique étant conjuguées entre elles dans le faisceau harmonique) (*).

On va démontrer qu'une droite quelconque L ne coupe le lieu cherché qu'en deux points.

En effet, soit T l'une des tangentes communes aux deux coniques. Si un point *a* se meut sur L, les tangentes aux deux coniques, issues de ce point, marquent sur T deux séries de segments en involution (*Géom. sup.*, n° 702),

(*) Évident pour deux cercles ; donc.... Tm.

et les segments de la première série correspondent anharmoniquement à ceux de la seconde série, parce que les uns et les autres correspondent aux points a.

Donc, d'après le lemme, il y a, dans chaque série, deux segments qui divisent harmoniquement leurs homologues, et par suite il y a sur L deux points (réels ou imaginaires) qui satisfont à la question. Donc le lieu cherchée est une conique.

Cette conique passe par les huit points de contact des quatre tangentes communes aux deux coniques. Car, pour chacun d'eux, les deux tangentes à l'une des coniques se confondent avec l'une de celles qu'on peut mener de ce point à l'autre conique, et, par conséquent, ces quatre tangentes, dont trois sont coïncidentes, satisfont à la condition. Donc, inversement, ces huit points de contact sont sur une même conique, comme on le démontre directement (voir *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 94).

Ces points de contact peuvent être définis d'une manière qui donne plus de généralité à l'énoncé et à la construction, en disant qu'ils sont les points d'intersection des deux coniques par les polaires de deux centres d'homologie conjugués, prises relativement à ces deux courbes respectivement.

Le théorème qui précède, transformé par la théorie des figures corrélatives, devient celui-ci :

L'enveloppe d'une droite mobile, qui coupe deux coniques données en quatre points qui sont constamment en rapport harmonique, est une conique; et cette conique touche les huit tangentes qu'on peut mener aux deux courbes par les quatre pôles de deux de leurs axes de symptose conjugués, ces pôles étant pris par rapport aux deux coniques respectivement.

NOTE SUR LA QUESTION 405 ET SUR UNE DÉCOMPOSITION DE CARRÉS

(voir t. XVII, p. 192);

PAR M. C. SOUILLART,
Ancien élève de l'École Normale.

La solution de la question 405, telle qu'elle est donnée (t. XVII, p. 192 et 193), n'est pas un cas particulier de la formule générale indiquée p. 193; elle est comprise dans la formule générale suivante :

$$\begin{vmatrix} xyzuv\ldots rst \\ yzuv\ldots stx \\ zuv\ldots txy \\ \ldots\ldots \\ txyz\ldots rs \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x'y'z'u'v'\ldots r's't' \\ y'z'u'v'\ldots s't'x' \\ z'u'v'\ldots t'x'y' \\ \ldots\ldots\ldots \\ t'x'y'z'\ldots r's' \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \mathrm{XYZUV}\ldots \mathrm{RST} \\ \mathrm{YZUV}\ldots \mathrm{STX} \\ \mathrm{ZUV}\ldots \mathrm{TXY} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{TXYZ}\ldots \mathrm{RS} \end{vmatrix}$$

dans laquelle on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= xx' + yy' + zz' + \ldots + ss' + tt', \\ \mathrm{Y} &= xy' + yz' + zu' + \ldots + st' + tx', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{T} &= xt' + yx' + zy' + \ldots + sr' + ts'. \end{aligned}$$

Le signe qui précède le déterminant produit est $+$, quand l'ordre n du déterminant est un nombre de la forme $4p+1$ ou de la forme $4p+2$; il est $-$, quand n est de la forme $4p+3$ ou de la forme $4p$.

La formule générale indiquée (p. 193) doit également porter un double signe devant le déterminant produit; ce signe est $+$, quand n est de la forme $4p$ ou $4p+1$; il est $-$, quand n est de la forme $4p+2$ ou $4p+3$. Dans le cas du troisième ordre, la formule donne

$$\mathrm{Y} = xz' + yy' + zx', \quad \mathrm{Y} = xx' + yz' + zy', \quad \mathrm{Z} = xy' + yx' + zz'.$$

Ce qui fournit une deuxième solution de la question 405. On pourrait se demander si la question n'en admet pas encore d'autres.

Comme nouvelle application de la multiplication des déterminants, j'indiquerai une démonstration de ce théorème connu (*Algèbre* de M. Rouché, p. 126) : *Le produit de deux sommes de quatre carrés est une somme de quatre carrés.*

Le polynôme $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ peut être mis sous la forme d'un déterminant.

On a

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix},$$

de même

$$(p^2+q^2+r^2+s^2)^2 = \begin{vmatrix} p & q & r & s \\ -q & p & -s & r \\ -r & s & p & -q \\ -s & -r & q & p \end{vmatrix}.$$

Le produit de ces deux déterminants peut se faire de diverses manières.

En faisant le produit par lignes, et posant

$$\text{A} = ap + bq + cr + ds, \quad \text{B} = -aq + bp - cs + dr,$$
$$\text{C} = -ar + bs + cp - dq, \quad \text{D} = -as - br + cq + dp,$$

on trouve

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2(p^2+q^2+r^2+s^2)^2 = (\text{A}^2+\text{B}^2+\text{C}^2+\text{D}^2)^2,$$

ou

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = \text{A}^2+\text{B}^2+\text{C}^2+\text{D}^2.$$

Si l'on fait le produit par colonnes, on obtient une autre somme de quatre carrés; les valeurs de A, B, C, D, ont alors

$$A_1 = ap + bq + cr + ds,\quad B_1 = bp - aq - dr + cs,$$
$$C_1 = cp + dq - ar - bs,\quad D_1 = dp - cq + br - as.$$

On obtiendra une troisième décomposition du produit $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$ en une somme de quatre carrés, en multipliant par lignes et colonnes : on peut en trouver encore beaucoup d'autres, par exemple en permutant, dans les solutions déjà trouvées, les lettres a, b, c, d, d'une part, les lettres p, q, r, s d'autre part. On peut aussi permuter des lignes ou des colonnes, avant d'effectuer le produit.

GRAND CONCOURS DE 1860

(voir t. XVIII, p. 293).

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

COMPOSITION DU 11 JUILLET 1860.

Mathématiques. (Prix d'honneur.)

On donne deux ellipsoïdes A et B. On demande le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde A, et parallèles à trois plans diamétraux conjugués de B.

COMPOSITION DU 12 JUILLET 1860.

Chimie.

Première question. L'ammoniaque.

Deuxième question. Tout l'azote contenu dans un mètre cube d'air humide à 10 degrés et $0^m,75$, étant converti en cyanure de barium par son passage sur de la baryte chauffée au rouge avec du charbon, on demande :

1°. Combien il se forme de cyanure de barium;

2°. Combien ce cyanure de barium, étant converti en ammoniaque sous l'influence d'un courant de vapeur d'eau à 300 degrés, donne d'ammoniaque;

3°. Combien cette ammoniaque, étant convertie en acide azotique, sous l'influence de la mousse de platine et d'un courant de vapeur d'eau, donne d'acide azotique;

4°. Combien cet acide azotique donnera d'azotate de potasse.

COMPOSITION DU 14 JUILLET 1860.

Physique.

1°. Capillarité.

2°. Un récipient A de 3 litres de capacité peut être mis en communication avec une pompe foulante P et avec l'air extérieur. La soupape R ouvre la première communication, le robinet R' la seconde. Le récipient A est primitivement plein d'air sec à 0 degré et $0^m,760$. La pompe P puise dans un gazomètre de l'acide carbonique à la pression constante de $0^m,76$ et à la température de 0 degré, et elle peut l'injecter en A, lorsque R s'ouvre; le corps de pompe a une capacité de 2 litres. Ceci posé, on ferme R', on donne un premier coup de piston, et quand le mélange gazeux est bien achevé, on ouvre R' pendant un instant de manière à ce que l'équilibre de pression se rétablisse entre A et l'air extérieur; cela fait, on ferme R', on donne un second coup de piston, et ainsi de suite, en prenant soin chaque fois de rouvrir le robinet R' pendant un moment. On demande combien il faut donner de coups de piston au moins pour qu'il ne reste plus que 1 centigramme d'air dans le récipient A.

Le litre d'air, dans les circonstances normales, pèse $1^{gr},293$. On néglige la capacité des conduits de communication entre la pompe et le récipient. On suppose nulles les variations de température pendant l'expérience. On suppose la pression extérieure égale à $0^{m},76$, la densité de CO^2 par rapport à l'air 1,52.

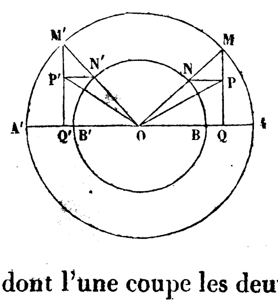
LOGIQUE. — *Sciences.*

COMPOSITION DU 9 JUILLET 1860.

Mathématiques.

Première question. — La surface d'un triangle ABC est égale à un carré donné. Le côté AB est égal à une ligne donnée C; la différence (A — B) des angles adjacents est égale à un angle positif donné α, moindre que 180 degrés. On propose de calculer les angles A et B. Le problème est-il toujours possible, et admet-il plusieurs solutions?

Deuxième question. — Soient AMA' et BNB' deux circonférences concentriques, et AA' un diamètre fixe; soient OM et OM' deux droites rectangulaires menées



par le centre O, dont l'une coupe les deux circonférences en M et N, et l'autre en M et N'. On abaisse sur AA' les perpendiculaires MQ et M'Q'; des points N et N', on abaisse sur MQ et M'Q' les perpendiculaires NP, N'P'. Enfin l'on joint OP et OP', et l'on forme ainsi l'angle POP'. Comment doivent être tracées les deux droites rectangulaires OM, OM' pour que l'angle POP' soit le plus grand possible?

COMPOSITION DU 10 JUILLET 1860.

Physique et Mécanique.

Première question. — On a deux morceaux de métaux différents dont les capacités calorifiques sont inconnues. L'échantillon du premier métal pèse 2 kilogrammes, il est chauffé à 80 degrés; l'échantillon du second métal pèse 3 kilogrammes, et est chauffé à 50 degrés. On plonge ces deux échantillons ainsi chauffés dans 1 kilogramme d'eau à 10 degrés, et la température finale du mélange est 26°,3.

On recommence l'expérience, en chauffant le premier métal à 100 degrés et le second à 40 degrés, et en les plongeant toujours ensemble dans 1 kilogramme d'eau à 10 degrés; cette fois la température finale est 28°,4.

On demande de déterminer, d'après ces données, les capacités calorifiques de deux métaux; on néglige les pertes de chaleur qui se font à l'extérieur, ainsi que l'influence du vase dans lequel le mélange s'opère.

Deuxième question. — Faire connaître les lois de l'écoulement des liquides, et les expériences qui servent à vérifier ces lois.

COMPOSITION DU 12 JUILLET 1860.

Histoire naturelle.

Première question. — Des mammifères ; de leur organisation et de leur classification.

Deuxième question. — Structure de la fleur.

LOGIQUE. — *Lettres.*

COMPOSITION DU 14 JUILLET 1860.

Dissertation française. (Prix d'honneur.)

Faire voir que la science humaine est nécessairement un mélange de connaissances solidement démontrées, et d'ignorances reconnues invincibles.

COMPOSITION DU 17 JUILLET 1860.

Mathématiques.

Première question. — Etant donnés deux parallèles ax, yz, et un point A sur la première, on mène par ce point une sécante quelconque AB ; et par le point B, où elle rencontre la seconde parallèle, on élève BC perpendiculaire à AB. Au point C on fait l'angle ACD, double de BAC, et du point A on abaisse sur CD la perpendiculaire AM. On propose de démontrer que si l'on répète la même construction pour d'autres sécantes menées par le point A, tous les points analogues à M seront sur une même circonférence de cercle.

Deuxième question. — Une pyramide régulière à base hexagonale, dont la hauteur est de 90 centimètres, a un volume de 1 mètre cube. Quel est le côté de l'hexagone qui lui sert de base ?

RHÉTORIQUE. — *Sciences.*

COMPOSITION DU 11 JUILLET 1860.

Mécanique.

1°. Un vase prismatiqne à parois verticales est plein d'eau, et fixé sur une base qui se meut horizontalement avec une vitesse de 4 mètres par seconde. La direction du mouvement est perpendiculaire à l'une des parois du vase. On perce dans cette paroi un orifice à bords amincis et dont le centre est à 9 mètres au-dessous du niveau du liquide dans le vase. On conçoit qu'à un instant donné θ on mène dans l'espace, par le centre de l'orifice d'écoulement, deux axes fixes, l'un vertical, l'autre horizontal et parallèle au mouvement du vase. Ceci posé, on demande à quelle distance de ces deux axes se trouvera à l'instant $\theta + 2$ secondes la molécule liquide qui partait du centre de l'orifice à l'époque θ. On résoudra la question en supposant successivement que le vase marche dans le sens de l'écoulement et en sens inverse. On suppose que pendant l'écoulement le niveau ne varie pas dans le vase; on suppose en outre que dans le lieu donné la vitesse acquise en une seconde par le corps qui tombe est 9,8088.

2°. Décrire les machines à vapeur locomotives, et expliquer comment elles fonctionnent.

COMPOSITION DU 13 JUILLET 1860.

Mathématiques.

1°. Exposer les lois du mouvement des planètes. Dire comment l'observation a pu y conduire Képler, et quelles conséquences on en a tirées.

2°. Mener une tangente à une ellipse, parallèlement à une droite donnée.

ÉCOLES DU GOUVERNEMENT.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1860.

Mathématiques.

1°. Dire comment on forme le carré d'un polynôme; calculer le coefficient de x^k dans le développement de $(1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1})^2$, k étant supposé moindre que n. On expliquera pourquoi la formule trouvée n'est pas applicable au cas où k surpasse n (*).

2°. Trouver l'intersection d'un cône de révolution par un plan. Si par tous les points de l'intersection on élève des normales au cône, chacune de ces normales perce la surface en un second point. On demande la courbe formée par ces points.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE EN 1860.

COMPOSITION DU 3 JUILLET 1860.

Thème anglais (**).

Le vent étant tombé vers les huit heures du soir, et la mer s'étant aplanie, le vaisseau demeura immobile. Ce

(*) On n'insérera pas de réponse à cette trop facile question.

(**) *Voyez*, pour la composition française et la version latine, la *Revue* du 5 juillet 1860.

fut là que je jouis du premier coucher du soleil et de la première nuit dans le ciel de la Grèce.

Nous avions à gauche l'île de Fano et celle de Corcyre qui s'allongeait à l'orient; on découvrait, par-dessus ces îles, les hautes terres du continent de l'Epire; les monts Acrocéroniens, que nous avions passés, formaient au nord, derrière nous, un cercle qui se terminait à l'entrée de l'Adriatique. A notre droite, c'est-à-dire à l'occident, le soleil se couchait par delà les côtes d'Otrante. Devant nous était la pleine mer qui s'étendait jusqu'au rivage de l'Afrique.

Dessin.

Une tête d'enfant, grandeur naturelle, au trait.

Calcul numérique de trigonométrie rectiligne.

Calculer les angles et la surface d'un triangle dont on connaît les trois côtés :

$$a = 24130{,}23,$$
$$b = 40217{,}05,$$
$$c = 56303{,}87.$$

Tracé graphique.

On donne une pyramide triangulaire placée d'une manière quelconque par rapport aux plans de projection, et on demande de construire une pyramide égale à la première, mais ayant une de ses faces dans le plan horizontal.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1860.

COMPOSITION DU 20 JUILLET 1860.

(Le matin.)

Mathématiques.

Étant donnée la parabole CAB, la sécante MAB se meut sous la condition que les normales menées à la parabole par les points d'intersection A et B se coupent en un point C de cette courbe. Par ce point C on mène la tangente CM qui coupe la sécante MAB en un point M.

Cela posé, on demande de trouver l'équation de la courbe décrite par le point M, quand la sécante MAB prend toutes les positions compatibles avec la condition à laquelle elle est assujettie ; on construira cette équation qui est du troisième degré.

(Le soir.)

Dessin.

L'*Écorché* de Michel-Ange.

COMPOSITION DU 21 JUILLET 1860.

(Le matin.)

Composition française.

LE COURAGE.

Il y a divers genres de courage.

Le courage civil, celui qui fait affronter pour une juste cause l'impopularité ou la tyrannie. C'est le courage du juste d'Horace : *Justum et tenacem propositi virum, etc.*

Analyser ce genre de courage, un des plus nobles et des plus rares. Chercher des exemples, soit dans l'antiquité, soit dans les temps modernes.

Le courage militaire. — Il est entretenu par la dignité personnelle, l'amour de la gloire et de la patrie. Des soldats mercenaires ou des esclaves sont en général de mauvais soldats. Comparer les qualités militaires des différentes nations.

Analyser enfin ce genre de courage que l'homme exerce contre lui-même, contre ses passions, contre les obstacles dont la vie est semée, contre l'adversité. — Le suicide est un acte de découragement, par conséquent c'est l'opposé du courage.

(Le soir.)

Lavis à l'encre de Chine.

Faire le lavis à l'encre de Chine d'une surface cylindrique, de 10 centimètres de diamètre sur 15 centimètres de hauteur. Ce cylindre devra se détacher sur un fond formé d'une teinte plate grise; il reposera sur un socle dont la surface plane sera indiquée par une teinte plate d'une très-faible intensité.

Le modèle de cette surface cylindrique pourra être fait à teintes fondues ou adoucies, ou bien à teintes plates superposées.

On admettra que le rayon de lumière a pour projection horizontale et verticale des lignes inclinées à 45 degrés sur la ligne de terre. Le cadre limitant le dessin aura 24 centimètres de haut sur 18 centimètres de large.

Calcul trigonométrique.

Dans un triangle sphérique, on donne les côtés a, b et l'angle C :

$$\text{Côtés.}\left\{\begin{aligned} a &= 36^\circ.28'.26'',7, \\ b &= 91.39.54,5, \end{aligned}\right.$$
$$\text{Angle.}\quad C \quad 87.18.23,9,$$

et on demande de calculer le côté C.

COMPOSITION DU 22 JUILLET 1860.

Épure de géométrie descriptive.

Un cylindre horizontal plein terminé d'un côté au plan vertical de projection, et de l'autre à un plan vertical parallèle, rencontre un cône dont la base est posée sur le plan horizontal. On demande :

1°. De construire les projections de l'intersection des surfaces ;

2°. De faire le développement de la surface du cylindre avec les transformées des bases et de l'intersection ;

3°. De construire les projections d'une tangente de l'intersection, et la tangente au point correspondant de la transformée de cette courbe.

On supposera que le cône est enlevé, et en conséquence sa trace et toutes les lignes qui le concernent seront pointillées.

Les bases du cylindre seront des cercles ; celle du cône un ellipse.

Le cylindre ne sera pas perpendiculaire au plan vertical.

Le croquis ci-contre indique comment les données peuvent être disposées (*).

Distances de la projection verticale du centre de la base de gauche du cylindre :

A la ligne tracée au-dessous du titre...	110 millimètres,
Au bord de gauche du papier........	160 millimètres.

(*) Le temps nous a manqué pour faire graver cette figure.

Les distances marquées sur le croquis sont exprimées en millimètres.

On placera le développement de la surface du cylindre à la droite de l'épure et de manière que les génératrices soient parallèles au plus petit côté de la feuille.

CONCOURS D'ADISSION A L'ÉCOLE DE SAINT-CYR EN 1860.

COMPOSITIONS DU 20 JUILLET 1860.

Dictée.

LE LAC DE MOERIS.

Il n'y avait rien que de grand dans les desseins et dans les travaux des Égyptiens. Ce qu'ils ont fait du Nil est incroyable. Lorsqu'il s'enflait outre mesure, de grands lacs creusés par les rois tendaient leur sein aux ondes répandues. Ils avaient leurs décharges préparées : de grandes écluses les ouvraient ou les fermaient selon le besoin, et les eaux ayant leur retraite ne séjournaient sur les terres qu'autant qu'il fallait pour les engraisser.

Tel était l'usage de ce grand lac, qu'on appelait le lac de Myris, ou de Mœris : c'était le nom du roi qui l'avait fait faire. On est étonné quand on lit, ce qui néanmoins est certain, qu'il avait de tour environ cent quatre-vingts de nos lieues. Pour ne point perdre trop de bonnes terres en le creusant, on l'avait étendu principalement du côté de la Libye. La pêche en valait au prince des sommes immenses, et ainsi quand la terre ne produisait rien, on en tirait des trésors en la couvrant d'eau. Deux pyramides, dont chacune portait sur un trône deux statues colossales, l'une de Myris et l'autre de sa femme, s'élevaient de trois cents pieds au milieu du lac, et occupaient sous les eaux un pareil espace. Ainsi elles faisaient voir qu'on les avait érigées avant que le creux eût été rempli, et montraient qu'un lac de cette étendue avait été fait de main d'homme sous un seul prince. (Bossuet, *Histoire universelle*, 3e part., ch. III.)

Composition française.

LE GÉNIE MILITAIRE DE LA FRANCE.

Le génie militaire de la France est, comme celui de Rome, universel. Il a pour plus haute expression Charlemagne et Napoléon Ier. Partout où notre armée déploie son drapeau, elle cherche ou porte la civilisation. Charlemagne civilise l'Allemagne; nos chevaliers recueillent en Orient de nouveaux éléments sociaux. Nos armées d'Italie sous Charles VIII, Louis XII, François Ier, rapportent de la Péninsule les germes de la Renaissance. Sous Louis XIV, nos soldats répandent au dehors l'esprit et le goût français du grand siècle. Leurs triomphes accompagnent nos triomphes littéraires.

Que dire des armées napoléoniennes? Elles portent les idées de droit et d'égalité jusqu'aux bords de la Vistule. Le grand conquérant transforme tout le droit européen. Nos armées, sous Napoléon III, ont également une mission des plus hautes. Elles sauvent l'équilibre de l'Europe et sont au service des plus grandes idées.

Thème allemand.

UTILITÉ DE L'HISTOIRE.

L'histoire est un maître impartial, dont nous ne pouvons réfuter les raisonnements appuyés sur des faits. Elle nous montre le passé pour nous annoncer l'avenir. Elle est le miroir de la vérité.

Les peuples les plus fameux, les hommes les plus célèbres sont jugés par le temps, qui détruit toute illusion. Devant le tribunal de l'histoire, des conquérants descendent de leurs chars de triomphe, les princes nous apparaissent sans leur cortége, et dépouillés de la fausse grandeur que leur prêtait la flatterie.

COMPOSITIONS DU 21 JUILLET 1860.

Tracé géométrique.

Echelle $= \frac{1}{20}$.

Construire le plan, l'élévation et la coupe de l'ensemble des corps A, B, C, C, C,..., limités par les plans horizontaux *abc*, *lmn*, *pqr*, *dfg*; *abc* est le plan horizontal de projection. Les corps sont placés symétriquement par rapport à deux plans verticaux perpendiculaires dont l'un est parallèle au plan de l'élévation. Les distances successives des plans horizontaux désignés sont les hauteurs des corps; les horizontales *ab*, *lm*, *pq*, *df* sont parallèles au plan de l'élévation; les droites *bc*, *mn*, *qr*, *fg* lui sont perpendiculaires. La coupe sera faite par un plan vertical passant par l'axe de symétrie, et faisant avec celui de l'élévation un angle de 55 degrés.

Légende. — A parallélipipède rectangle creux dont les parois et le fond ont partout la même épaisseur; B parallélipipède rectangle; C, C, C, C quatre cubes.

DIMENSIONS EN MÈTRES.

A.

Hauteur $= 0^{m},8$,
df $= 2,4$,
fg $= 0,8$,
Épaisseur des parois $= 0,1$.

B.

$$\text{Hauteur} = 0^{m},3,$$
$$ab = 3,$$
$$bc = 1,8.$$

C, C, C, C.

$$\text{Côté des cubes} = 0^{m},4,$$
$$pq = 2,6,$$
$$qr = 1,2.$$

Mathématiques.

Énoncé. —Calculer la distance d'un point accessible A à un point inaccessible C, ainsi que la surface du triangle ABC.

DONNÉES.

$$AB = 843^{m},64,$$
$$CAB = 59^{\circ}42'28,4,$$
$$CBA = 61^{\circ}19'17,6.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 323 ET ANNUITÉS

(voir page 233);

PAR M. CUENOUD, DE LAUSANNE.

Une somme C placée à intérêts simples pendant n années, à i pour 100 par an, devient, au bout de ce temps

$$C\left(1 + \frac{ni}{100}\right),$$

en sorte qu'une somme C, payable dans n années, vaut actuellement

$$\frac{C}{1+\frac{ni}{100}} \quad \text{ou} \quad \frac{100\,C}{100+ni}.$$

En appliquant le résultat ci-dessus aux diverses sommes mentionnées dans l'énoncé, on trouve que

La somme C_1, payable dans n_1 ann., vaut actuel. $\dfrac{100\,C_1}{100+n_1 i}$.

» C_2 » n_2 » $\dfrac{100\,C_2}{100+n_2 i}$.

» C_p » n_p » $\dfrac{100\,C_p}{100+n_p i}$.

En ajoutant ces divers nombres, et désignant leur somme par V, on a

$$V = 100\left(\frac{C_1}{100+n_1 i}+\frac{C_2}{100+n_2 i}+\frac{C_3}{100+n_3 i}+\ldots + \frac{C_p}{100+n_p i}\right).$$

Cette somme V vaudra, dans t années, $V\left(1+\dfrac{it}{100}\right)$, et comme cette valeur doit être précisément égale à $C_1+C_2+\ldots+C_p$, on aura

$$V\left(1+\frac{it}{100}\right) = C_1+C_2+\ldots+C_p;$$

d'où

$$it = \frac{100}{V}(C_1+C_2+\ldots+C_p - V),$$

ou

$$it = \frac{100}{V}\left[\left(C_1 - \frac{100\,C_1}{100+n_1 i}\right)+\left(C_2 - \frac{100\,C_2}{100+n_2 i}\right)+\ldots + \left(C_p - \frac{100\,C_p}{100+n_p i}\right)\right],$$

ou

$$it = \frac{100}{V}\left(\frac{C_1 n_1 i}{100 + n_1 i} + \frac{C_2 n_2 i}{100 + n_2 i} + \ldots + \frac{C_p n_p i}{100 + n_p i}\right),$$

ou enfin

$$(1)\quad t = \frac{100}{V}\left(\frac{n_1 C_1}{100 + n_1 i} + \frac{n_2 C_2}{100 + n_2 i} + \ldots - \frac{n_p C_p}{100 + n_p i}\right)\ (*).$$

Remarque. On peut présenter le calcul d'une manière un peu différente, qui conduit à un autre résultat.

Désignons par k un nombre d'années plus grand que les nombres n_1, n_2, $n_3, \ldots, n_p$, t. Le créancier qui recevra la somme C_1 dans n_1 années pourra placer immédiatement cette somme, en sorte qu'à la fin de la $k^{ième}$ année il pourra disposer d'une valeur

$$(a)\qquad C_1\left(1 + \frac{(k - n_1)i}{100}\right).$$

S'il place de même la somme C_2, après l'avoir reçue, elle vaudra, à la fin de la $k^{ième}$ année,

$$(b)\qquad C_2\left(1 + \frac{(k - n_2)i}{100}\right),$$

et ainsi de suite. La dernière somme C_p vaudra également, à la fin de la $k^{ième}$ année,

$$(l)\qquad C_p\left(1 + \frac{(k - n_p)i}{100}\right).$$

Afin que le créancier ne subisse ni gain ni perte en recevant la somme totale $C_1 + C_2 + \ldots + C_p$ au bout de t années, il faut qu'à la fin de la $k^{ième}$ année cette somme totale ait la même valeur que la somme des nombres (a),

(*) MM. V. Nadal, professeur à l'école de Sorèze, et Th. Vannier, de Bourg-la-Reine, donnent la même solution.

$(b), \ldots, (l)$. On a donc

$$(C_1 + C_2 + \ldots + C_p)\left(1 + \frac{(k-t)i}{100}\right)$$
$$= C_1\left(1 + \frac{(k-n_1)i}{100}\right) + C_2\left(1 + \frac{(k-n_2)i}{100}\right) + \ldots$$
$$+ C_p\left(1 + \frac{(k-n_p)i}{100}\right),$$

ou, en réduisant,

$$(C_1 + C_2 + \ldots + C_p)t = C_1 n_1 + C_2 n_2 + \ldots + C_p n_p;$$

d'où

$$(2) \qquad t = \frac{C_1 n_1 + C_2 n_2 + \ldots + C_p n_p}{C_1 + C_1 + \ldots + C_p}.$$

Telle est la formule que l'on emploie dans le commerce pour la recherche de l'*échéance commune* de plusieurs billets. Le résultat qu'elle fournit diffère assez peu de celui que donne la formule (1). Du reste, l'une et l'autre sont vraies, suivant le point de vue auquel on se place : la formule (1) est celle qu'établirait le débiteur, tandis que la formule (2) est celle que doit trouver le créancier. En effet, le débiteur cherche quelle est la somme qu'il doit placer actuellement pour obtenir C_1 dans n_1 années, ou pour obtenir C_2 dans n_2 années, etc. Il ne dispose donc que des valeurs actuelles, plus petites que les nombres C_1, C_2, etc., et ce sont les intérêts que peuvent rapporter ces valeurs actuelles qu'il doit chercher à équilibrer pour établir l'équation en t. Le créancier, au contraire, pourra disposer des sommes $C_1, C_2, \ldots, C_p$, et ce sont les intérêts de ces sommes qui doivent donc entrer dans l'équation. Les deux résultats doivent donc être différents, et aucun ne peut avoir la prétention d'être plus exact que l'autre. Si la formule (2) est toujours employée dans le commerce, elle le doit à sa plus grande simplicité et au peu de différence qu'elle présente avec la formule (1). Il y a ici une différence analogue à celle qui existe entre l'escompte en dedans et l'escompte en dehors.

Du reste, les deux formules sont identiquement de la même forme, comme on peut s'en assurer en remplaçant dans (1) V par sa valeur; elles sont toutes deux l'application du théorème des *moments*, l'une pour les valeurs actuelles, l'autre pour les valeurs à l'échéance. En désignant par C_a la valeur actuelle d'une somme C payable dans n années, les formules (1) et (2) peuvent se mettre sous la forme

$$t = \frac{\Sigma n C_a}{\Sigma C_a}. \tag{1}$$

$$t = \frac{\Sigma n C}{\Sigma C}. \tag{2}$$

Annuités. Voici maintenant un calcul assez intéressant relatif aux annuités. On trouve, dans tous les ouvrages d'algèbre, que pour rembourser en n années une somme C, il faut payer annuellement une somme

$$a = \frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1},$$

r désignant l'intérêt annuel de 1 fr.

Pour appliquer cette formule au cas d'un emprunt contracté par *obligations*, je désignerai par m le nombre total d'obligations et par s la valeur de chacune d'elles; j'aurai alors

$$C = ms,$$

et, par suite,

$$a = \frac{msr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Je me propose de chercher combien d'obligations peuvent être remboursées la 1^re^, la 2^e^, la 3^e^,..., la $p^{ième}$ année.

La 1^re^ année, il faut prendre sur la somme a l'intérêt de la somme ms, qui est msr, en sorte qu'il reste pour le service de l'amortissement une somme de

$$a - msr = \frac{msr}{(1+r)^n - 1}.$$

Le nombre x_1 d'obligations que l'on peut rembourser la 1^re^ année s'obtient en divisant le résultat précédent par la valeur s d'une obligation ; j'ai donc

$$x_1 = \frac{mr}{(1+r)^n - 1}.$$

Le nombre x_2 d'obligations que l'on peut rembourser la 2^e^ année se compose du nombre x_1 remboursé la 1^re^ année, augmenté du nombre d'obligations que peut donner l'intérêt de ces x_1 obligations, intérêt qu'il n'est plus nécessaire de payer la 2^e^ année. J'ai donc

$$x_2 = x_1 + x_1 r = x_1(1+r) = \frac{mr(1+r)}{(1+r)^n - 1}.$$

Le même raisonnement montrerait que le nombre x_3 d'obligations remboursables la 3^e^ année serait

$$x_3 = x_2(1+r) = \frac{mr(1+r)^2}{(1+r)^n - 1}.$$

En général, le nombre d'obligations à rembourser la $p^{ième}$ année serait

$$x_p = \frac{mr(1+r)^{p-1}}{(1+r)^n - 1}.$$

Le nombre d'obligations qui se trouveront remboursées à la fin de la $p^{ième}$ année sera

$$\frac{mr}{(1+r)^n-1}+\frac{mr(1+r)}{(1+r)^n-1}+\frac{mr(1+r)^2}{(1+r)^n-1}+\ldots$$
$$+\frac{mr(1+r)^{p-1}}{(1+r)^n-1},$$

soit

$$\frac{mr}{(1+r)^n-1}[1+(1+r)+(1+r)^2+\ldots+(1+r)^{p-1}],$$

ou

$$\frac{mr}{(1+r)^n-1}\times\frac{(1+r)^p-1}{r}=\frac{m[(1+r)^p-1]}{(1+r)^n-1}.$$

Cette formule montre immédiatement que le nombre d'obligations qui seront remboursées à la fin de la $n^{ième}$ année est m.

Le nombre y_p d'obligations qu'il reste à rembourser à la fin de la $p^{ième}$ année est

$$y_p=m-\frac{m[(1+r)^p-1]}{(1+r)^n-1}=\frac{m[(1+r)^n-(1+r)^p]}{(1+r)^n-1}$$
$$=m(1+r)^p\times\frac{(1+r)^{n-p}-1}{(1+r)^n-1}.$$

Remarque. Ces résultats ne sont pas entièrement nouveaux, mais ils sont peu connus. M. Boudsot est arrivé aux mêmes formules dans un travail fort intéressant qu'il a publié dans les Mémoires de la Société d'émulation du Doubs (1857), mais en suivant une marche différente: j'ai cru utile de vous communiquer ce petit calcul.

Note du Rédacteur. Dans les entreprises *industrielles*, le nombre annuel d'*obligations* à rembourser dépend aussi des bénéfices ou pertes.

EXERCICES SUR LES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

(voir t. X, p. 89; t. XI, p. 119; t. XII, p. 319; t. XIII, p. 295 et 362).

Le savant professeur de l'université de Padoue (*), auteur de la méthode dés équipollences, M. Bellavitis (Giusti), a publié en 1857 l'ouvrage suivant : *Sulla resoluzione numerica delle equazioni* (grand in-4 de 57 p. Venise.)

C'est un recueil de tous les procédés en usage pour résoudre les équations numériques, algébriques et transcendantes, avec douze exemples scrupuleusement discutés, d'après lesquels on apprend à se diriger en d'autres cas. L'auteur recommande, avec raison, cette très-excellente pratique : Soit

$$f(x) = 0$$

l'équation donnée; on la divise en deux parties

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0;$$

on construit par points les deux courbes

$$y = f_1(x), \quad y = f_2(x);$$

les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes donnent les racines réelles de l'équation. Ce procédé sert au moins à découvrir les nombres entre lesquels ces racines sont comprises, bien entendu qu'on fait le partage de manière à obtenir les cas les plus faciles à construire. Pour les racines imaginaires, on remplace x par $u + vi$, et les deux courbes en u et v font connaître l'existence des racines imaginaires.

(*) Né à Bassano en 1803.

La méthode Budan, que les Anglais et les Allemands désignent sous le nom de *Horner* et aujourd'hui devenue classique, est très-développée, et en certains cas perfectionnée, dans ce Mémoire.

Voici quelques exemples tirés de ce Mémoire :

$$4^x + 5^x = 10;$$

posant

$$5^x = t,$$

on trouve

$$t = 5{,}593948.$$

$$x^{\sqrt{2}} - x + 0{,}1 = 0, \quad x = 0{,}21013, \quad x = 0{,}681919,$$

$$x = 0{,}227765 + 0{,}925312\sqrt{-1},$$

$$\sqrt[3]{28+x} - \sqrt[4]{65+x} + x = 0,$$

$$x = -5{,}713985,$$

$$x = -0{,}188302,$$

$$xy^2 + (x^2 + y)y - x^2 + x = 0,$$

$$4y^2 - 3xy - x^2 + 5x = 0,$$

$$\begin{cases} x = 3{,}8347, \\ y = 0{,}4530, \end{cases}$$

$$y^3 - 4xy + 2x^2 - x^3 = 0, \quad (x-1)y^2 + x^2 = 0,$$

$$x = -1{,}11374, \quad y = 0{,}76606,$$

$$x = 0{,}773573,$$

$$x = 0{,}818304,$$

$$x^4 + y^4 = 300, \quad x^3 + y^3 = 80, \quad x^3 = 14{,}2143,$$

$$\sin^6(6\varphi) = \sin\varphi \sin^5(5\varphi), \quad \sin\varphi = 0{,}23122417,$$

$$x^6 + x + 1 = 0, \quad x = 0{,}790667 + \sqrt{0{,}300507}.$$

SUR LE THÉORÈME FAURE ET COURBES PARALLÈLES

(voir page 234);

PAR LE RÉVÉREND G. SALMON.

Note du Rédacteur. Le raisonnement porte sur des formules du savant ministre; ses ouvrages, d'un mérite hors rang, connus dans toute contrée civilisée, sont presque totalement inconnus en France.

Plusieurs éminents professeurs ont fait des traductions, mais qui ne trouvent pas d'éditeurs, et cela pour une raison commerciale très-naturelle. Désormais tout ouvrage qui ne porte pas pour enseigne *conforme* n'a qu'un minime nombre d'acquéreurs. Commerçant, voudriez-vous vous charger d'une marchandise qui n'a pas de chance de débit? Par contre, les ouvrages de physique, de chimie, d'industrie, en général, tout ce qui peut enseigner à confectionner quelque objet matériel, *vendable*, jouissent d'une grande faveur en librairie.

Nous croyons donc nécessaires quelques explications : nous nous servirons de quelques expressions que nous avons déjà expliquées (t. XVIII, p. 249), et sur lesquelles nous ne reviendrons pas.

1°. Soient

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

les équations de trois côtés d'un triangle;

$$L^2 + M^2 = N^2$$

représentera l'équation d'une conique. Le triangle est conjugué à la conique. En effet, on aura

$$L^2 = N^2 - M^2 = (N + M)(N - M);$$

les droites représentées par les équations

$$N + M = 0, \quad N - M = 0$$

touchent la conique, et

$$L = 0$$

est l'équation de la corde de contact. Mais l'intersection de ces tangentes est la même que celle des droites M, N; donc ce point d'intersection est le pôle de la droite L; on démontre que l'intersection de N et de L est le pôle de la droite M; de même l'intersection de M et de L est le pôle de la droite N; alors les deux tangentes $N + L\sqrt{-1}$, $N - L\sqrt{-1}$ sont imaginaires; c'est que ce pôle est situé dans l'intérieur de la conique.

La conique

$$a\text{LM} + b\text{LN} + c\text{MN} = 0$$

passe évidemment par les sommets du triangle conjugué.

2°. Soit

$$\begin{aligned} U &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy \\ &= (a, b, c, d, e, f)(x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

l'équation d'une conique.

Représentons par Δ son discriminant ou invariant principal; on a

$$\Delta = abc + 2def - ad^2 - be^2 - cf^2.$$

Soit $V = 0$ une seconde conique ayant pour coefficients a', b', c', d', e', f', et soit Δ' son discriminant, $U + \lambda V = 0$, où λ est une constante arbitraire, est l'équation d'une troisième conique passant par les quatre points d'intersection des deux premières coniques. Désignant par Δ'' le discriminant de cette troisième conique, ordonnée suivant les puissances de λ, on a

$$\Delta'' = \Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta' + \lambda^3\Delta',$$

$$\begin{aligned}\theta &= \left(a'\frac{d}{da} + b'\frac{d}{db} + c'\frac{d}{dc} + d'\frac{d}{dd} + e'\frac{d}{de} + f'\frac{d}{df}\right)\Delta\\ &= a'(be - d^2) + b'(ca - e^2) + c'(ab - f^2)\\ &\quad + 2d'(ef - ad) + 2e'(fd - be + 2f'(de - cf).\end{aligned}$$

On dérive de même Θ' de Δ'.

Θ et Θ' sont deux invariants du système des deux coniques.

Si $\Theta = 0$, alors la conique V passe par les sommets d'un triangle *conjugué* à U.

Car, si cela a lieu, la conique U pourra se mettre, au moyen d'une transformation linéaire, sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad (\textit{voir}\ \S\ 1),$$

et la conique V sous la forme

$$2d'yz + 2e'zx + 2f'xy = 0,$$

et alors

$$a' = b' = c' = d = e = f = 0,$$

et $\Theta = 0$ par cette transformation; mais Θ étant un *invariant* s'annule donc pour une transformation linéaire quelconque des deux équations U et V.

La même condition $\Theta = 0$, exprime que les côtés d'un triangle conjugué à V touchent U.

Voici maintenant la lettre du Révérend Salmon :

J'ai lu avec plaisir le beau théorème du capitaine Faure, n° 524, *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 234.

On le déduit très-facilement par la méthode que je donne *Lessons on higher Algebra*, p. 107. Qu'on forme le discriminant de

$$U + \lambda V.$$

Qu'il soit

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta' + \lambda^3\Delta'.$$

$\Theta = 0$ est la condition, ou que les sommets d'un triangle conjugué à U soient à la circonférence de V, ou bien que les côtés d'un triangle conjugué à V touchent U.

Formons donc le discriminant de

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2].$$

Nous trouvons

$$\Delta = -\frac{1}{a^2 b^2},$$

$$\Theta = \frac{1}{a^2 b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - r^2 - a^2 - b^2),$$

$$\Theta' = \frac{\alpha^2 - r^2}{a^2} + \frac{\beta^2 - r^2}{b^2} - 1,$$

$$\Delta' = -r^2.$$

$\Theta = 0$ donne le théorème du capitaine Faure.

$\Theta' = 0$ est la relation entre les coordonnées du centre et le rayon d'un cercle *inscrit* à un triangle conjugué de l'ellipse.

Ainsi :

On donne un triangle conjugué à une hyperbole équilatère : le centre du cercle inscrit au triangle est sur la circonférence de l'hyperbole.

On donne un triangle conjugué à une parabole, le centre du cercle circonscrit est sur la directrice. Etc., etc.

Je remarque aussi que la méthode la plus facile de former l'équation de la courbe *parallèle* à une ellipse (c'est-à-dire la courbe dont la distance à l'ellipse mesurée sur les normales de l'ellipse est constante $= r$) est comme suit :

Il est seulement nécessaire de former le discriminant de l'équation

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Theta' + \lambda^3\Delta' = 0,$$

où Δ, etc., ont les valeurs données ci-dessus.

De même, on trouve l'équation de la surface parallèle à

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

en formant le discriminant en λ du discriminant de

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) + \lambda\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - r^2\right].$$

Ainsi on trouve l'équation de la surface parallèle, sous la forme,

$$S^2 = T^3.$$

QUESTION DU GRAND CONCOURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (JUILLET 1860);

PAR M. LEMOINE,
Élève du Prytanée Militaire.

Étant donnés deux ellipsoïdes A *et* B, *trouver le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont tangentes à* A *et parallèles à trois plans diamétraux conjugués de* B.

Lemme. On peut supposer A et B concentriques; car en transportant B, par exemple, parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son centre coïncide avec celui de A, on ne changera pas la direction des diamètres conjugués.

Soient alors

$$(\alpha)\ Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bzy + 2B'xz + 2B''xy + F = 0,$$
$$(\beta)\ A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + 2B_1zy + 2B'_1xz + 2B''_1xy + F''_1 = 0,$$

les équations des deux ellipsoïdes.

Soit

$$x = mz, \quad y = z,$$

les équations d'une droite. Les plans diamétraux correspondants à cette direction de cordes seront dans les deux ellipsoïdes

$$(Am + B' + B''n)x + (A'n + B + B''m)y + (A'' + Bn + B'm)z = 0,$$
$$(A_1m + B'_1 + B''_1n)x + (A'_1n + B_1 + B''_1m)y + (A''_1 + B_1n + B'_1m\ z = 0.$$

Si

$$\frac{Am + B' + B''n}{A_1m + B'_1 + B''_1n} = \frac{A'n + B + B''m}{A'_1n + B_1 + B''_1m} = \frac{A'' + Bn + B'm}{A''_1 + B_1n + B'_1m} = z,$$

alors ces deux plans coïncident.

Appelons z la valeur commune de ces rapports : si je démontre qu'il y a des valeurs réelles pour z, il y en aura pour m et n.

On aura donc

$$(1) \qquad (A - A_1z)m + (B'' - B''_1z)n + (B' - B'_1z) = 0,$$

d'où

$$(2) \qquad (B'' - B''_1z)m + (A' - A_1z)n + (B - B_1z) = 0,$$
$$(3) \qquad (B' - B_1z)m + (B - B_1z)n + (A'' - A'_1z) = 0.$$

Eliminant m et n, on trouve (déterminant)

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2(B - B_1z)(B' - B'_1z)(B'' - B''_1z) \\ & + (A - A_1z)(A' - A'_1z)(A'' - A''_1z) - (B - B_1z)^2(A - A_2z) \\ & - (B - B'_1z)^2(A' - A'_1z) - (B'' - B''_1z)^2(A'' - A''_1), \end{aligned}$$

équation du troisième degré qui, ayant pour coefficient de z^3

$$-2B_1B'_1B'_1 - A_2A'_1A''_1 + A_1B_1^2 + A'_1B'^2_1 + A''_1B''^2_1,$$

et pour terme tout connu

$$+2BB'B'' + AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$

a toujours une racine réelle finie et différente de zéro, car les deux expressions précédentes représentant les dénominateurs des coordonnées du centre des deux surfaces ne sont pas nulles, puisqu'il s'agit de deux surfaces à centre.

Soit OZ la droite qui a pour équation $x=mz$, $y=nz$, m et n ayant les valeurs que donnent deux quelconques des équations (3), (2), (1), jointe à la valeur réelle que nous venons de déterminer pour z.

Considérons le plan diamétral qui correspond à cette droite, il est le même pour les deux surfaces.

Soient $C''a$ et $C''b$ les ellipses suivant lesquelles il coupe les surfaces A et B. On sait qu'étant données deux ellipses concentriques, on peut toujours trouver un système de diamètres conjugués commun aux deux ellipses. Appelons OX et OY ces deux diamètres conjugués pour les ellipses $C'a$ et $C'b$. Cela posé, il est évident que les trois droites OZ, OY, OX, forment un système de diamètres conjugués communs aux deux ellipsoïdes. Donc en prenant ces droites pour axes coordonnés, on peut donner aux équations des deux ellipsoïdes les formes suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} (\mathrm{B}) & \dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}+\dfrac{z^2}{c'^2}=1, \\[2ex] (\mathrm{A}) & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \end{cases}$$

Solution de la question.

Posons $x = a'x_1$, $y = b'y_1$, $z = c'z_1$, et substituons. Les deux équations deviendront

$$(2)\left\{\begin{array}{ll} (\mathrm{B}') & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \\ (\mathrm{A}') & \dfrac{a'^2 x_1^2}{a^2} + \dfrac{b'^2 y_1^2}{b^2} + \dfrac{c'^2 z_1^2}{c^2} = 1. \end{array}\right.$$

Et résolvons la question pour ce système d'équations, il est évident que si nous trouvons pour équation du lieu $f(x_1 y_1 z_1) = 0$, le lieu pour le premier système sera

$$f\left(\frac{x}{a'}\,\frac{y}{b'}\,\frac{z}{c'}\right) = 0.$$

Cela posé, considérons le système suivant en supposant les axes rectangulaires

$$(3)\left\{\begin{array}{ll} (\mathrm{A}'') & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1, \\ (\mathrm{A}'') & \dfrac{a'^2 x_2^2}{a^2} + \dfrac{b'^2 y_2^2}{b^2} + \dfrac{c'^2 z_2^2}{c^2} = 1. \end{array}\right.$$

La première équation B″ représente une sphère, et par suite tous ses plans diamétraux conjugués sont rectangulaires; donc pour ce système la question revient à ce théorème de Monge : Le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrit à une ellipsoïde est une sphère, sphère qui, dans notre question, a pour équation

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \frac{a^2}{a'^2} + \frac{b^2}{b'^2} + \frac{c^2}{c'^2}.$$

Mais les relations algébriques que donnent le système de l'équation (2) et le système de l'équation (3) sont identiquement les mêmes; donc le résultat du calcul algébrique sera pour le système de l'équation (2) comme pour l'équation (3)

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{a^2}{a'^2} + \frac{b^2}{b'^2} + \frac{c^2}{c'^2},$$

et en remplaçant x_1, y_1, z_1 par leur valeur en x, y, z, on aura pour l'équation dans le système (1)

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = \frac{a^2}{a'^2} + \frac{b^2}{b'^2} + \frac{c^2}{c'^2}.$$

C. Q. F. D.

Ce qui est un ellipsoïde semblable à B, concentrique et semblablement disposé.

Note du Rédacteur. Le théorème subsiste pour deux surfaces du second degré quelconques. On le démontre par des transformations linéaires qui maintiennent le parallélisme des plans et des droites.

NOTE SUR LES ONDES.

Soient n molécules a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$ rangées sur la même droite, et R la distance de a_0 à a_n; supposons qu'un petit mouvement, un léger ébranlement de la molécule a_1 mette aussi en mouvement la molécule a_n au bout de t unités de temps; $\frac{R}{t}$ est ce qu'on nomme la *vitesse de propagation* de l'ébranlement, et la droite $a_1 a_n$ est la direction de la propagation, qui peut n'être pas la même que la direction que prend a_n et qu'on nomme *direction de vibration.* La vitesse de propagation peut n'être pas la même dans toutes les directions de propagation; alors toutes les molécules a_n qui entrent en mouvement au bout du même nombre d'unités de temps forment une surface qu'on nomme *onde*. Si par un point de cette surface on mène un plan tangent, la direction de vibration est toujours dans ce plan ou perpendiculaire à ce plan, qu'on nomme aussi *onde plane*. La vitesse de propagation dans le sens normal au plan est toujours plus grande que la vitesse dans le sens même du plan ; cette dernière vitesse se nomme aussi *vitesse transversale ou polarisée;* cette vitesse peut avoir plusieurs directions : elle en a deux dans la double réfraction. L'*étendue* de l'oscillation d'une molécule se nomme *amplitude* de l'onde.

THÉORÈMES SUR LES CERCLES QUI TOUCHENT LES COTÉS D'UN TRIANGLE.

Le cercle qui touche intérieurement un triangle donne lieu à *trois points de contact intérieurs* et les trois cercles qui touchent extérieurement donnent lieu à *trois points de contact extérieurs*.

Théorème I. Les trois droites qui vont des sommets aux points de contact intérieurs des côtés opposés se coupent en un *même point*; ce point, le centre du cercle intérieur, le centre de gravité de l'aire du triangle sont sur une *même droite*. Ce dernier point tombe entre les deux autres et partage leur intervalle dans le rapport de $1 : 2$.

Théorème II. Les trois droites qui vont des sommets aux *points de contact intérieurs* se coupent en un même point I.

Les trois droites qui vont respectivement des centres des cercles extérieurs aux points *milieux* des côtés du triangle qu'ils touchent se coupent en un même point I_1 ;

les points I, I_1 et le centre de gravité de l'aire sont sur une *même* droite, et ce centre partage l'intervalle entre I et I_1 dans le rapport de 1 : 2.

Théorème III. Les perpendiculaires abaissées des centres des cercles extérieurs sur les côtés du triangle qu'ils touchent, se coupent en un même point également éloigné de ces trois centres; ce point, le centre du cercle inscrit, le centre du cercle circonscrit sont sur une même droite et ce dernier point est au milieu des deux autres points.

Théorème IV. Prenons deux cercles extérieurs E_1, E_2, le cercle intérieur I; du centre de E_1 abaissons une perpendiculaire sur le côté correspondant à E_2; du centre E_2 une perpendiculaire sur le côté correspondant à E_1, et du centre de I une perpendiculaire sur le troisième côté: ces trois perpendiculaires se coupent en un même point également éloigné des trois centres des cercles E_1, E_2, I.

Ce point, le centre du cercle extérieur E_3, le centre du cercle circonscrit au triangle, sont sur une même droite, et le dernier point est au milieu des deux autres.

Théorème V. Soit le triangle ABC. Le cercle E touche BC (opposé à A) prolongé, en e_1; le cercle E_2 touche AC (opposé à B) prolongé, en e_2; le cercle intérieur I touche AB (opposé à C), en i_1; les trois droites Ae_1, Be_2, Ci_1 se coupent en un même point; ce point, le centre du cercle qui touche AB extérieurement et le centre de gravité sont sur une *même* droite, et ce dernier point partage l'intervalle entre les deux premiers dans le rapport de 1 : 2.

Ces théorèmes sont énoncés par M. Nagel, recteur de l'École Industrielle (*Real-Schule*) à Ulm.

SOLUTION DES QUESTIONS 494 ET 499,

méthode Grassmann et propriété de la cubique gauche

(voir t. XVIII, p. 444, et t. XIX, p. 43);

Par M. CREMONA,
Professeur.

La question 499 embrasse deux énoncés, qui, si je ne me trompe, exigent quelques corrections. Dans le premier énoncé, les droites B, D et le point m sont des éléments fixes superflus à la construction du point variable p. Il suffirait de dire : « Si les côtés ap, cp, ac d'un triangle » variable acp tournent autour de trois points fixes » l, s, o, et si deux sommets a, c glissent sur deux droites » fixes A, C, le troisième sommet p décrira une conique.» C'est le célèbre théorème de Maclaurin et Braikenridge. Si le lieu du point p doit être une cubique (courbe du troisième ordre), il faut modifier les données de la question.

Le deuxième énoncé n'est pas complet. On n'y trouve pas de données suffisantes pour définir un lieu géométrique. Il faut lire : « Si les côtés ab, bc, cd, da, et la dia- » gonale bd d'un quadrilatère plan variable $abcd$ tour- » nent autour de cinq points fixes o, p, q, r, s, et les » sommets a, c, qui sont au dehors de la diagonale, glis- » sant sur deux droites fixes M, N, chacun des autres » sommets b, d décrira une cubique. »

Ce beau théorème a été donné par un éminent géomètre allemand, M. Hermann-Gunther Grassmann, de Stettin (*), dans un Mémoire inséré dans le t. XXXI du *Journal de Crelle*, p. 111-132; 1846.

(*) Professeur au gymnase de Stettin. Né dans cette ville en 1809.

A l'occasion de ces théorèmes qui se rapportent à la *géométrie des intersections*, je ne puis m'empêcher de mentionner une méthode très-expéditive et très-curieuse, dont la première idée paraît appartenir à Leibniz, mais qui a été vraiment établie par M. Grassmann dans un ouvrage intéressant (*die Wissenschaft der extensiven Grosse oder die Ansdehnungslehre*), imprimé à Leipzig en 1844, et dans des Mémoires postérieurs (*Preisschriften gekront und herausgegeben von der fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft*, Leipzig, 1847, *Journal de Crelle,* t. XXXI, XXXVI, XLII, XLIV, XLIX, LII). Excepté MM. Mobius (*Preisschriften, etc., ut supra*) et Bellavitis (*Atti dell' Istituto Veneto*, décembre 1854), je ne sache pas que quelque géomètre ait donné aux recherches de M. Grassmann l'attention qu'elles méritent.

Je vais reproduire ici les premières définitions et conventions de cette ingénieuse théorie, que l'auteur nomme *analyse géométrique*. Je désignerai toujours les points par de *petites* lettres, et les droites par des lettres *majuscules*.

Première définition. ab représente la *droite* qui joint les points a et b.

Deuxième définition. AB représente le *point* commun aux droites A et B.

Conventions. On pose :

$ab = 0$ si les points a et b coïncident;

$AB = 0$ si les droites A et B (indéfinies) coïncident;

$aB = 0$ ou bien $Ba = 0$ si le point a est sur la droite B.

Cela posé, soient a, b deux points fixes, x un point variable :

$$abx = 0$$

est l'équation d'une droite, car elle exprime que x est toujours sur ab. De même

$$ABX = o$$

est l'équation d'un point, enveloppe de la droite mobile X.

M. Grassmann démontre la proposition qui suit, et qui est la généralisation du théorème de Pascal (*hexagramma mysticum*).

« Si un point x mobile dans un plan est assujetti à la
» condition qu'un certain point et une certaine droite,
» *déduisibles* du point x et d'une série de points et droites
» fixes au moyen de constructions exécutées avec la seule
» règle, doivent tomber l'un dans l'autre, et si le point x
» a été employé n fois dans ces constructions, le lieu du
» point x sera une courbe de l'ordre n. »

L'auteur donne aussi le théorème corrélatif pour la génération des courbes de la classe n, et les propositions analogues dans l'espace pour la génération des surfaces algébriques.

La construction du point variable x (p) dans le premier énoncé rectifié, question 499, est représentée par l'équation *planimétrique* (selon l'appellation de M. Grassmann) :

$$xsCoAlx = o$$

(la droite xs coupe C dans un point, la droite qui passe par ce point et par o rencontre A dans un autre point qui avec l donne une droite passant par x).

Cette équation contient deux fois l'élément variable x, et par conséquent, selon le théorème général de M. Grassmann, elle appartient à une conique. Cette conique passe par les cinq points :

$$s,\ \ l,\ \ AC,\ \ soA,\ \ loC;$$

ce qui est évident, parce que chacun d'eux satisfait identiquement l'équation de la courbe.

Dans l'autre énoncé, question 499, la construction du point variable x (b) est indiquée par l'équation planimétrique qui suit :

$$(xp\mathrm{N}q)(xo\mathrm{M}r)(xs)=0$$

(exprimant que les trois droites $xp\mathrm{N}q$, $xo\mathrm{M}r$, xs passent par un même point). Cette équation contient trois fois le point variable x; donc elle appartient à une cubique. On trouve aisément que cette courbe contient les neuf points :

$$o,\ p,\ s,\ \mathrm{MN},\ (pq)(or),\ qs\mathrm{N},\ rs\mathrm{M},\ pq\mathrm{M},\ or\mathrm{N}.$$

M. Grassmann démontre que l'équation ci-dessus est complétement générale, c'est-à-dire, elle représente toute courbe plane du troisième ordre.

La question 494 (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 444) est un autre théorème de M. Grassmann (*Journal de Crelle*, t. XXXI). La construction du point variable x (q) donne l'équation planimétrique

$$(xa\mathrm{A})(xb\mathrm{B})(xc\mathrm{C})=0,$$

exprimant que les trois points $xa\mathrm{A}$, $xb\mathrm{B}$, $xc\mathrm{C}$ sont en ligne droite. L'équation contient trois fois l'élément variable x, donc le lieu de la question 494 est une cubique, qui passe par les neuf points :

$$a,\ b,\ c,\ \mathrm{BC},\ \mathrm{CA},\ \mathrm{AB},\ bc\mathrm{A},\ ca\mathrm{B},\ ab\mathrm{C}.$$

Soit X la droite variable qui contient les trois points $xa\mathrm{A}$, $xb\mathrm{B}$, $xc\mathrm{C}$: on aura évidemment

$$(\mathrm{XA}a)(\mathrm{XB}b)(\mathrm{XC}c)=0;$$

donc la droite X enveloppe une courbe de la troisième classe, qui touche les neuf droites :

A, B, C, bc, ca, ab, BCa, CAb, ABc.

Ainsi on peut regarder comme résolues les questions 494 et 499.

Propriété de la cubique gauche.

J'ai trouvé cette propriété en m'occupant de cette courbe à double courbure dans ma solution de la question 435 (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 199).

« Par une cubique gauche osculée par le plan à l'infini » passe un seul cylindre du second ordre, et ce cylindre » est parabolique. » J'ai énoncé cette proposition dans mon dernier Mémoire inséré dans les *Annali di Matematica* (Rome, juillet et août 1859) : *Intorno alle coniche inscritte in una stessa superficie sviluppabile del quart' ordine*. Or voici le nouveau théorème.

« Pour chaque plan parallèle au cylindre, la courbe » admet un système de cordes parallèles à ce plan, dont » les points milieux sont situés sur une même droite » (diamètre). Ce diamètre passe par le point de la cu- » bique gauche où elle est touchée par un plan parallèle » aux cordes; il est la droite d'intersection du plan oscu- » lateur avec le plan asymptote, qui correspondent à ce » même point (par chaque point de la courbe passe un » plan asymptote, c'est-à-dire tangent à l'infini, et tous » ces plans sont parallèles entre eux).

» Donc par chaque point de la courbe passe un dia- » mètre, qui bissecte les cordes parallèles au plan qui » touche, sans osculer, la courbe au même point. Tous » ces diamètres sont parallèles à un même plan, savoir à » la direction des plans asymptotes, et forment une sur- » face du troisième ordre.

» La courbe admet au moins un point (et au plus trois)

» où la droite tangente et le diamètre correspondant se » rencontrent sous un angle droit. »

On voit par là la frappante analogie entre cette courbe à double courbure et la parabole ordinaire (*).

QUESTIONS.

540. Dans une ellipse donnée *inscrire* un triangle *équilatéral* dont le côté soit 1° un maximum, 2° un minimum.

541. Même question pour le triangle *équilatéral circonscrit*.

542. Supposons que z^2 puisse se décomposer de n manières en produits de facteurs inégaux ($1 . z^2$ compris); démontrer que $4z^2$ peut se décomposer de n manières et pas davantage en différence de deux carrés entiers.

543.

$$ax - by = x^2 - y^2, \quad a + b = c^3,$$
$$bx + ay = 4xy, \quad a - b = d^4,$$
$$4x = (c^2 + d^2)(c + d), \quad 4y = (c^2 + d^2)(c - d).$$

544.

$$a_1 + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n} = \mathrm{P}.$$

Changeant dans ce polynôme n signes et désignant le nouveau polynôme par Q, combien PQ renferme-t-il de quantités irrationnelles?

(*) On peut consulter le Mémoire français de M. Cremona dans Crelle, t. LVIII, p. 138, 1860, qui vient de paraître. On y cite ce théorème remarquable de Cayley : « Toute surface réglée (non développable) est d'une *classe* égale à son *ordre*. »

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES (*);

PAR M. E.-E. KUMMER.

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

On a peu étudié jusqu'ici dans toute leur généralité les systèmes de rayons rectilignes qui remplissent tout l'espace ou une partie de l'espace de telle manière que, par chaque point donné, il passe un rayon ou un nombre déterminé de rayons. Dans les recherches géométriques, on s'est occupé surtout d'un système déterminé de rayons, savoir : celui où tous les rayons peuvent être considérés comme normaux à une même surface. La théorie de ce système a la connexion la plus intime avec celle de la courbure des surfaces. Les propriétés les plus remarquables de ce système ont été trouvées par Monge et exposées par lui dans l'*Application de l'analyse à la géométrie* (**). Comme les systèmes de rayons rectilignes dans l'espace ont une grande importance dans l'optique, leur théorie a souvent été étudiée comme question de physique; mais,

(*) Ce Mémoire est un modèle de géométrie analytique d'une grande fécondité théorique et physique et il est élémentaire. Je donne ce nom à tout ce qui est bien étagé, bien éclairé, à ce qui n'exige point des pas trop élevés. Les ouvrages d'Euler, de Lagrange sont plus *élementaires* que certaines arithmétiques. (*Note du Rédacteur*).

(**) 5e édition, par M. Liouville; 1850.

à ce point de vue, on n'a guère étudié non plus que les systèmes de rayons normaux à une même surface. La théorie générale de ces rayons a conduit d'une manière remarquable à un des plus beaux théorèmes de l'optique, au théorème de Malus généralisé par Dupin. Voici l'énoncé de ce théorème : *Tous les systèmes lumineux issus d'un point sont normaux à une même surface après avoir subi un nombre quelconque de réflexions sur des surfaces quelconques données et un nombre quelconque de réfractions par le passage au travers de milieux limités jouissant de pouvoirs réfringents différents.* Cette propriété n'appartient pas aux systèmes irréguliers de rayons que l'on obtient après le passage de la lumière à travers les cristaux. Ces rayons forment des systèmes qui ne sont plus normaux à une même surface et que, pour cette raison, on a nommés *systèmes irréguliers*. Quoique les cristaux ne donnent naissance qu'à certains systèmes particuliers, ils ont cependant amené l'étude des systèmes les plus généraux de rayons rectilignes.

A ma connaissance, ces systèmes ont été étudiés pour la première fois par Hamilton, dans les *Transactions of the royal Irish Academy*, t. XVI, dans un supplément à son grand traité : *Theory of systems of rays*, où il ne les avait pas encore considérés. Ce traité, rédigé en vue de l'optique, ne renferme que les systèmes réguliers et leurs modifications par réflexions et réfractions, et les systèmes irréguliers donnés par le passage de la lumière à travers les cristaux. Dans ce premier supplément, Hamilton part de principes physiques et notamment de celui du moindre travail, et il cherche à déduire les propriétés géométriques du système général de rayons rectilignes, de la formule que donne ce principe. Il a découvert, par cette voie, une suite de propriétés remarquables du système le plus général de rayons. Il semble que ces propriétés soient peu connues, car il n'en est pas fait mention dans les Mémoires qui ont paru depuis sur le même sujet. Approfondir de nouveau cette théorie traitée pour la première fois par Hamilton en employant la géométrie analytique à trois dimensions, la compléter en quelques points importants, tel est le but de ce Mémoire.

§ I. — *Formules et notations.*

Un rayon rectiligne du système sera déterminé si l'on donne un point x, y, z (coordonnées rectangulaires) de ce rayon et les angles que ce rayon forme avec les trois axes des coordonnées. Soient ξ, η, ζ les cosinus de ces angles. La relation qui lie entre eux différents rayons et qui en forme un système pourra être donnée de la manière suivante : les six quantités x, y, z, ξ, η, ζ sont des fonctions continues de deux variables indépendantes u et v. D'après cela, les points (x, y, z) se trouvant sur une certaine surface, les rayons du système peuvent être considérés comme issus des divers points de cette surface. Un point d'un rayon sera déterminé par sa distance à l'origine du rayon. Cette distance est comptée sur le rayon, nous la désignerons par r et nous la nommerons *abscisse.*

Considérons deux rayons du système. L'origine du premier rayon et sa direction sont déterminées par x, y, z, ξ, η, ζ. Pour le second, ces mêmes quantités deviennent $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, $\xi + \Delta\xi$, $\eta + \Delta\eta$, $\zeta + \Delta\zeta$; Δx, Δy, etc., ont des valeurs finies. La relation qui existe entre ces deux rayons sera connue, si l'on détermine : l'angle ε qu'ils forment entre eux, la longueur p de leur plus courte distance et la direction de cette plus courte distance, ou le cosinus $\varkappa$, λ, μ des angles qu'elle forme avec les trois axes, et enfin l'abscisse r du pied de cette plus courte distance sur le premier rayon. La géométrie analytique donne ces quatre quantités en fonction des coordonnées des origines des deux rayons et de leurs directions, comme il suit :

$$(1)\qquad \cos\varepsilon = \xi(\xi+\Delta\xi)+\eta(\eta+\Delta\eta)+\zeta(\zeta+\Delta\zeta),$$

$$(2)\qquad \sin^2\varepsilon = (\eta\Delta\zeta-\zeta\Delta\eta)^2+(\zeta\Delta\xi-\xi\Delta\eta)^2+(\xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi)^2,$$

$$(3)\qquad p\sin\varepsilon = (\eta\Delta\zeta-\zeta\Delta\eta)\Delta x+(\zeta\Delta\xi-\xi\Delta\zeta)\Delta y+(\xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi)\Delta z,$$

$$(4)\qquad \varkappa=\frac{\eta\Delta\zeta-\zeta\Delta\eta}{\sin\varepsilon},\quad \lambda=\frac{\zeta\Delta\xi-\xi\Delta\zeta}{\sin\varepsilon},\quad \mu=\frac{\xi\Delta\eta-\eta\Delta\xi}{\sin\varepsilon},$$

$$(5)\qquad p=\varkappa\Delta x+\lambda\Delta y+\mu\Delta z,$$

$$(6)\left\{\begin{aligned} r\sin\varepsilon &= [\mu(\eta+\Delta\eta)-\lambda(\zeta+\Delta\zeta)]\Delta x\\ &+[\varkappa(\zeta+\Delta\zeta)-\mu(\xi+\Delta\xi)]\Delta y+[\lambda(\xi+\Delta\xi)-\varkappa(\eta+\Delta\eta)]\Delta z.\end{aligned}\right.$$

Au moyen des relations

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,$$
$$(\xi+\Delta\xi)^2+(\eta+\Delta\eta)^2+(\zeta+\Delta\zeta)^2=1,$$

d'où l'on déduit

$$(7)\qquad \xi\Delta\xi+\eta\Delta\eta+\zeta\Delta\zeta=-\frac{1}{2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2),$$

on peut mettre les expressions de $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$, r sous la forme suivante :

$$(8)\qquad \cos\varepsilon = 1-\frac{1}{2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2),$$

$$(9)\qquad \sin^2\varepsilon = \Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2-\frac{1}{4}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Lambda\zeta^2)^2,$$

$$(10)\left\{\begin{aligned} r\sin^2\varepsilon &= -(\Delta x\Delta\xi+\Delta y\Delta\eta+\Delta z\Delta\zeta)+\frac{1}{2}(\Delta\xi^2+\Delta\eta^2+\Delta\zeta^2)\\ &\times[\Delta x(\xi+\Delta\xi)+\Delta y(\eta+\Delta\eta)+\Delta z(\zeta+\Delta\zeta)].\end{aligned}\right.$$

Considérons les distances des deux rayons en chacun de leurs points, ces distances étant mesurées par les perpendiculaires abaissées des différents points du second sur le premier, nommons q les longueurs de ces perpendiculaires, R les abscisses de leurs pieds sur le premier rayon, $\varkappa'$, λ', μ' les cosinus des angles qu'elles forment avec les trois axes ; nous avons

$$(11)\quad \begin{cases} q\varkappa' = \Delta x - \mathrm{R}\xi + \dfrac{(\mathrm{R}-\mathrm{P})(\xi+\Delta\xi)}{\cos\varepsilon}, \\ q\lambda' = \Delta y - \mathrm{R}\eta + \dfrac{(\mathrm{R}-\mathrm{P})(\eta+\Delta\eta)}{\cos\varepsilon}, \\ q\mu' = \Delta z - \mathrm{R}\zeta + \dfrac{(\mathrm{R}-\mathrm{P})(\zeta+\Delta\zeta)}{\cos\varepsilon}. \end{cases}$$

Nous avons posé, pour abréger,

$$\mathrm{P} = \xi\Delta x + \eta\Delta y + \zeta\Delta z.$$

Supposons que le second rayon se rapproche infiniment près du premier, de manière que les différences Δx, Δy, etc., deviennent les différentielles dx, dy, etc. Les quantités p, q, ε deviennent infiniment petites, désignons-les par dp, dq, $d\varepsilon$. Les infiniment petits d'ordre supérieur disparaissant, il vient

$$(12)\quad d\varepsilon^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2,$$

$$(13)\quad \varkappa = \frac{\eta d\zeta - \zeta d\eta}{d\varepsilon}, \quad \lambda = \frac{\zeta d\xi - \xi d\zeta}{d\varepsilon}, \quad \mu = \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{d\varepsilon},$$

$$(14)\quad dp = \varkappa dx + \lambda dy + \mu dz,$$

$$(15)\quad r = -\frac{dx d\xi + dy d\eta + dz d\zeta}{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2},$$

$$(16)\quad \begin{cases} \varkappa' dq = dx + \mathrm{R}d\xi - \xi(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \lambda' dq = dy + \mathrm{R}d\eta - \eta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \\ \mu' dq = dz + \mathrm{R}d\zeta - \zeta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz), \end{cases}$$

x, y, z, ξ, η, ζ étant des fonctions des deux variables indépendantes u et v, leurs différentielles peuvent s'exprimer par les quotients différentiels partiels pris par rapport à u et à v, et par les différentielles du et dv.

Nous emploierons les mêmes notations que Gauss dans ses *Disquisitiones generales circà superficies curvas* pour les premiers quotients différentiels partiels et pour les expressions qui résultent de leurs combinaisons ; ainsi nous posons

(17) $dx = adu + a'dv; \quad dy = bdu + b'dv; \quad dz = cdu + c'dv;$

(18) $bc' - b'c = \mathrm{A}, \quad ca' - ac' = \mathrm{B}, \quad ab' - ba' = \mathrm{C},$

(19) $a^2 + b^2 + c^2 = \mathrm{E}, \quad aa' + bb' + cc' = \mathrm{F}, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = \mathrm{G}$ (*).

Nous emploierons des notations analogues pour les quotients différentiels partiels des quantités ξ, η, ζ et pour les expressions qui résultent de leurs combinaisons :

(20) $d\xi = \mathrm{a}du + \mathrm{a}'dv; \quad d\eta = \mathrm{b}du + \mathrm{b}'dv; \quad d\zeta = \mathrm{c}du + \mathrm{c}'dv,$

(21) $\mathrm{bc}' - \mathrm{cb}' = \mathcal{A}, \quad \mathrm{ca}' - \mathrm{ac}' = \mathcal{B}, \quad \mathrm{ab}' - \mathrm{ba}' = \mathcal{C},$

(22) $\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 = \mathcal{E}, \quad \mathrm{aa}' + \mathrm{bb}' + \mathrm{cc}' = \mathcal{F}, \quad \mathrm{a}'^2 + \mathrm{b}'^2 + \mathrm{c}'^2 = \mathcal{G}.$

Par suite, nous avons

(23) $$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = \mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = \Delta^2.$$

Plus loin, nous emploierons aussi les abréviations suivantes :

(24) $$\left\{\begin{aligned} a\mathrm{a} + b\mathrm{b} + c\mathrm{c} &= \mathbf{e}, \\ a'\mathrm{a} + b'\mathrm{b} + c'\mathrm{c} &= \mathrm{f}, \\ a\mathrm{a}' + b\mathrm{b}' + c\mathrm{c}' &= \mathrm{f}', \\ a'\mathrm{a}' + b'\mathrm{b}' + c'\mathrm{c}' &= \mathrm{g}. \end{aligned}\right.$$

Le quotient des différentielles des deux variables indépendantes du et dv sera représenté par t, ainsi

(25) $$\frac{dv}{du} = t.$$

De l'équation
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. XI, p. 195 ; 1852.

qui, différentiée successivement par rapport à u et à v, donne

$$(26)\qquad \begin{cases} \xi a + \eta b + \zeta c = 0, \\ \xi a' + \eta b' + \zeta c' = 0, \end{cases}$$

on tire

$$(27)\qquad \xi = \frac{\mathcal{A}}{\Delta},\quad \eta = \frac{\mathcal{B}}{\Delta},\quad \zeta = \frac{\mathcal{C}}{\Delta},$$

nous emploierons ces expressions avec avantage.

Les valeurs de ξ, η, ζ sont indéterminées dans le cas où $\Delta = 0$, car l'équation $\Delta = 0$ entraîne les équations $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} = 0$, $\mathcal{C} = 0$. Ce cas ne se présente que pour un système particulier de rayons, et dans son étude il exige une légère modification dans les méthodes générales. Nous ne le considérerons pas spécialement, le système de rayons correspondant peut être considéré comme une limite du système général.

§ II. — *Points limites des plus courtes distances d'un rayon à un rayon infiniment voisin.*

En remplaçant dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ par les quotients différentiels et les différentielles des variables indépendantes, l'expression (15) de l'abscisse du point du premier rayon le plus rapproché d'un rayon infiniment voisin sera

$$(1)\qquad r = -\frac{e + (f + f')t + gt^2}{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2}.$$

Pour une certaine valeur de $t = \dfrac{dv}{du}$, cette expression donne la plus courte distance du premier rayon à un rayon infiniment voisin déterminé. On obtient toutes les valeurs de r, c'est-à-dire les valeurs de r qui correspondent à tous les rayons infiniment voisins, en faisant varier

t de $-\infty$ à $+\infty$. La valeur de r ne peut être nulle pour aucune des valeurs de t, puisque $\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2$ n'est jamais négatif; nous écartons le cas où $\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = 0$. Donc, les valeurs de r ne peuvent jamais être infinies et doivent rester comprises entre certaines limites données par le maximum et le minimum de r. On a donc le théorème suivant :

Les pieds des plus courtes distances d'un rayon à tous les rayons infiniment voisins qui l'entourent, se trouvent tous sur un segment déterminé de ce rayon.

Egalons à zéro le quotient différentiel de r par rapport à t. Cette équation nous donnera les valeurs de t qui déterminent les points-limites (extrémités du segment)

$$(2)\quad (\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2)(\mathrm{f} + \mathrm{f}' + 2\mathrm{g}t) - [\mathrm{e} + (\mathrm{f} + \mathrm{f}')t + \mathrm{g}t^2](2\mathcal{F} + 2\mathcal{G}t) = 0,$$

ou en simplifiant

$$(3)\quad \left[\mathrm{g}\mathcal{F} - \frac{1}{2}(\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathcal{G}\right]t^2 - (\mathrm{e}\mathcal{G} - \mathrm{g}\mathcal{E})t + \left[\frac{1}{2}(\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathcal{E} - \mathrm{e}\mathcal{F}\right] = 0.$$

Soient t_1 et t_2 les racines toujours réelles de cette équation quadratique, on a

$$(4)\quad t_1 + t_2 = \frac{\mathrm{e}\mathcal{G} - \mathrm{g}\mathcal{E}}{\mathrm{g}\mathcal{F} - \frac{1}{2}(\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathcal{G}},\quad t_1 t_2 = \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathcal{E} - \mathrm{e}\mathcal{F}}{\mathrm{g}\mathcal{F} - \frac{1}{2}(\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathcal{G}}.$$

De là, on tire ces deux équations remarquables :

$$(5)\quad \mathcal{E} + \mathcal{F}(t_1 + t_2) + \mathcal{G}t_1 t_2 = 0,$$

$$(6)\quad \mathrm{e} + \frac{1}{2}(\mathrm{f} + t_1)(t_1 + t_2) + \mathrm{g}t_1 t_2 = 0,$$

auxquelles on peut ajouter celles-ci qui se déduisent facilement des précédentes

$$(7)\qquad \mathcal{E} + 2\mathcal{F}t_1 + \mathcal{G}t_1^2 = (t_1 - t_2)(\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1),$$

$$(8)\qquad \mathcal{E} + 2\mathcal{F}t_2 + \mathcal{G}t_2^2 = (t_2 - t_1)(\mathcal{F} + \mathcal{G}t_2),$$

$$(9)\qquad (\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1)(\mathcal{F} + \mathcal{G}t_2) = -\Delta^2,$$

$$(10)\qquad (\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t_1 + \mathcal{G}t_1^2)(\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t_2 + \mathcal{G}t_2^2) = \Delta^2(t_2 - t_1)^2.$$

Si l'on désigne par r_1 et r_2 les valeurs extrêmes de r qui correspondent à $t = t_1$ et $t = t_2$, on a

$$(11)\qquad r_1 = -\frac{\mathrm{e} + (\mathrm{f} + \mathrm{f}')t_1 + \mathrm{g}t_1^2}{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t_1 + \mathcal{G}t_1^2},$$

$$(12)\qquad r_2 = -\frac{\mathrm{e} + (\mathrm{f} + \mathrm{f}')t_2 + \mathrm{g}t_2^2}{\mathcal{E}^2 + 2\mathcal{F}t_2 + \mathcal{G}t_2^2}.$$

Au moyen de l'équation (2) on peut donner à ces expressions les formes plus simples :

$$(13)\qquad r_1 = -\frac{\mathrm{e} + \frac{1}{2}(\mathrm{f} + \mathrm{f}')t_1}{\mathcal{E} + \mathcal{F}t_1} = -\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{f} + \mathrm{f}') + \mathcal{G}t_1}{\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1},$$

$$(14)\qquad r_2 = -\frac{\mathrm{e} + \frac{1}{2}(\mathrm{f} + \mathrm{f}')t_2}{\mathcal{E} + \mathcal{F}t_2} = -\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{f} + \mathrm{f}') + \mathcal{G}t_2}{\mathcal{F} + \mathcal{G}t_2}.$$

Si l'on élimine t_1 et t_2 entre ces équations, on obtient l'équation quadratique suivante dont les racines toujours réelles r_1 et r_2 sont les abscisses des points-limites des plus courtes distances d'un rayon à tous les rayons infiniment voisins :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)r^2 - [\mathrm{g}\mathcal{E} - (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathcal{F} + \mathrm{e}\mathcal{G}]r + \mathrm{eg} \\ &\qquad - \frac{1}{4}(\mathrm{f} + \mathrm{f}')^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

On tire de cette équation

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{-[g\mathfrak{C} - (f + f')\mathfrak{F} + e\mathfrak{G}]}{\Delta^2}, \\ r_1 r_2 &= \frac{eg - \frac{1}{2}(f + f')^2}{\Delta^2}. \end{aligned} \right.$$

Le segment sur lequel se trouvent les pieds de toutes les plus courtes distances d'un rayon à tous les rayons infiniment voisins est égal à la différence des abscisses des points-limites. Désignons par $2d$ la longueur de ce segment, par m l'abscisse du point milieu des deux points-limites, on aura

$$(17)\qquad d = \frac{r_2 - r_1}{2}, \quad m = \frac{r_2 + r_1}{2}.$$

(*La suite prochainement.*)

SOLUTION DES QUESTIONS DE L'ALGÈBRE BERTRAND

(voir t. XVII, p. 12);

PAR M. E. MATHIEU,
Professeur.

X. Trouver la somme des carrés des coefficients du binôme. Cette somme peut être représentée par les deux formules

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}, \quad \frac{2.6.10.14\ldots(4n-2)}{1.2\ 3\ldots n};$$

prouver que ces deux formules sont équivalentes.

Remarquons d'abord que l'expression

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

représente le nombre de combinaisons de $2n$ lettres n à n. Or, pour former ces combinaisons, supposons qu'on agisse de la manière suivante :

On partage ces $2n$ lettres en deux groupes, chacun de n lettres.

Puis, ne prenant d'abord dans le premier groupe aucune lettre, on prend toutes celles du second groupe ; ce qui formera une des combinaisons cherchées.

En second lieu, on prend une lettre dans le premier groupe, ce qui peut se faire de n manières, et on la combine avec $n-1$ lettres du deuxième groupe, ce qui peut encore se faire de n manières. On aura ainsi n^2 combinaisons.

En troisième lieu, on prend deux lettres dans le premier groupe, ce qui peut se faire de $\frac{n(n-1)}{2}$ manières, et l'on combine chacun de ces produits avec $n-2$ lettres du deuxième, ce qui donne pour chacun des produits de deux lettres du premier groupe $\frac{n(n-1)}{1.2}$ produits. On aura donc en tout $\left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)$ combinaisons.

En imaginant que l'on continue ainsi, il devient évident que l'on a

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} = 1^2 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}\right)^2 + \ldots.$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$(\alpha) \quad 2n(2n-1)\ldots(n+1) = 2.6.10.14\ldots(4n-2).$$

En effet, l'égalité est vérifiée quand on fait $n=1$, il suffit dont de prouver que si cette égalité a lieu lorsqu'on y change n en $n-1$, l'égalité (α) elle-même aura lieu.

Supposons donc que l'on ait

$$(2n-2)(2n-3)\ldots(n+1)n=2.6.10\ldots(4n-6);$$

en multipliant les deux membres par $4n-2$, on tombe sur l'égalité (α); donc cette égalité est démontrée.

La somme des carrés des coefficients du binôme peut donc encore être représentée par la formule

$$\frac{2.6.10\ldots(4n-2)}{1.2.3\ldots n}.$$

XI. Prouver que si dans la somme

$$S=\frac{1-x}{1-a}+\frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3}+\ldots$$

$$+\frac{(1-x)(a-x)\ldots(a^{n-1}-x)}{a^{\frac{n(n-1)}{2}}-a^{\frac{n(n+1)}{2}}}+\ldots,$$

on fait $x=a^n$, cette somme devient égale à n.

Si dans l'expression de S on fait $x=a^n$, tous les termes après le dernier écrit dans cette expression s'annulent, et en désignant par S_n le résultat de la substitution, on a

$$S_n=\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\ldots$$

$$+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\ldots(1-a)}{1-a^n}.$$

Or on a

$$\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\ldots(1-a^{n-p})}{1-a^{p+1}}$$

$$=\frac{(1-a^{n-1})\ldots(1-a^{n-p})(1-a^{n-p-1})}{1-a^{p+1}}$$

$$+(1-a^{n-1})\ldots(1-a^{n-p})a^{n-p-1};$$

donc on aura

$$S_n = \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a} + \frac{(1 - a^{n-1})(1 - a^{n-2})}{1 - a^2} + \ldots$$

$$+ \frac{(1 - a^{n-1})\ldots(1 - a^2)(1 - a)}{1 - a^{n-1}} + a^n + a^{n-1}(1 - a^n) + \ldots$$

$$+ a^0(1 - a^n)\ldots(1 - a^2)(1 - a).$$

Posons

$$A_n = a^n + a^{n-1}(1 - a^n) + \ldots + a^0(1 - a^n)\ldots(1 - a^2)(1 - a),$$

et nous aurons

$$S_n = S_{n-1} + A_n$$

et

$$A_n = a^n + (1 - a^n)$$
$$\times [a^{n-1} + a^{n-2}(1 - a^{n-1}) + \ldots + a_0(1 - a^{n-1})\ldots(1 - a^2)(1 - a),$$

ou

$$A_n = a^n + (1 - a^n) A_{n-1}.$$

Or on a $A_0 = 1$; donc, d'après cette dernière formule, on aura $A_1 = 1$, $A_2 = 1, \ldots, A_n = 1$.

D'autre part on a $S_1 = 1$; donc on aura $S_2 = 2$, $S_3 = 3, \ldots, S_n = n$.

XIII. On donne l'équation

$$ax^4 + by^4 + cz^4 + 2dx^2y^2 + 2ex^2z^2 + 2fy^2z^2$$
$$+ mx^2 + ny^2 + pz^2 + q = 0.$$

Trouver entre quelles limites peut varier $x^2 + y^2 + z^2$.

Commençons par tirer z^2 de l'équation donnée pour le porter dans l'équation

$$u = x^2 + y^2 + z^2;$$

et nous chercherons ensuite entre quelles limites peut varier u. En tirant z^2 de l'équation donnée, on a

$$z^2 = \frac{-p - 2ex^2 - 2fy^2}{2c}$$
$$\pm \sqrt{Ay^4 + Bx^2y^2 + Cx^4 + Dy^2 + Ex^2 + F},$$

en posant

$$A = \frac{f^2 - bc}{c^2}, \quad B = \frac{2ef}{c^2}, \quad C = \frac{e^2 - ac}{c^2},$$

$$D = \frac{pf - cn}{c^2}, \quad E = \frac{pe - cm}{c^2}, \quad F = \frac{p^2 - 4cq}{4c^2}.$$

Portant z^2 dans l'expression de u, on a

$$u = \frac{c - e}{c} x^2 + \frac{c - f}{c^2} y^2 - \frac{p}{2c}$$
$$\pm \sqrt{Ay^4 + Bx^2y^2 + Cx^4 + Dy^2 + Ex^2 + F}.$$

Résolvons cette équation par rapport à y^2, et pour cela chassons d'abord le radical, ce qui nous donne

$$(\xi) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(u + \frac{e - c}{c} x^2 + \frac{f - c}{c} y^2 + \frac{p}{2c}\right)^2 \\ &= Ay^4 + Bx^2y^2 + Cx^4 + Dy^2 + Ex^2 + F. \end{aligned} \right.$$

En résolvant cette équation par rapport à y^2, on trouvera une expression de la forme suivante

$$y^2 = \alpha x^2 + \beta \pm \sqrt{Nx^4 + Px^2 + Q},$$

β, P et Q étant des quantités qui contiennent u, et α et N étant des quantités qui ne le contiennent pas.

y^2 doit d'abord être réel, il faut donc que l'on ait

$$(\eta) \qquad Nx^4 + Px^2 + Q > 0.$$

N peut être positif ou négatif. S'il est négatif, il faudra que x^2 soit compris entre les deux racines de l'équation

$$Nx^4 + Px^2 + Q = 0,$$

ce qui exigera que l'on ait

$$P^2 - 4NQ > 0, \quad \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4NQ}}{2N} > 0.$$

P et Q étant fonctions de u, ces deux inégalités nous indiqueront des limites de u. Si N est positif, l'inégalité (η) pourra toujours avoir lieu, quelle que soit u, et la réalité de y^2 ne donne plus de conditions. Enfin il faudra que y soit réel, ou que y^2 soit positif, et pour cela il suffira que la plus petite valeur de y^2 soit positive. Or, en résolvant l'équation (ξ) par rapport à x^2, on aura

$$x^2 = \alpha_1 y^2 + \beta_1 \pm \sqrt{N_1 y^4 + P_1 y^2 + Q_1}.$$

Soient y_1^2 et y_2^2 les racines de l'équation

$$N_1 w^2 + P_1 w + Q = 0,$$

on aura

$$y_1^2 = \lambda\, u^2 + \mu\, u + \nu,$$
$$y_2^2 = \lambda' u^2 + \mu' u + \nu'.$$

Supposons $N_1 < 0$, nous chercherons entre quelles limites doit varier u, pour que la quantité

$$(\lambda - \lambda')u^2 + (\mu - \mu')u + \nu - \nu'$$

soit plus grande ou plus petite que zéro. On trouvera ainsi que y_2 est minimum quand u varie entre u_1 et u_2, et l'on posera

$$u > u_1, \quad u < u_2, \quad \lambda' u^2 + \mu' u + \nu' > 0.$$

On trouvera aussi que y_1 est minimum quand u varie depuis $-\infty$ jusqu'à u_1, et depuis u_2 jusqu'à $+\infty$, et l'on aura

$$u < u_1 \quad \text{ou} \quad u > u_2 \quad \text{avec} \quad \lambda u^2 + \mu u + \nu > 0.$$

Si N_1 était > 0, on exprimerait encore que le minimum de y est > 0.

XIV. Entre quelles limites peut varier l'expression

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z-3x)^2+2x-y+z+10,$$

lorsque x, y, z prennent toutes les valeurs possibles?

Ordonnons cette expression par rapport à x, et, d'après la règle générale, égalons-la à une quantité indéterminée m. Ainsi nous posons

$$10x^2+2(y-3z+1)x+2y^2+2yz+2z^2-y+z+10=m,$$

et nous allons chercher entre quelles limites peut varier m pour que x, y, z restent réels. Résolvons cette équation par rapport à x, nous trouverons

$$x=\frac{-y+3z-1\pm\sqrt{-19y^2-2(13z-6)y-11z^2-16z-99+10m}}{10}.$$

Pour que x soit réel, il faut que la quantité qui se trouve sous le radical soit positive, ce qui donne

$$(1)\qquad 19y^2+2(13z-6)y+11z^2+16z+99-10m<0.$$

Or, pour que cette inégalité soit satisfaite, il faut et il suffit que y soit compris entre les racines y' et y'' de l'équation

$$19y^2+2(13z-6)y+11z^2+16z+99-10m=0;$$

ainsi les valeurs de y' et y'' sont les suivantes

$$y=\frac{-13z+6\pm\sqrt{-40z^2-460z-1845+190m}}{19}.$$

Les valeurs de y' et de y'' devant être réelles, on a

$$(2)\qquad 40z^2+460z+1845-190m<0.$$

Pour que cette inégalité puisse avoir lieu, on voit encore qu'il faut et il suffit que z soit compris entre les quantités z' et z'', dont les valeurs seront données par l'expression

$$z = \frac{-230 \pm \sqrt{230^2 - 40 \times 1845 + 40 \times 190m}}{40};$$

z' et z'' devant être réels, nous aurons

$$230^2 - 40 \times 1845 + 40 \times 190m > 0,$$

et en effectuant les calculs,

$$m > \frac{11}{4};$$

telle est la condition nécessaire et suffisante. Ainsi le polynôme proposé peut varier depuis $\frac{11}{4}$ jusqu'à ∞ quand x, y, z prennent toutes les valeurs possibles. Il faut bien remarquer que les inégalités (1) et (2) ne donnent que des conditions auxquelles doit être assujettie m, puisque x, y, z peuvent être quelconques.

XV. On donne trois équations à deux inconnues,

$$ax + by = d,$$
$$a'x + b'y = d',$$
$$a''x + b''y = d''$$

Il existe un nombre infini de facteurs λ, λ', λ'', tels, qu'en multipliant la première équation par λ, la seconde par λ', la troisième par λ'', et en ajoutant les résultats, on obtient une équation de la forme

$$x = \lambda d + \lambda' d' + \lambda'' d'''.$$

Trouver les facteurs λ, λ', λ'' qui, remplissant cette condition, rendent la somme $\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2$ la plus petite possible.

Les quantités λ, λ', λ'' sont reliées entre elles par les équations

$$a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' = 1,$$
$$b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'' = 0.$$

Ajoutons-y l'équation

$$d\lambda + d'\lambda' + d''\lambda'' = \nu,$$

ν étant une indéterminée, et résolvons ces trois équations; posons

$$R = a'b'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a'',$$

et nous trouverons

$$\lambda = \frac{(b'd'' - d'b'') + (a'b'' - b'a'')\nu}{R},$$
$$\lambda' = \frac{(db'' - bd'' + (ba'' - ab'')\nu}{R},$$
$$\lambda'' = \frac{bd' - db' + (ab' - ba')\nu}{R}.$$

En désignant donc par u la somme $\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2$, nous avons

$$\begin{aligned} R^2 u = {} & [b'd'' - db'' + (a'b'' - b'a'')\nu]^2 \\ & + [db'' - bd'' - (ab'' - ba'')\nu]^2 \\ & + [bd' - db' + (ab' - ba')\nu]^2; \end{aligned}$$

u se trouve ainsi exprimé au moyen de la seule indéterminée ν; posons

$$b'd'' - d'b'' = A, \quad db'' - bd'' = A', \quad bd' - db' = A'',$$
$$a'b'' - b'a'' = B, \quad ab'' - ba'' = B', \quad ab' - ba' = B'',$$

et l'équation précédente pourra s'écrire

$$R^2 u = (A + B\nu)^2 + (A' + B'\nu)^2 + (A'' + B''\nu)^2,$$

ou, si nous ordonnons par rapport à v,

$$(B^2 + B'^2 + B''^2)v^2 + 2(AB + A'B' + A''B'')v$$
$$+ A^2 + A'^2 + A''^2 - R^2 u = 0.$$

D'après la règle générale, résolvons cette équation, ce qui nous donnera

$$= \frac{-(AB+A'B'+A''B'') \pm \sqrt{(AB+A'B'+A''B'')^2 - (B^2+B'^2+B''^2)(A^2+A'^2+A''^2-R^2 u)}}{B^2+B'^2+B''^2}.$$

Pour que le radical soit réel, il faut que u soit au moins égal à

$$\frac{(B^2 + B'^2 + B''^2)(A^2 + A'^2 + A''^2) - (AB + A'B' + A''B'')^2}{R^2(B^2 + B'^2 + B''^2)},$$

ou à

$$\frac{(AB' - BA')^2 + (A''B - AB'')^2 + (A'B'' - B'A'')^2}{R^2(B^2 + B'^2 + B''^2)}.$$

Donc cette expression est le minimum de u, la valeur de v correspondante est $-\dfrac{AB + A'B' + A''B''}{B^2 + B'^2 + B''^2}$, qu'il faudra porter dans les expressions de λ, λ', λ'' pour avoir celles-ci.

CHAPITRE XII (p. 166).

I. Quelles sont les progressions par différence dans lesquelles la somme de deux termes quelconques fait partie de la progression; et les progressions par quotient dans lesquelles le produit de deux termes fait partie de la progression?

Soient u et v deux termes quelconques d'une progression par différence dont la raison est r, on aura

$$u = a + nr, \quad v = a + pr$$

et

$$u + v = 2a + (n + p)r.$$

Si $u + v$ est un terme de la progression, on a aussi

$$u + v = a + kr.$$

En comparant ces deux valeurs de $u + v$, on voit que le premier terme a sera un multiple de la raison.

Considérons maintenant deux termes quelconques d'une progression par quotient; ils seront

$$u = aq^n, \quad v = aq^p,$$

et l'on aura $uv = a^2 q^{n+p}$; uv étant un terme de la progression, on a aussi $uv = aq^k$; a est donc une puissance de la raison.

III. Dans quelles progressions par différence existe-t-il un rapport indépendant de n, entre la somme des n premiers termes et la somme des n suivants.

La somme des n premiers termes est

$$S = \frac{[2a + (n - 1)r]n}{2},$$

la somme des n suivants est

$$S' = \frac{[2a + (3n - 1)r]n}{2};$$

et l'on aura

$$\frac{S}{S'} = \frac{nr + 2a - r}{3nr + 2a - r} = \frac{1 + \dfrac{2a - r}{nr}}{3 + \dfrac{2a - r}{nr}}.$$

Ainsi en général $\frac{S}{S'}$ n'est pas indépendant de n, mais il tend vers $\frac{1}{3}$ à mesure que n augmente. Le raisonnement n'est en défaut que lorsque r est nul, parce que l'on ne peut plus diviser les deux termes de la fraction par r. Dans ce cas, $\frac{S}{S'}$ est évidemment constamment égal à 1, et la progression cherchée a tous ses termes égaux à a.

V. Si l'on prend la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7,..., et qu'on la sépare en groupes dont le premier ait un terme, le second deux termes, le troisième trois, etc., la somme des termes d'un même groupe est un cube.

Le nombre de termes qui précèdent le $n^{ième}$ groupe est égal à $1+2+3+\ldots+n-1$, ou à $\frac{n(n-1)}{2}$. On trouve alors facilement le premier terme du $n^{ième}$ groupe; il est $1+n(n-1)$, et il nous reste à trouver la somme des n termes de la progression

$$n(n-1)+1, \quad n(n-1)+3, \ldots, \quad n(n-1)+2n-1;$$

elle est $\frac{[n(n-1)+1+n(n-1)+2n-1]n}{2}$ ou n^3.

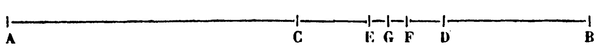
VI. Si l'on considère la suite 1, 2, 4, 6, 8, 10,..., la somme des n premiers termes est impaire et, augmentée des $n-1$ nombres impairs suivants, elle donne un cube.

La somme des $n-1$ nombres 2, 4, 6,..., $2n-2$ est $n(n-1)$, et la somme des n nombres impairs que nous recherchons est

$$n(n-1)+1+n(n-1)+3+\ldots+n(n-1)+2n-1,$$

comme dans l'exercice précédent; elle est donc n^3.

X. Soit AB une ligne quelconque, on marque son



milieu C, puis le milieu D de CB, puis le milieu E de DC, puis le milieu F de ED, le milieu G de FE, et ainsi de suite indéfiniment; prouver que les points C, D, E, F, G s'approchent de plus en plus du tiers de AB, à partir du point B.

On aura

$$BE = \frac{3}{8},$$

$$BF = \frac{3}{8} - \frac{1}{16},$$

$$BG = \frac{3}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}.$$

En continuant ainsi, on voit qu'en désignant par X le point cherché, on aura

$$BX = \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4 \times 16} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{4 \times 32} + \ldots\right).$$

Ayant fait la somme des termes de chacune de ces progressions, on aura

$$BX = \frac{3}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3},$$

ce qui est précisément ce qu'il fallait trouver.

XI. Trouver la limite de la somme des fractions

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots,$$

dont les numérateurs forment une progression par différence, et les dénominateurs une progression par quotient.

Désignons par S la limite de cette somme, nous aurons

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots,$$

ce qui peut s'écrire

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{32} + \ldots.$$

La première série est une progression par quotient, dont la somme des termes est égale à 1 ; la deuxième série est égale à $\frac{S}{2}$; on a donc

$$S = 1 + \frac{1}{2}S;$$

d'où

$$S = 2.$$

XIII. Si dans une progression par différence trois termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison est divisible par 6, à moins que le premier de ces termes ne soit 3. S'il y en a 5, la raison est divisible par 30, à moins que le premier de ces termes ne soit 5, et s'il y en a 7, elle est divisible par 210, à moins que le premier de ces termes ne soit 7.

Considérons en général k termes consécutifs d'une progression par différence

$$a,\quad a+r,\quad a+2r,\ \ldots,\quad a+(k-1)r,$$

et supposons k un nombre premier; si aucun de ces termes n'est divisible par k, r est divisible par k.

En effet, supposons, si cela est possible, que r ne soit pas divisible par k, je dis d'abord que les restes de la division des nombres r, $2r$, $3r, \ldots, (k-1)r$ par k seront tous différents, et, par conséquent, seront dans un ordre quelconque $1, 2, 3, \ldots, k-1$.

Car, si deux de ces restes étaient égaux à α, m et n étant des nombres plus petits que k, on aurait

$$mr = qk + \alpha,\quad nr = q'k + \alpha,$$

et par suite

$$(m-n)r = (q-q')k$$

et

$$\frac{(m-n)r}{k} = q - q',$$

ce qui est impossible, puisque le nombre premier k ne peut diviser ni $m - n$, ni r.

Or a n'étant pas divisible par k, l'addition de a à un des nombres $1, 2, 3, \ldots, k-1$ donnera un nombre divisible par k. Ainsi il est impossible de supposer que r ne soit pas divisible par k.

Cela posé, si dans une progression par différence deux termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison est divisible par 2, à moins que le premier de ces termes ne soit 2.

Si trois termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison est divisible par 3, à moins que le premier de ces termes ne soit 3; elle est d'ailleurs divisible par 2; donc elle est divisible par 6.

Si cinq termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison est divisible par 5, à moins que le premier de ces termes ne soit 5; elle est d'ailleurs évidemment divisible par 2 et par 3; donc elle est divisible par 30.

On voit de même que si sept termes consécutifs sont des nombres premiers, la raison est divisible par 30×7 ou 210, si le premier de ces termes n'est pas 7.

XIV. Dans une progression par quotient dont le nombre des termes est impair, la somme des carrés des termes est égale à la somme des termes multipliée par l'excès de la somme des termes de rang impair sur la somme des termes de rang pair.

Soit

$$\div\div\, a : aq : aq^2 : \ldots : aq^n$$

la progression donnée; n y est pair, et les carrés des termes de cette progression forment une autre progression par quotient

$$\div\div\, a^2 : aq^2 : a^2q^4 : \ldots : a^2q^{2n}.$$

Les sommes des termes de ces deux progressions sont respectivement

$$S = \frac{a(q^{n-1} - 1)}{q - 1} \quad \text{et} \quad S_1 = \frac{a^2(q^{2n+2} - 1)}{q^2 - 1}.$$

S_1 peut s'écrire

$$S_1 = \frac{a(q^{n+1} - 1)}{q - 1} \times \frac{a(q^{n+1} + 1)}{q^2 - 1}.$$

Or, $n + 1$ étant impair, on aura, en effectuant la division de $q^{n+1} + 1$ par $q + 1$

$$\frac{q^{n+1} + 1}{q + 1} = q^n - q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots - q + 1.$$

Donc

$$S_1 = S[(aq^n + aq^{n-2} + \ldots + a) - (aq^{n-1} + aq^{n-3} + \ldots + aq)],$$

C. Q. F. D.

XV. Éliminer y entre les deux équations

$$x^m + x^{m-1}y + x^{m-2}y^2 + \ldots + y^m = a^m,$$

$$x^{2m} + x^{2m-2}y^2 + x^{2m-4}y^4 + \ldots + y^{2m} = b^{2m}.$$

Les premiers membres de ces deux équations sont deux progressions dont les raisons sont $\frac{y}{x}$ et $\frac{y^2}{x^2}$; ces deux équations peuvent donc s'écrire

$$\frac{y^{m+1} - x^{m+1}}{y - x} = a^m,$$

$$\frac{y^{2m+2} - x^{2m+2}}{y^2 - x^2} = b^{2m}.$$

Divisant la seconde par la première, on a

$$\frac{y^{m+1} + x^{m+1}}{y + x} = \frac{b^{2m}}{a^m}.$$

On aura donc les deux équations

$$y^{m+1} - x^{m+1} = a^m y - a^m x,$$

$$y^{m+1} + x^{m+1} = \frac{b^{2m}}{a^m} y + \frac{b^{2m}}{a^m} x.$$

Retranchant ces deux équations membre à membre, on aura

$$2 x^{m+1} = \frac{b^{2m} - a^{2m}}{a^m} y + \frac{b^{2m} + a^{2m}}{a^m} x;$$

d'où

$$y = \frac{2 a^m x^{m+1} - (b^{2m} + a^{2m}) x}{b^{2m} - a^{2m}}.$$

On portera cette valeur de y dans l'équation

$$\frac{y^{m+1} - x^{m+1}}{y - x} = a^m,$$

et après les réductions, on trouvera

$$\begin{aligned} & x^m (2 a^m x^m - a^{2m} - b^{2m})^{m+1} \\ = & (b^{2m} - a^{2m})^m [(b^{2m} + a^{2m}) x^{2m} - 2 a^m b^{2m}], \end{aligned}$$

équation qui ne contient plus que x.

XVI. Trouver une progression par quotient, connaissant la somme de ses termes, la somme de leurs carrés et celle de leurs cubes.

Les carrés et les cubes des termes de la progression cherchée forment aussi une progression par quotient. Soient S_1, S_2, S_3 la somme des termes, la somme de leurs carrés et celle de leurs cubes, on aura les trois équations

$$S_1 = \frac{lq - a}{q - 1},$$

$$S_2 = \frac{l^2 q^2 - a^2}{q^2 - 1},$$

$$S_3 = \frac{l^3 q^3 - a^3}{q^3 - 1},$$

dans lesquelles a, l, q sont les trois inconnues. Divisons membre à membre les deux dernières équations par la première, et nous aurons les trois équations

$$S_1 = \frac{lq' - a}{q - 1},$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{lq + a}{q + 1},$$

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{l^2 q^2 + laq + a^2}{q^2 + q + 1}.$$

Les deux premières ne contiennent les inconnues qu'au premier degré ; tirons a et q de ces deux équations, nous trouverons

$$(\alpha) \quad q = \frac{S_1^2 - S_2}{S_1^2 - 2lS_1 + S_2} \quad \text{et} \quad a = \frac{2S_1S_2 - lS_1^2 - lS_2}{S_1^2 - 2lS_1 + S_2}.$$

Portant ces valeurs de q et de a dans la troisième équation, nous aurons une équation qui ne renfermera plus que l'inconnue l ; elle est

$$S^3(3S_1^4 - 6lS_1^3 + 4l^2S_1^2 + S_2^2 - 2lS_1S_2)$$
$$= S_1(3l^2S_2^2 - 2lS_1^3S_2 - 6lS_1S_2^2 + 4S_1^2S_2^2 + l^2S_1^4);$$

et si on la résout par rapport à l, elle devient

$$S_1(S_1^4 + 4S_1S_3 + 3S_2^2)l^2 - 2(S_1^4S_2 - 3S_1^3S_3 + 3S_1^2S_2^2 - S_1S_2S_3)l$$
$$+ 4S_1^3S_2^2 - 3S_1^4S_3 - S_2^2S_3 = 0.$$

l étant trouvée par cette équation du second degré, on portera sa valeur dans les expressions (α), et l'on aura a et q.

SOLUTION DE LA QUESTION 500

(voir p. 43);

PAR J. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

1. La seconde des équations proposées

$$x^5 - 10x^2 - 10x - 6 = 0$$

se déduit de la troisième

$$x^5 - 5\alpha x^2 - 5\beta x - \frac{\beta^2}{\alpha} - \frac{\alpha^3}{\beta} = 0,$$

en posant $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

Cette dernière n'est qu'un cas particulier d'une équation de degré quelconque, mais d'une certaine forme.

2. M et N étant deux quantités réelles, proposons-nous de former l'équation dont les racines se déduiraient de l'expression

$$\rho M + \rho^2 N,$$

en y remplaçant ρ par chacune des racines de l'équation

$$u^p - 1 = 0;$$

soit

$$(1) \qquad x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_h x^{p-h} + \ldots + A_p = 0$$

l'équation cherchée.

Désignons par S_h, h étant un nombre entier absolu qui peut être nul, la somme des puissances d'exposant h des racines de l'équation (1); par S'_h la même somme pour les racines de l'équation

$$u^p - 1 = 0,$$

S_h se déduira du développement de $(\rho M + \rho^2 N)^h$ en y remplaçant

$$\rho^h, \rho^{h+1}, \ldots, \rho^{h+i}, \ldots, \rho^{2h}, \quad \text{par} \quad S'_h, S'_{h+1}, \ldots, S'_{h+i}, \ldots, S'_{2h},$$

et l'on a

$$(2) \qquad S_h = \sum_{i=h}^{i=0} \left[\frac{h!}{i!\,(h-i)!} M^{h-i} N^i S'_{h+i} \right];$$

mais S'_{p+i} est égal à p ou à zéro, suivant que $h+i$ est ou non un multiple de p, zéro étant regardé comme un multiple de tout nombre; il en résulte

$$p = \begin{cases} = 2q, & q \gtreqless h \leqq q, \\ & \text{tous les termes du deuxième membre de l'équation (2) sont nuls} \\ = 2q+1, & 1 \gtreqless h \leqq q \end{cases}$$

$$p = \begin{cases} = 2q, & q \gtreqless h \leqq 2q-1 \ldots\ldots \quad \dfrac{h!}{(2q-h)!\,(2h-2q)!} M^{2h-2q} N^{2q-h} . S'_{2q}, \\ & \text{tous les termes du deuxième membre de l'équation (2) sont nuls hors un} \qquad \text{savoir :} \\ = 2q+1, & q+1 \gtreqless h \leqq 2q \ldots\ldots \quad \dfrac{h!}{(2q+1-h)!\,(2h-2q-1)!} M^{2h-2q-1} N^{2q+1-h} . S'_{2q+1}. \end{cases}$$

Enfin si $h=p$, tous les termes du deuxième membre se détruisent, excepté le premier et le dernier qui sont

$$\mathrm{M}^p \mathrm{S}'_p, \quad \mathrm{N}^p \mathrm{S}'_{2p}.$$

3. On en déduit :

$$p = 2q \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_2 = \ldots = \mathrm{S}_{q-1} = 0, \\ 0 \lesseqgtr r \leqq q-1, \quad \mathrm{S}_{q+r} = \dfrac{(q+r)!}{(q-r)!\,(2r)!} 2q \mathrm{M}^{2q} \mathrm{N}^{q-r}, \\ \mathrm{S}_{2q} = 2q(\mathrm{M}^{2q} + \mathrm{N}^{2q}); \end{array} \right.$$

$$p = 2q+1 \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_2 = \ldots = \mathrm{S}_q = 0, \\ 1 \lesseqgtr r \leqq q, \quad \mathrm{S}_{q+r} = \dfrac{(q+r)!}{(q+1-r)!\,(2r-1)!} (2q+1) \mathrm{M}^{2r-1} \mathrm{N}^{q+1-r}, \\ \mathrm{S}_{2q+1} = (2q+1)(\mathrm{M}^{2q+1} + \mathrm{N}^{2q+2}). \end{array} \right.$$

4. Substituant dans les équations connues :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_1 + \mathrm{A}_1 &= 0, \\ \mathrm{S}_2 + \mathrm{A}_1 \mathrm{S}_1 + 2\mathrm{A}_2 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{S}_p + \mathrm{A}_1 \mathrm{S}_{p-1} + \ldots + \mathrm{A}_{p-1} \mathrm{S}_1 + p\,\mathrm{A}_p &= 0, \end{aligned}$$

on a

$$p = 2q \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_1 = \ldots = \mathrm{A}_{q-1} = 0, \\ 0 \lesseqgtr r \leqq q-1, \quad \dfrac{(q+r)!}{(q-r)!\,(2r)!} 2q \mathrm{M}^{2r} \mathrm{N}^{q-r} + (q+r) \mathrm{A}_{q+r} = 0, \\ 2q(\mathrm{M}^{2q} + \mathrm{N}^{2q}) + 2q \mathrm{N}^q \mathrm{A}_q + 2q \mathrm{A}_{2q} = 0; \end{array} \right.$$

$$p = 2q+1 \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = \ldots = \mathrm{A}_q = 0, \\ 1 \lesseqgtr r \leqq q, \quad \dfrac{(q+r)!}{(q+1-r)!\,(2r-1)!} (2q+1) \mathrm{M}^{2r-1} \mathrm{N}^{q+1-r} + (q+r) \mathrm{A}_{q+r} = 0, \\ (2q+1)(\mathrm{M}^{2q+1} + \mathrm{N}^{2q+1}) + (2q+1) \mathrm{A}_{2q+1} = 0. \end{array} \right.$$

5. On a enfin

$$p=2q\left\{\begin{array}{l} A_1=A_2=\ldots+A_{q-1}=0,\\ 0\overline{\gtrless} r\leqq q-1,\quad A_{q+r}=-2q\dfrac{(q+r-1)!}{(q-r)!\,(2r)!}M^{2r}N^{q-r},\\ A_{2q}=-(M^{2q}-N^{2q});\end{array}\right.$$

$$p=2q+1\left\{\begin{array}{l} A_1=A_2=\ldots=A_q=0,\\ 1\overline{\lessgtr} r\leqq q,\quad A_{q+r}=-(2q+1)\dfrac{(q+r-1)!}{(q+1-r)!\,(2r-1)!}M^{2r-1}N^{q+1-r},\\ A_{2q+1}=-(M^{2q+1}+N^{2q+1}).\end{array}\right.$$

6. En substituant dans l'équation (1) on a

$$(3)\qquad x^{2q}-2q\sum_{r=0}^{r=q-1}\left[\frac{(q+r-1)!}{(q-r)!\,(2r)!}M^{2r}N^{q-r}x^{q-r}\right]-(M^{2q}-N^{2q})=0,$$

$$(4)\left\{\begin{array}{l} x^{2q+1}-(2q+1)\displaystyle\sum_{r=1}^{r=q}\left[\frac{(q+r-1)!}{(q+1-r)!\,(2r-1)!}M^{2r-1}N^{q+1-r}x^{q+1-r}\right]\\ -(M^{2q+1}+N^{2q+1})=0.\end{array}\right.$$

7. Convenons que, A étant une quantité positive, l'expression $A^{\frac{1}{p}}$ désigne la quantité positive qui, élevée à la puissance p, reproduit A; et que B étant une quantité réelle, $B^{\frac{1}{2p+1}}$ désigne la quantité réelle qui, élevée à la puissance $2p+1$, reproduit B.

Désignons par a et b des quantités positives, par α et β des quantités réelles. Si dans (3) on pose tour à tour

$$M = \left(\frac{b^q}{a^{q-1}}\right)^{\frac{1}{2q}}, \quad N = +(a^2)^{\frac{1}{2q}},$$

$$M = \left(\frac{b^q}{a^{q-1}}\right)^{\frac{1}{2q}}, \quad N = -(a^2)^{\frac{1}{2q}},$$

et que dans (4) on pose

$$M = \left(\frac{\beta^q}{\alpha^{q-1}}\right)^{\frac{1}{2q+1}}, \quad N = \left(\frac{\alpha^3}{\beta}\right)^{\frac{1}{2q+1}},$$

on aura les propositions suivantes.

8. Les racines des équations

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^{2q} - 2q \sum_{r=0}^{r=q-1} \left[\frac{(q+r-1)!}{(q-r)!\,(2r)!} a^{1-r} b^r x^{q-r} \right] \\ & - \left(\frac{b^q}{a^{q-1}} - a^2 \right) = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & x^{2q} - 2q \sum_{r=0}^{r=q-1} \left[(-1)^{qr} \frac{(q+r-1)!}{(q-r)!\,(2r)!} a^{1-r} b^r x^{q-r} \right] \\ & - \left(\frac{b^q}{a^{q-1}} - a^2 \right) = 0, \end{aligned} \right.$$

où a et b sont des quantités positives, sont respectivement comprises dans les formules

$$\rho \left(\frac{b^q}{a^{q-1}}\right)^{\frac{1}{2q}} + \rho^2 (a^2)^{\frac{1}{2q}}, \quad \rho \left(\frac{b^q}{a^{q-1}}\right)^{\frac{1}{2q}} - \rho^2 (a^2)^{\frac{1}{2q}},$$

ρ étant une quelconque des racines de $u^{2q} - 1 = 0$.

9. Les racines de l'équation

$$(7)\quad x^{2q+1}-(2q+1)\sum_{r=1}^{r=q}\left[\frac{(q+r-1)^!}{(q+1-r)^!(2r-1)^!}\alpha^{2-r}6^{r-1}x^{q+1-r}\right]$$

$$-\left(\frac{6^q}{\alpha^{q-1}}+\frac{\alpha^3}{6}\right)=0,$$

où α et 6 désignent des quantités réelles, sont comprises dans la formule

$$\rho\left(\frac{6^q}{\alpha^{q-1}}\right)^{\frac{1}{2q+1}}+\rho^2\left(\frac{\alpha^3}{6}\right)^{\frac{1}{2q+1}},$$

p étant une racine quelconque de $u^{2q+1}-1=0$.

En posant dans (7) $q=2$, on a

$$x^5-5\alpha x^2-56x-\frac{6^2}{\alpha}-\frac{\alpha^3}{6}=0,$$

équation proposée dont les racines sont

$$\rho\left(\frac{6^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{5}}+\rho^2\left(\frac{\alpha^3}{6}\right)^{\frac{1}{5}},$$

p étant une quelconque des racines de $u^5-1=0$.

10. Quant à la première des trois équations proposées

$$x^6-6x^4-28x^3-18x^2+12x-2=0,$$

elle est un cas particulier d'une équation de même degré que nous allons former.

11. P étant une quantité positive, proposons-nous de former l'équation dont les racines se déduiraient de

$$\rho P^{\frac{1}{6}}+\rho^2P^{\frac{2}{6}}+\rho^3P^{\frac{3}{6}}\quad\text{ou}\quad \rho P^{\frac{1}{6}}+\rho^2P^{\frac{1}{3}}+\rho^3P^{\frac{1}{2}},$$

d'après le sens attaché à $P^{\frac{m}{2n}}$ (n° 7), en y remplaçant ρ par les racines de $u^6 - 1 = 0$.

Soit

$$x^6 + p_1 x^5 + \ldots + p_6 = 0$$

l'équation cherchée

Désignons par S_m et par S'_m, m étant un nombre entier absolu qui peut être nul, les sommes des puissances d'exposant m des racines de l'équation cherchée et des racines de l'équation $u^6 - 1 = 0$.

On aura évidemment S_m en remplaçant dans le développement de

$$\left[\rho P^{\frac{1}{6}} + \left(\rho P^{\frac{1}{6}}\right)^2 + \left(\rho P^{\frac{1}{6}}\right)^3\right]^m$$

$\left(5 P^{\frac{1}{6}}\right)^q$ par $P^{\frac{q}{6}} S'_q$.

Il suffira même d'avoir égard aux termes où l'exposant est un multiple de 6, car S'_q est égal à 6 ou à 0, suivant que q est ou non un multiple de 6.

12. Or on a

$$u + u^2 + u^3 = u + u^2 + u^3,$$
$$(u + u^2 + u^3)^2 = u^2 + \ldots + u^6,$$
$$(u + u^2 + u^3)^3 = u^3 + \ldots + 7u^6 + \ldots + u^9,$$
$$(u + u^2 + u^3)^4 = u^4 + \ldots + 10u^6 + \ldots + u^{12},$$
$$(u + u^2 + u^3)^5 = u^5 + \ldots + 5u^6 + \ldots + 30u^{12},$$
$$(u + u^2 + u^3)^6 = u^6 + \ldots + 141u^{12} + \ldots + u^{18},$$

13. On en déduit

$S_1 = 0,\quad S_2 = 6P,\quad S_3 = 42P,$

$S_4 = 60P + 6P^2,\quad S_5 = 30P + 180P^2,\quad S_6 = 6P + 846P^2 + 6P^3.$

Substituant dans les équations connues,

$$S_1 + p_1 = 0,$$
$$S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$S_6 + p_1 S_5 + \ldots + 6p_6 = 0,$$

et résolvant, on a

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = -3P, \qquad p_3 = -14P,$$
$$p_4 = 3P.(P-5), \quad p_5 = 6P.(P-1), \quad p_6 = -P\,(P-1)^2,$$

d'où la proposition suivante.

14. Les racines de l'équation

$$x^6 - 3Px^4 - 14Px^3 + 3P.(P-5)x^2$$
$$+ 6P.(P-1)x - P.(P-1)^2 = 0,$$

où P est une quantité réelle, sont comprises dans la formule

$$\rho P^{\frac{1}{6}} + \rho^2 P^{\frac{1}{3}} + \rho^3 P^{\frac{1}{2}},$$

ρ étant une quelconque des racines de $u^6 - 1 = 0$. Si l'on pose $P = 2$, on a l'équation d'Euler

$$x^6 - 6x^4 - 28x^3 - 18x^2 + 12x - 2 = 0,$$

dont les racines sont données par

$$\rho . 2^{\frac{1}{6}} + \rho^2 . 2^{\frac{1}{3}} + \rho^3 . 2^{\frac{1}{2}}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 507

(voir p. 48);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

x étant une variable positive entière qui peut être nulle, u_x une fonction de cette variable, n un nombre entier absolu, on a

$$(1)\qquad \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} u_{x+n-k} = \Delta^n u_x.$$

Posons $u_x = x(x+1)\ldots(x+p-1)$, où p est un entier absolu non nul, $\Delta x = 1$,

$$\Delta^n u^x = \begin{cases} \dfrac{n!}{(p-n)!}(x+n)(x+n+1)\ldots(x+p-1), & \text{si } n<p, \\ p!, & \text{si } n=p, \\ 0 & \text{si } n>p. \end{cases}$$

L'équation (1) devient, en y supposant $x=0$, divisant les deux membres par $p!$ et remarquant que le dernier terme du premier membre devient nul,

$$(2)\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n-k}{1}\frac{n-k+1}{2}\cdots\frac{n-k+p-1}{p} \\ = \begin{cases} \dfrac{n}{1}\dfrac{n+1}{2}\cdots\dfrac{p-1}{p-n}, & \text{si } n<p, \\ 1, & \text{si } n=p, \\ 0, & \text{si } n>p. \end{cases} \end{cases}$$

Désignons par n'_k le nombre des combinaisons de n éléments pris k à k sans répétition; par $(n-k)'_p$ le nombre des combinaisons de $n-k$ éléments pris p à p avec répétition; on a

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=n_k\,\frac{(n-k)}{1}\,\frac{n-k+1}{2}\cdots\cdots\frac{n-k+p-1}{p}=(n-k)'_p$$

et

$$(p-1)_{n-1}=\begin{cases}\dfrac{n}{1}\,\dfrac{n+1}{2}\cdots\dfrac{p+1}{p-n}, & \text{si } p>n,\\ 1, & \text{si } p=n,\\ 0, & \text{si } p<n.\end{cases}$$

Donc on a en général

$$\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^k n_k(n-k)'_p=(p-1)_{n-1},$$

formule qui montre qu'il s'est glissé une faute d'impression dans le second membre de la proposée où il faut remplacer n par p, p par n.

SOLUTION DE LA QUESTION 508

(voir p. 45);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Régent à Saumur.

---

1. On a identiquement

$$\Delta^n(xu)=\Delta^{n-1}\Delta(xu)=\Delta^{n-1}(x\,\Delta u+u+\Delta u)$$
$$=\Delta^{n-1}(x\,\Delta u)+\Delta^{n-1}u+\Delta^n u,$$

d'où

$$\Delta^n(xu) = \Delta^{n-1}(x\Delta u) + \Delta^{n-1}u + \Delta^n u,$$
$$\Delta^{n-1}(x\Delta u) = \Delta^{n-2}(x\Delta^2 u) + \Delta^{n-1}u + \Delta^n u,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta(x\Delta^{n-1}u) = x\Delta^n u + \Delta^{n-1}u + \Delta^n u;$$

ajoutant membre à membre,

$$\Delta^n(xu) = n\Delta^{n-1}u + (x+n)\Delta^n u.$$

2. Posons $u = x^{n+r}$, r entier absolu qui peut être nul, on aura

$$\Delta^n(x^{n+r+1})$$
$$= n\Delta^{n-1}(x^{n+r}) + (x+n)\Delta^n(x^{n+r}),$$
$$n\Delta^{n-1}(x^{n+r})$$
$$= n(n-1)\Delta^{n-2}(x^{n+r-1}) + n(x+n-1)\Delta^{n-1}(x^{n-1+r}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n.(n-1)\ldots 3\Delta^2(x^{r+3})$$
$$= n.(n-1)\ldots 2\Delta(x^{r+2}) + n.(n-1)\ldots 3(x+2)\Delta^2(x^{2+r});$$

ajoutant membre à membre,

$$\text{(A)}\quad \Delta^n(x^{n+r+1}) = n!\left[\Delta(x^{r+2}) + \sum_{k=0}^{k=n-2}\frac{(x+n-k)}{(n-k)!}\Delta^{n-k}(x^{n-k+r})\right]\Delta.$$

3. En posant $r = 0$, comme $\Delta^q x^q = q!$, la formule (A) devient

$$\Delta^n(x^{n+1}) = n!\left[\Delta(x^2) - \sum_{k=0}^{k=n-2} x+n-k\right]$$
$$= n!\left[2x+1+\frac{2x+n+2}{1}\,\frac{n-1}{2}\right]$$
$$= n!\,(n+1)\,\frac{2x+n}{2},$$

donc

$$\text{(B)} \qquad \Delta^n(x^{n+1}) = (n+1)!\,\frac{2x+n}{2};$$

mais on a

$$\sum_{k=0}^{h=n} (-1)^k n_k \ (x+k)^{n+1} = (-1)^n \Delta^n(x^{n+1}),$$

et enfin

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k n_k (x+k)^{n-1} = (-1)^n (n+1)!\,\frac{2x+n}{2},$$

ce qui montre que le deuxième membre de la formule proposée doit être multiplié par $(-1)^n$.

4. En posant $r=1$ dans (A) et employant (B), on arrive au moyen de quelques transformations à la formule suivante, qui est peut-être nouvelle :

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k n_k (x+k)^{n+2} = (-1)^n.(n+2)!\,\frac{3.(2x+n)^2+n}{24}.$$

RECTIFICATIONS (p. 214).

1°. La phrase *On déduit de là que le produit de trois nombres, etc.*, doit suivre immédiatement la proposition I, p. 213.

2°. La formule attribuée à M. Catalan (t. XIII, p. 323; 1854) se trouve dans la *Géométrie* de M. Vincent, 2e édition, p. 558; 1832. (Communiqué par M. Augé, de Périgueux.)

RECUEIL DE FORMULES RELATIVES AUX FONCTIONS CIRCULAIRES ET LOGARITHMIQUES (suite)

(voir t. V, p. 411).

Tétragonométrie sphérique.

83. a, b, c, d les côtés, e, f les diagonales, g distance des milieux des diagonales :

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 4\cos\frac{1}{2}e\cos\frac{1}{2}f\cos g$$

(t. IV, p. 494).

83 bis.

$$\begin{aligned}1 &- (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + \cos^2 d + \cos^2 x + \cos^2 y)\\ &- (\cos^2 a\cos^2 c + \cos^2 b\cos^2 d + \cos^2 x\cos^2 y)\\ &+ 2(\cos a\cos b\cos x + \cos a\cos d\cos y\\ &\qquad + \cos b\cos c\cos y + \cos c\cos d\cos x)\\ &- 2(\cos a\cos b\cos c\cos d + \cos a\cos c\cos x\cos y\\ &\qquad + \cos b\cos d\cos x\cos y) = 0.\end{aligned}$$

$$\text{ABCD},\quad AB = a,\quad BC = b,$$
$$CD = c,\quad DA = d,\quad AC = x,\quad BD = y.$$

Trigonométrie sphérique.

84.

$$\cos x = \frac{\cos a + \cos c}{2\sin\frac{1}{2}b},$$

$x =$ arc qui va de B au milieu de b (t. V, p. 19).

85.

$$\cos\frac{1}{2}e = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

$e =$ excès sphérique.

86. $$\cos \mathrm{MN} = \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} e,$$

MN = droite qui joint les milieux de b et de c (t. V, p. 21).

87. $$\sin \frac{e}{2} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \sin \mathrm{A}}{\cos \frac{a}{2}},$$

$2p = a + b + c$ (t. VII, p. 17).

87 *bis*. $$\cot \frac{1}{2} e = \frac{\cot \frac{1}{2} c \cot \frac{1}{2} b}{\sin \mathrm{A}} + \cot \mathrm{A}.$$

88. $$2 \tang \frac{a}{2} \tang \frac{b}{2} \tang \frac{c}{2} = \tang \rho \sin \frac{e}{2},$$

ρ = rayon sphérique du cercle circonscrit (t. VII, p. 19).

89. $$\tang^2 r = \frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p},$$

r = rayon sphérique du cercle inscrit (t. VII, p. 20).

90. $$2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{e}{2} = \sin \frac{c}{2} \sin h,$$

h = hauteur sur la base c (t. VII, p. 18).

91. $$\tang r \tang r' \tang r'' \tang r''' = 4 \cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2} \sin^2 \frac{e}{2} \text{ (t. VII, p. 20).}$$

r, r', r'', r''' sont les rayons sphériques des cercles qui touchent les trois côtés du triangle (t. VII, p. 20).

92. $$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C=\sin\frac{1}{2}c\cos(P-A),$$

$$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin C=\cos\frac{1}{2}c\cos(P-C),$$

$$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C=\cos\frac{1}{2}c\cos P.$$

$2P=A+B+C$ (t. VIII, p. 435).

93. $$\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c=2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{1}{2}b\cos C'$$
$$+2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c\cos B'+2\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos A',$$

A', B', C' angles du triangle rectiligne formé par les cordes (t. VIII, p. 100).

94. $$\frac{\sin s\cos\sigma}{\sin(s+\sigma)}+\frac{\sin s'\cos\sigma'}{\sin(s'+\sigma')}+\frac{\sin s''\cos\sigma''}{\sin(s''+\sigma'')}=1.$$

Trois transversales partent des sommets et se coupent en un *point* dans l'intérieur de l'angle; σ, σ', σ'', segments comptés du *point* aux sommets des angles; s, s', s'', segments compris entre le *point* et les côtés (t. IX, p. 363).

95. $$1+\cos 2a+\cos 2b+\cos 2c$$
$$+32\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c\sin^2\frac{1}{2}e$$
$$=\cos(a+b+c)+\cos(a+b-c)+\cos(a+c-b)$$
$$+\cos(b+c-a)$$

(t. X, p 25).

Tétragonométrie rectiligne.

96.
$$a^2c^4 + a^4c^2 + b^2d^4 + x^2y^4 + x^4y^2$$
$$+ (\alpha^2b^2x^2 + a^2d^2y^2 + b^2c^2y^2 + c^2d^2x^2)$$
$$= a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + a^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2x^2y^2$$
$$+ b^2c^2d^2 + b^2d^2x^2 + b^2d^2y^2 + b^2x^2y^2 + c^2x^2y^2 + d^2x^2y^2,$$
$$\mathrm{ABCD},\quad \mathrm{AB} = a,\quad \mathrm{BC} = b,$$
$$\mathrm{CD} = c,\quad \mathrm{DA} = d,\quad \mathrm{AC} = x,\quad \mathrm{BD} = y$$

(t. IX, p. 127).

Trigonométrie rectiligne.

97.
$$\sin 2\mathrm{A} \sin 2\mathrm{B} + \sin 2\mathrm{A} \sin 2\mathrm{C} + \sin 2\mathrm{B} \sin 2\mathrm{C}$$
$$= \sin \mathrm{A} \sin (2\mathrm{C} - \mathrm{A}) + \sin \mathrm{B} \sin (2\mathrm{A} - \mathrm{B})$$
$$+ \sin \mathrm{C} \sin (2\mathrm{B} - \mathrm{C}).$$

98.
$$\cos 2\mathrm{A} \cos 2\mathrm{B} + \cos 2\mathrm{A} \cos 2\mathrm{C} + \cos 2\mathrm{B} \cos 2\mathrm{C}$$
$$= \cos \mathrm{A} \cos (2\mathrm{C} - \mathrm{A}) + \cos \mathrm{B} \cos (2\mathrm{A} - \mathrm{B})$$
$$+ \cos \mathrm{C} \cos (2\mathrm{B} - \mathrm{C}).$$

$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = \pi.$

QUESTIONS.

545. Quel est le lieu que doit décrire le centre d'une sphère, pour que la polaire réciproque d'une surface du second ordre donnée, par rapport à cette sphère, soit toujours une surface de révolution. (LAGUERRE-VERLY.)

546. Étant donnée une conique A, trouver les transformations qui la changent en une conique B, de telle sorte que les normales à la conique A restent par la transformation normales à la conique B. Même question pour les surfaces. (Laguerre-Verly.)

547. Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes est égale au carré de la tangente menée de son centre au cercle des *neuf* points, multiplié par le produit des distances de ce centre aux côtés du triangle et divisé par le produit des distances de ce centre aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle. (Faure, capitaine.)

548. Une conique passant par trois points A, B, C touche une droite donnée; appelons α, β, γ les distances respectives de ces trois points à la droite; F étant un des foyers de la conique, on a la relation

$$\left[\alpha(FB - FC)^2 - \overline{BC}^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\beta(FC - FA)^2 - \overline{AC}^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\gamma(FA - FB)^2 - \overline{AB}^2\right]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Observation. On a ainsi très-simplement le lieu du foyer des coniques qui passent par trois points donnés et touchent une droite donnée. Les coordonnées cartésiennes mènent à une équation du soixante-quatrième degré. (Faure, capitaine.)

549. Le lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère est une courbe du troisième ordre, qui passe, comme on sait, par les six sommets du quadrilatère complet; mais elle passe aussi par les *pieds* des hauteurs du triangle déterminé par les trois diagonales du quadrilatère, et comme elle passe d'ailleurs par les deux points situés *à l'infini* sur un cercle, cette courbe doit occuper parmi les courbes du troisième ordre le même rang que le cercle dans les coniques; ainsi elle a comme le cercle un double foyer. (Faure, capitaine.)

550. Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation d'une ellipse (coordonnées rectangulaires); par un point de sa développée on peut mener trois normales à l'ellipse, dont deux ne sont pas tangentes à la développée: la corde qui réunit les pieds de ces deux normales est normale à l'ellipse qui a pour equation

$$\left(\frac{c^2 x}{ab^2}\right)^2 + \left(\frac{c^2 y}{ba^2}\right)^2 = 1.$$

(DESBOVES.)

551. Démontrer que l'équation

$$x^2 + y^2 = pz^2$$

est impossible en nombre rationnel, lorsque p est de la forme $4n + 3$ (*). (Le Père JOUBERT.)

552. On donne une conique; quel est dans le plan de cette conique le lieu d'un point tel, que les deux tangentes menées de ce point à la conique et la corde de contact forment un triangle ayant un périmètre donné? Déterminer *directement* une construction *géométrique* de la tangente en un point quelconque de ce lieu. (MANNHEIM.)

553. Étant donnée une équation algébrique n'ayant pas de racines égales, si l'on applique à cette équation le procédé Sturm, et si l'une des équations ainsi obtenue a des racines égales, l'équation donnée a nécessairement des racines imaginaires. (ROUGET, professeur.)

(*) *Mémoire sur la théorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres*. In-4 de 35 pages; 1860. — Savant travail faisant suite aux travaux de MM. Hermite et Kronecker sur la limite du nombre de certaines classes des *déterminants*; au delà de cette limite le nombre des classes quadratiques surpasse nécessairement un nombre donné : une des questions les plus ardues de l'arithmologie et qui n'est pas encore complétement résolue.

EQUATION

des rapports anharmoniques correspondant aux racines d'une équation du quatrième degré;

PAR M. L. PAINVIN,
Professeur au lycée de Douai (*).

1. Désignons par x_1, x_2, x_3, x_4, les quatre racines de l'équation

$$(1) \qquad Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = 0,$$

et par a, b, c, d, les points déterminés par les longueurs x_1, x_2, x_3, x_4, portées sur une ligne droite, à partir d'une même origine; *points-racines*.

A ces quatre points correspondent *six* rapports anharmoniques, savoir :

$$r_1 = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd}, \quad r_2 = \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb}, \quad r_3 = \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc},$$

et

$$\frac{1}{r_1}, \qquad \frac{1}{r_2}, \qquad \frac{1}{r_3}.$$

Si maintenant on pose

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho_1 &= r_1 + \frac{1}{r_1}, \\ \rho_2 &= r_2 + \frac{1}{r_2}, \\ \rho_3 &= r_3 + \frac{1}{r_3}, \end{aligned} \right.$$

(*) Récemment nommé; remplaçant M. David, nommé professeur à la Faculté de Lille.

les quantités ρ_1, ρ_2, ρ_3, seront les racines de l'équation

$$(3) \qquad \rho^3 - \mathrm{M}\rho^2 + \mathrm{N}\rho - \mathrm{P} = 0,$$

où

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathrm{M} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3, \\ \mathrm{N} = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3, \\ \mathrm{P} = \rho_1\rho_2\rho_3. \end{cases}$$

Il s'agit actuellement de déterminer les coefficients de l'équation (3) en fonction des coefficients de l'équation (1). Le calcul direct est presque inabordable ; je crois donc utile de développer quelques considérations qui m'ont conduit au résultat cherché.

2. Je rappellerai d'abord les relations qui existent entre les rapports r_1, r_2, r_3 :

$$(5) \qquad \begin{cases} r_2 = \dfrac{1}{1 - r_1}, \\ r_3 = -\dfrac{1 - r_1}{r_1}; \end{cases}$$

d'où

$$r_1 r_2 r_3 = -1.$$

(*Géométrie supérieure*, p. 25.)

De plus, la valeur de r_1 est dans le cas actuel

$$(6) \qquad r_1 = \frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)} = \frac{p}{q},$$

en posant

$$(7) \qquad \begin{cases} p = (x_3 - x_1)(x_4 - x_2), \\ q = (x_3 - x_2)(x_4 - x_1). \end{cases}$$

On trouve alors, sans aucune difficulté, en ayant égard aux relations (5) et (6) :

$$M = r_1 + \frac{1}{r_1} + r_2 + \frac{1}{r_2} + r_3 + \frac{1}{r_3} = 3\,;$$

$$\begin{aligned} N &= \left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right)\left(r_2 + \frac{1}{r_2}\right) + \left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right)\left(r_3 + \frac{1}{r_3}\right) \\ &\qquad + \left(r_2 + \frac{1}{r_2}\right)\left(r_3 + \frac{1}{r_3}\right) \\ &= -\frac{p^6 - 3p^5q + 3p^4q^2 - p^3q^3 + 3p^2q^4 - 3pq^5 + q^6}{p^2q^2(p-q)^2}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \left(r_1 + \frac{1}{r_1}\right)\left(r_2 + \frac{1}{r^2}\right)\left(r_3 + \frac{1}{r_3}\right) \\ &= -4 - \frac{2p^6 - 6p^5q + 7p^4q^2 - 4p^3q^3 + 7p^2q^4 - 6pq^5 + q^6}{p^2q^2(p-q)^2}. \end{aligned}$$

Or on constate aisément que le dénominateur de N et P n'est autre que le produit des carrés des différences de l'équation (1), c'est-à-dire le discriminant de cette équation ; en le désignant par Δ, nous aurons

$$(8)\quad \begin{aligned} \Delta &= p^2q^2(p-q)^2 \\ &= (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les trois relations

$$(9)\left\{\begin{aligned} & & M &= 3 \\ &1^\circ & -\Delta N &= p^6 - 3p^5q + 3p^4q^2 - p^3q^3 \\ & & &\quad + 3p^2q^4 - 3pq^5 + q^6\,; \\ &2^\circ & -\Delta(P+4) &= 2p^6 - 6p^5q + 7p^4q^2 - 4p^3q^3 \\ & & &\quad + 7p^2q^4 - 6pq^5 + 2q^6. \end{aligned}\right.$$

3. On peut combiner les deux dernières équations de manière à faciliter beaucoup le calcul des coefficients N et P.

De l'égalité 2° retranchons le double de l'égalité 1°, il vient

$$\Delta[2N - P - 4] = p^4q^2 - 2p^3q^3 + p^2q^4 = p^2q^2(p-q)^2 = \Delta;$$

d'où

(10) $$2N - P = 5.$$

De l'égalité 2° multipliée par 3 retranchons l'égalité 1° multipliée par 5, il vient

$$\Delta[5N - 3P - 12] = p^6 - 3p^5q + 6p^4q^2 - 7p^3q^3 + 6p^2q^4 - 3pq^5 + q^6.$$

Mais le second membre est le cube de $(p^2 - pq + q^2)$, on a donc

(11) $$5N - 3P - 12 = \frac{(p^2 - pq + q^2)^3}{\Delta}.$$

La détermination des coefficients M, N, P, se trouve ainsi ramenée au calcul des deux quantités Δ et $(p^2 - pq + q^2)$.

4. Or si l'on pose

(12) $$\begin{cases} I = AE - 4BD + 3C^2, \\ J = ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3, \end{cases}$$

on a, d'après un théorème connu,

(13) $$A^6.\Delta = \overline{16}^2\,[I^3 - 27J^2].$$

On trouve d'ailleurs facilement que

(14) $$A^2(p^2 - pq + q^2) = 12.I.$$

Les égalités (10) et (11) deviennent alors

$$2N - P = 5,$$
$$5N - 3P = 12 + \frac{27 I^3}{4[I^3 - 27 J^2]};$$

on en déduit

$$(15)\quad \begin{cases} N = -\dfrac{15 I^3 + 12.27.J^2}{4[I^3 - 27 J^2]}, \\ P = -\dfrac{50 I^3 + 4.27.J^2}{4[I^3 - 27 J^2]}. \end{cases}$$

En ayant égard à ces valeurs (15) et à la première des relations (9), l'équation (3), qui est l'équation cherchée, deviendra

$$(16)\quad \rho^3 - 3\rho^2 - 3\frac{5 I^3 + 4.27.J^2}{4[I^3 - 27 J^2]}\rho + \frac{50 I^3 + 4.27.J^2}{4[I^3 - 27 J^2]} = 0.$$

Cette dernière équation peut aussi s'écrire sous la forme suivante, aussi simple qu'élégante :

$$(17)\qquad I^3(\rho + 2)\left(\rho - \frac{5}{2}\right)^2 = 27 J^2 (\rho + 1)^3.$$

On voit ainsi que l'équation aux rapports anharmoniques des racines de l'équation (1) ne dépend que des invariants fondamentaux I et J de cette équation. Et, en outre, les racines de l'équation (16) ne dépendront que du rapport $\frac{I^3}{J^2}$.

Si ρ_1 est une racine de l'équation (16), en posant

$$r_1 + \frac{1}{r_1} = \rho_1,$$

on aura une équation du second degré qui déterminera un des rapports anharmoniques et son inverse.

5. La résolution de l'équation (16) ne saurait présenter de difficulté; je n'insisterai donc pas sur ce sujet, et je me contenterai d'ajouter les remarques suivantes :

1°. Si l'équation (1) a deux racines égales, c'est-à-dire si son discriminant est nul, ou, en d'autres termes, si l'on a

$$(18) \qquad I^3 - 27J^2 = 0,$$

l'équation (16) se réduit à $\rho = 2$, et admet deux racines infinies; il y a donc deux rapports anharmoniques nuls et un égal à l'unité : résultat évident à priori.

2°. Si les quatre points correspondant aux racines de l'équation (1) forment un système harmonique, on devra avoir, par exemple, $r_1 = -1$, et par suite, $\rho_1 = -2$; l'équation (17) devra donc admettre la racine -2, ce qui conduit à

$$(19) \qquad J = 0,$$

La réciproque est facile à vérifier; on retrouve ainsi un théorème connu.

3°. Si l'on suppose $\rho_1 = 1$, c'est-à-dire

$$r_1 = r_2 = r_3,$$

l'équation (17) nous donne

$$(20) \qquad I = 0;$$

la réciproque est également vraie. La condition pour que les trois rapports anharmoniques soient égaux est donc $I = 0$.

4°. L'équation (16) ne peut avoir une racine double que lorsque

$$I^3 - 27J^2 = 0,$$

ou bien lorsque

$$J = 0.$$

Ces deux hypothèses nous conduisent aux deux premiers cas déjà examinés.

6. Considérons deux équations du quatrième degré :

$$(21) \qquad Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E = 0,$$

$$(22) \qquad A'x^4 + 4B'x^3 + 6C'x^2 + 4D'x + E' = 0;$$

les équations aux rapports anharmoniques des racines de ces équations seront respectivement, en adoptant la forme (17),

$$(23) \qquad I^3(\rho + 2)\left(\rho - \frac{5}{2}\right)^2 = 27J^2(\rho + 1)^3,$$

$$(24) \qquad I'^3(\rho + 2)\left(\rho - \frac{5}{2}\right)^2 = 27J'^2(\rho + 1)^3;$$

I' et J' désignant les invariants de la seconde équation (22).

Pour que les équations (23) et (24) aient une racine commune, et alors les trois seront communes, il faut et il suffit que

$$\frac{I^3}{J^2} = \frac{I'^3}{J'^2};$$

ceci résulte immédiatement de la forme même des équations (23) et (24).

En général, si l'on a une suite d'équations du quatrième degré, dont les invariants fondamentaux sont respectivement I et J pour la première, I' et J' pour la seconde, I'' et J'' pour la troisième, etc..., les rapports anharmoniques correspondant aux racines de ces diverses équations seront les mêmes, si l'on a

$$\frac{I^3}{J^2} = \frac{I'^3}{J'^3} = \frac{I''^3}{J''^2} = \ldots\ldots;$$

ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

La proposition que je viens d'énoncer peut être d'un grand secours dans des questions d'homographie.

SUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. ABEL TRANSON.

1. L'exposition de la méthode géométrique exigée par les programmes pour la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues présente, dans les Traités les meilleurs et les plus récents, soit d'*Algèbre*, soit de *Géométrie analytique*, une lacune qu'il m'a paru utile de signaler.

2. La résolution numérique de deux équations du second degré se ramène par l'élimination immédiate de l'une des inconnues à la résolution d'une équation du quatrième degré. Mais une autre méthode bien connue conduit, soit à résoudre deux équations du second degré après avoir calculé préalablement une quantité qui dépend elle-même d'une équation auxiliaire du troisième degré, soit à résoudre quatre équations du premier degré construites à l'aide de deux des racines de cette même équation auxiliaire.

3. Cette seconde méthode, interprétée géométrique-

ment, consiste à chercher un ou deux des trois couples de sécantes communes aux deux courbes du second ordre que représentent les équations proposées, parce qu'alors il ne reste plus qu'à calculer, soit les rencontres de l'une de ces courbes avec un système de deux lignes droites, soit les rencontres de deux tels systèmes entre eux.

4. A chaque racine de l'équation auxiliaire du troisième degré que fournit la méthode dont il s'agit, correspond un couple de sécantes communes, couple réel ou imaginaire. A une racine imaginaire correspond toujours un couple de sécantes imaginaires; mais à une racine réelle ne correspond pas toujours un couple de sécantes réelles. Car il faut, pour que les sécantes existent effectivement, que la racine réelle qui leur correspond rende positive une certaine fonction des paramètres des équations proposées.

5. Lorsque les deux courbes du second degré se rencontrent en quatre points, les trois couples de sécantes communes sont nécessairement réels. Et comme l'existence de deux de ces couples entraîne forcément celle du troisième, on saura que cette circonstance de quatre rencontres a lieu si les trois racines de l'équation auxiliaire sont réelles, et si en même temps deux d'entre elles rendent positive la fonction dont nous venons de parler.

6. Quand les courbes ne se rencontrent pas en quatre points, elles se rencontrent en deux, ou bien elles ne se rencontrent pas du tout. Mais dans l'un comme dans l'autre de ces deux derniers cas, on sait à priori qu'il existe un couple de sécantes réelles, les deux autres étant imaginaires.

7. Dans cette circonstance d'un seul couple de sécantes réelles, comment vider la question de savoir s'il y a deux

rencontres, ou s'il n'y en a pas? On n'indique pas d'autre moyen que de chercher les intersections de chacune des sécantes réelles avec l'une des deux courbes proposées. De sorte que, si effectivement il n'y a pas de rencontres, on aura fait un calcul inutile. C'est ici que je crois pouvoir signaler une lacune.

8. En effet, deux cas distincts donnent lieu à l'existence d'un seul couple de sécantes réelles, savoir :

1°. Les trois racines de l'équation auxiliaire étant réelles, une seule rend positive la fonction dont il a été question précédemment;

2°. L'équation auxiliaire n'a qu'une seule racine réelle.

Or on peut démontrer que dans le premier cas il n'y a aucune rencontre, et qu'il y en a deux dans le second.

9. Pour démontrer ce théorème, j'observe d'abord que la nature des rencontres, et que par suite la nature et les propriétés des racines de l'équation auxiliaire sont indépendantes du choix des coordonnées; que, de plus, l'un des systèmes de sécantes communes est toujours réel; de sorte qu'on peut étudier la question en supposant les deux courbes rapportées à deux sécantes communes prises pour axes de coordonnées.

10. Les deux équations de ces courbes ne diffèrent alors que par un seul paramètre, et peuvent être discutées sous la forme suivante :

$$ay^2 + Bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$
$$ay^2 + B_1xy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Leur combinaison est :

$$a(1+\lambda)y^2 + (B + \lambda B_1)xy$$
$$+ c(1+\lambda)x^2 + d(1+\lambda)y + e(1+\lambda)x + f(1+\lambda) = 0.$$

Et l'équation auxiliaire, débarrassée du facteur $1+\lambda$ qui, égalé à zéro, donne la racine réelle correspondante au système de sécantes prises pour axes de coordonnées, se trouve abaissée au second degré comme il suit :

$$\begin{aligned}(ae^2 + cd^2 - 4acf)(1+\lambda)^2 \\ - de(B+\lambda B_1)(1+\lambda) + f(B+\lambda B_1)^2 = 0.\end{aligned}$$

D'ailleurs la réalité des deux racines de cette équation, se confondant avec la réalité du rapport $\dfrac{1+\lambda}{B+\lambda B_1}$, entraîne une condition qui se transforme aisément dans la suivante :

$$(e^2 - 4cf)(d^2 - 4af) > 0.$$

Or les facteurs binômes $e^2 - 4cf$, et $d^2 - 4af$, sont respectivement ceux dont le signe décide la réalité des rencontres de chacun des axes de coordonnées avec les courbes proposées. Et par là on voit que, si les quatre rencontres sont imaginaires, les trois racines de l'équation auxiliaire sont réelles, et que si deux des rencontres seulement sont imaginaires, cette même équation n'a qu'une seule racine réelle.

11. Je termine par une simple réflexion. La méthode que je viens d'étudier est certainement intéressante et instructive; mais peut-elle être d'un grand secours dans la pratique des équations numériques? Je crois qu'il est permis d'en douter. En effet, l'équation auxiliaire du troisième degré pourra bien n'avoir aucune racine commensurable; même il pourra arriver que les deux sécantes qui correspondent à une racine commensurable de l'équation auxiliaire aient des équations à coefficients incommensurables. Et alors, si on a besoin de résoudre avec un degré d'approximation déterminé les deux équations du second degré, ne vaudrait-il pas mieux s'en tenir à l'équation du quatrième degré fournie par l'élimination de l'une des inconnues?

SOLUTION DE LA QUESTION 530

(voir p. 247);

PAR M. EUGÈNE FORESTIER,
Elève du lycée Saint-Louis,

ET MM. VANNIER (Bourg-la-Reine) ET SIACCHI (Rome).

La question 530 doit être rectifiée de la manière suivante :

$$\frac{\sin P}{\sin\varphi} = \tan\varphi, \tag{1}$$

d'où

$$\tan\frac{P-\varphi}{2}\cot\frac{P+\varphi}{2} = \tan(\varphi - 45^\circ).$$

En effet, l'égalité (1) peut s'écrire

$$\frac{\sin P}{\tan\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1},$$

ce qui donne

$$\frac{\sin P}{\tan\varphi} = \frac{\sin P + \sin\varphi}{1 + \tan\varphi} = \frac{\sin P - \sin\varphi}{\tan\varphi - 1},$$

d'où

$$\frac{\sin P - \sin\varphi}{\sin P + \sin\varphi} = \frac{\tan\varphi - 1}{1 + \tan\varphi},$$

et en vertu de transformations connues

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{P-\varphi}{2}}{\operatorname{tang}\frac{P+\varphi}{2}}=\frac{\operatorname{tang}\varphi-1}{1+\operatorname{tang}\varphi};$$

mais

$$1=\operatorname{tang}45^\circ,$$

donc

$$\frac{\operatorname{tang}\varphi-1}{1+\operatorname{tang}\varphi}=\frac{\operatorname{tang}\varphi-\operatorname{tang}45^\circ}{1+\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}45^\circ}=\operatorname{tang}(\varphi-45^\circ).$$

Par conséquent

$$\operatorname{tang}\frac{P-\varphi}{2}\cot\frac{P+\varphi}{2}=\operatorname{tang}(\varphi-45^\circ).$$

On ne pourra donc avoir en même temps

$$\operatorname{tang}\frac{P-\varphi}{2}\operatorname{tang}\frac{P+\varphi}{2}=\operatorname{tang}(\varphi-45^\circ),$$

que si

$$P+\varphi=\frac{\pi}{2}(1+4k),$$

k étant un nombre quelconque.

Note. M. Dellac, professeur à Amiens, fait observer que ce problème est consigné dans tous les Traités de Trigonométrie. Gauss se sert fréquemment de cette transformation dans son célèbre Traité.

SOLUTION DE LA QUESTION 535

(voir p. 306);

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur,
M. L'ABBÉ POITRASSON (du séminaire de Vals, près le Puy)
ET M. SIACCHI (FRANCIS) (de Rome).

Les deux polygones proposés sont homothétiques. Du centre d'homothétie, j'abaisse sur deux côtés homologues les perpendiculaires p, p', et sur deux autres côtés homologues les perpendiculaires q, q'.

Ces perpendiculaires étant des lignes homologues,

$$\frac{p'}{p}=\frac{q'}{q},$$

d'où

$$\frac{p'-p}{p}=\frac{q'-q}{q};$$

mais d'après la troisième hypothèse

$$p'-p=q'-q,$$

donc

$$p=q,\quad p'=q'.$$

Le centre d'homothétie est en même temps le centre de deux circonférences respectivement inscrites aux deux polygones. C. Q. F. D.

M. Siacchi fait observer : 1° que deux polygones satisfaisant aux deux premières conditions et ayant les intervalles entre les sommets homologues égaux, sont inscriptibles dans deux cercles; 2° que deux polyèdres satisfaisant à des conditions analogues à celles qui sont indiquées dans la question ou à celles qui sont indiquées dans (1°), sont circonscriptibles à des sphères ou inscriptibles.

M. l'abbé Poitrasson donne ce scolie :

1°. Si les deux polygones sont convexes, ils ne satisfont aux conditions du théorème que si l'un des polygones est intérieur à l'autre; 2° s'ils sont non convexes, ils doivent être extérieurs l'un par rapport à l'autre.

Les polygones étoilés circonscrits rentrent dans le cas des polygones convexes.

NOTE SUR LES POLYGONES RÉGULIERS SPHÉRIQUES ET SOLUTION DE LA QUESTION 153 (Strebor)

(voir t. VI, p. 242);

PAR M. FAURE.

Si l'on appelle a, b, c les côtés d'un triangle sphérique, C l'angle opposé au côté c, on a la relation

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

d'où l'on déduit facilement

$$\sin^2 \frac{1}{2} c = \sin^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} b + \cos^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b$$
$$- 2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos C,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} c = \cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} b + \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b$$
$$+ 2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos C.$$

Legendre, dans les précieuses Notes de sa *Trigonométrie*, développe la valeur de $\sin\frac{1}{2}c$ et $\cos\frac{1}{2}c$ en série, et trouve (les logarithmes sont hyperboliques)

$$\log\sin\frac{1}{2}c = \log\left(\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\right) - \frac{\tang\frac{1}{2}b}{\tang\frac{1}{2}a}\cos c$$

$$-\frac{\tang^2\frac{1}{2}b}{2\tang^2\frac{1}{2}a}\cos 2c - \ldots,$$

$$\log\cos\frac{1}{2}c = \log\left(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\right) + \frac{\tang\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}a}\cos c$$

$$-\frac{\tang^2\frac{1}{2}b}{2\cot^2\frac{1}{2}a}\cos 2c + \ldots,$$

et ayant de telles séries, on peut repasser aux équations finies d'où elles proviennent; observation essentielle pour ce qui suit.

Legendre montre aussi que la valeur de x, que l'on tire de l'équation

$$\tang x = \frac{m+n}{m-n}\tang\frac{1}{2}C,$$

peut s'exprimer par cette série

$$x = \frac{1}{2}C + \frac{n}{m}\sin C + \frac{n^2}{2m^2}\sin 2C + \frac{n^3}{3m^3}\sin 3C + \ldots.$$

Or, les analogies de Neper donnent, A et B étant les deux autres angles du triangle sphérique,

$$\cot\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}C$$

$$=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a+\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a-\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}\operatorname{tang}\frac{1}{2}C,$$

$$\cot\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}C$$

$$=\frac{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}\operatorname{tang}\frac{1}{2}C,$$

donc, en vertu de la formule précédente,

$$\frac{A-B}{2}=\frac{\pi-C}{2}-\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}\sin C-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b}{2\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a}\sin 2C$$

$$-\frac{\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}b}{3\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}a}\sin 3C-\ldots,$$

$$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}+\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{\cot\frac{1}{2}a}\sin C-\frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}b}{2\cot^2\frac{1}{2}a}\sin 2C$$

$$+\frac{\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}b}{3\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}a}\sin 3C-\ldots$$

Si l'on fait la somme de ces deux valeurs, on obtient

$$A = \pi - C + \left(\frac{\tang \frac{1}{2} b}{\cot \frac{1}{2} a} - \frac{\tang \frac{1}{2} b}{\tang \frac{1}{2} a}\right) \sin C$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\tang^2 \frac{1}{2} b}{\cot^2 \frac{1}{2} a} + \frac{\tang^2 \frac{1}{2} b}{\tang^2 \frac{1}{2} a}\right) \sin 2C$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{\tang^3 \frac{1}{2} b}{\cot^3 \frac{1}{2} a} - \frac{\tang^3 \frac{1}{2} b}{\tang^3 \frac{1}{2} a}\right) \sin 3C - \ldots$$

On peut donc regarder cette expression comme étant le développement de la valeur de A donnée par la relation

$$\cot A = \frac{\tang \frac{1}{2} b\left(1 - \tang^2 \frac{1}{2} a\right) - \tang \frac{1}{2} a\left(1 - \tang^2 \frac{1}{2} b\right)\cos C}{\tang \frac{1}{2} a\left(1 + \tang^2 \frac{1}{2} b\right)\sin C};$$

car

$$\cot A = \cot\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right).$$

Développant et substituant les valeurs ci-dessus, on obtient cette dernière relation qui n'est que la transformation de

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin c \cot A,$$

Ces principes établis, proposons-nous de trouver en coordonnées polaires sphériques le lieu d'un point P sur la surface d'une sphère, tel que si de là on mène des arcs de grands cercles aux sommets P_1, $P_2, \ldots$, P_n, d'un polygone régulier sphérique inscrit dans un petit cercle donné, 1° le produit des sinus des demi-arcs PP_1, PP_2,..., PP_n soit constant; 2° et 3° le produit des cosinus ou des tangentes des mêmes demi-arcs soit constant; 4° la somme des angles PP_1P_2, PP_2P_3,..., PP_nP_1 soit constante (*).

1°. Prenons le centre O du petit cercle pour pôle, et le grand cercle OP_1 pour axe polaire. Soient $OP = \rho$; $POP_1 = \omega$ les coordonnées d'un point P du lieu cherché. Désignons aussi par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les distances sphériques du point P aux différents sommets P_1, P_2,..., P_n du polygone, on a par hypothèse

$$\sin\frac{1}{2}\rho_1 \sin\frac{1}{2}\rho_2, \ldots, \sin\frac{1}{2}\rho_n = \sin^n\frac{1}{2}k.$$

k indiquant une constante quelconque. Formant les triangles OPP_1, OPP_2,..., OPP_n, on trouve de suite, a étant le rayon sphérique du petit cercle,

$$\sin^2\frac{1}{2}\rho_1 = \sin^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}\rho + \cos^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}\rho$$
$$- 2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}\rho\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}\rho\cos\omega,$$

$$\sin^2\frac{1}{2}\rho_2 = \sin^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}\rho + \cos^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}\rho$$
$$- 2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}\rho\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}\rho\cos\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right),$$

....

$$\sin^2\frac{1}{2}\rho_n = \sin^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}\rho + \cos^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}\rho$$
$$- 2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}\rho\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}\rho\cos\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right);$$

(*) Ce 4° seul est le sujet de la question.

on déduit donc de là

$$\log \sin \frac{1}{2} \rho_1 = \log \left(\sin \frac{1}{2} a \ \cos \frac{1}{2} \rho \right) - \frac{\tang \frac{1}{2} \rho}{\tang \frac{1}{2} a} \cos \omega$$

$$- \frac{\tang^2 \frac{1}{2} \rho}{2 \tang^2 \frac{1}{2} a} \cos 2\omega - \ldots,$$

$$\log \sin \frac{1}{2} \rho_2 = \log \left(\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \rho \right) - \frac{\tang \frac{1}{2} \rho}{\tang \frac{1}{2} a} \cos \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$- \frac{\tang^2 \frac{1}{2} \rho}{2 \tang^2 \frac{1}{2} a} \cos 2 \left(\omega - \frac{2\pi}{n} \right) - \ldots,$$

. . . .

$$\log \sin \frac{1}{2} \rho_n = \log \left(\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \rho \right)$$

$$- \frac{\tang \frac{1}{2} \rho}{\tang \frac{1}{2} a} \cos \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right)$$

$$- \frac{\tang^2 \frac{1}{2} \rho}{2 \tang^2 \frac{1}{2} a} \cos 2 \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) - \ldots.$$

Ajoutons ces résultats :

$$\log \sin^n \frac{1}{2} k = \log \left(\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} \rho \right)^n - \frac{\tang^n \frac{1}{2} \rho}{\tang^n \frac{1}{2} a} \cos n\omega$$

$$- \frac{\tang^{2n} \frac{1}{2} \rho}{2 \tang^{2n} \frac{1}{2} a} \cos 2n\omega - \ldots.$$

On voit en effet facilement, en ayant égard à la valeur de la somme

$$\cos m\omega + \cos m\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right)\ldots + \cos m\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right),$$

que cette somme est nulle toutes les fois que m n'est pas un multiple de n, et lorsque le contraire a lieu, cette somme est égale à $n \sin m\omega$.

La valeur que nous venons de trouver pour $\log \sin \frac{1}{2} k$ donne en passant aux nombres (p. 421 et 422)

$$\sin^2 \frac{n}{2} k = \sin^{2n} \frac{1}{2} a \cos^{2n} \frac{1}{2} \rho + \cos^{2n} \frac{1}{2} a \sin^{2n} \frac{1}{2} \rho$$
$$- 2 \sin^n \frac{1}{2} a \cos^n \frac{1}{2} a \sin^n \frac{1}{2} \rho \cos^n \frac{1}{2} \cos n\omega,$$

équation du lieu.

2°. Mêmes notations. On a par hypothèse

$$\cos \frac{1}{2} \rho_1 \cos \frac{1}{2} \rho_2 \ldots \cos \frac{1}{2} \rho_n = \cos^n \frac{1}{2} k.$$

Or

$$\cos^2 \frac{1}{2} \rho_1 = \cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} \rho + \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \rho$$
$$+ 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} \rho \cos \frac{1}{2} \rho \cos \omega,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} \rho_2 = \cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} \rho + \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \rho$$
$$+ 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} \rho \cos \frac{1}{2} \rho \cos\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right),$$

. . . .

$$\cos^2 \frac{1}{2} \rho_n = \cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} \rho + \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} \rho$$
$$+ 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} \rho \cos \frac{1}{2} \rho$$
$$\times \cos\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Ajoutant et ayant égard à la remarque précédente, on obtient

$$\log\cos^n\frac{1}{2}k = \log\left(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}\rho\right)^n \pm \frac{\tang^n\frac{1}{2}\rho}{\cot^n\frac{1}{2}a}\cos n\omega$$
$$-\frac{\tang^{2n}\frac{1}{2}\rho}{2\cot^{2n}\frac{1}{2}a}\cos 2n\omega \pm \ldots;$$

le signe supérieur si n est impair, et l'inférieur si n est pair. Passant des logarithmes aux nombres, on a

$$\cos^{2n}\frac{1}{2}k = \cos^{2n}\frac{1}{2}a\cos^{2n}\frac{1}{2}\rho + \sin^{2n}\frac{1}{2}a\sin^{2n}\frac{1}{2}\rho$$
$$\pm 2\sin^n\frac{1}{2}a\cos^n\frac{1}{2}a\sin^n\frac{1}{2}\rho\cos^n\frac{1}{2}\rho\cos n\omega,$$

équation du lieu.

3°. Si enfin on donnait le produit des tangentes des demi-axes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, égal à $\tang^n\frac{1}{2}k$, on se servira des formules précédentes pour avoir

$$\log\tang\frac{1}{2}\rho_1, \ldots, \log\tang\frac{1}{2}\rho_n$$

et l'on arrive à la relation

$$\tang^{2n}\frac{1}{2}k = \frac{\tang^{2n}\frac{1}{2}a + \tang^{2n}\frac{1}{2}\rho + 2\tang^n\frac{1}{2}a\tang^n\frac{1}{2}\rho\cos n\omega}{1 + \tang^{2n}\frac{1}{2}a\tang^{2n}\frac{1}{2}\rho \pm 2\tang^n\frac{1}{2}a\tang^n\frac{1}{2}\rho\cos n\omega},$$

selon que n est impair ou pair.

4°. Relativement à la dernière question, j'appellerai A le demi-angle formé par deux côtés consécutifs du polygone régulier, $P_1, P_2, \ldots, P_n$, les angles PP_1P_2, $PP_2P_3, \ldots, PP_nP_1$, et je pose

$$A - P_1 = \omega, \quad A - P_2 = \omega, \ldots \quad A - P_n = \omega_n;$$

on aura par suite

$$nA - (P_1 + P_2 \ldots + P_n) = \omega_1 + \omega_2 \ldots \omega_n = n\,k.$$

Les triangles OPP_1, OPP_2,..., OPP_n donnent

$$\cot\omega_1 = \frac{\tang\frac{1}{2}a\left(1-\tang^2\frac{1}{2}\rho\right) - \tang\frac{1}{2}\rho\left(1-\tang^2\frac{1}{2}a\right)\cos\omega}{\tang\frac{1}{2}\rho\left(1+\tang^2\frac{1}{2}a\right)\sin\omega},$$

$$\cot\omega_2 = \frac{\tang\frac{1}{2}a\left(1-\tang^2\frac{1}{2}\rho\right) - \tang^2\frac{1}{2}\rho\left(1-\tang^2\frac{1}{2}a\right)\cos\left(\omega-\frac{2\pi}{n}\right)}{\tang\frac{1}{2}\rho\left(1+\tang^2\frac{1}{2}a\right)\sin\left(\omega-\frac{2\pi}{n}\right)},$$

$$\tang\omega_n = \frac{\tang\frac{1}{2}a\left(1-\tang^2\frac{1}{2}\rho\right) - \tang\frac{1}{2}\rho\left(1-\tang^2\frac{1}{2}a\right)\cos\left[\omega-\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]}{\tang\frac{1}{2}\rho\left(1+\tang^2\frac{1}{2}a\right)\sin\left(\omega-\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)},$$

d'où (p. 423)

$$\omega_1 = \pi - \omega + \sin\omega\left(\frac{\tang\frac{1}{2}a}{\cot\frac{1}{2}\rho} - \frac{\tang\frac{1}{2}a}{\tang\frac{1}{2}\rho}\right)$$

$$- \sin 2\omega\left(\frac{\tang^2\frac{1}{2}a}{2\cot^2\frac{1}{2}\rho} - \frac{\tang^2\frac{1}{2}a}{2\tang^2\frac{1}{2}\rho}\right) + \ldots$$

$$\omega_2 = \pi - \left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\omega-\frac{2\pi}{n}\right)\left(\frac{\tang\frac{1}{2}a}{\cot\frac{1}{2}\rho} - \frac{\tang\frac{1}{2}a}{\tang\frac{1}{2}\rho}\right)$$

$$- \sin 2\left(\omega-\frac{2\pi}{n}\right)\left(\frac{\tang^2\frac{1}{2}a}{2\cot^2\frac{1}{2}\rho} - \frac{\tang^2\frac{1}{2}a}{2\tang^2\frac{1}{2}\rho}\right) + \ldots,$$

. . . .

$$\omega_n = \pi - \left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

$$+ \sin\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\left(\frac{\tang\frac{1}{2}a}{\cot\frac{1}{2}\rho} - \frac{\tang\frac{1}{2}a}{\tang\frac{1}{2}\rho}\right)$$

$$- \sin 2\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\left(\frac{\tang^2\frac{1}{2}a}{2\cot^2\frac{1}{2}\rho} + \frac{\tang^2\frac{1}{2}a}{2\tang^2\frac{1}{2}\rho}\right) + \ldots$$

Ajoutant et remarquant aussi que la somme

$$\sin m\omega + \sin m\left(\omega - \frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin m\left(\omega - \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$$

est nulle lorsque m n'est pas divisible par n, et devient égale à $n \sin m\omega$ dans le cas contraire, on trouvera

$$nk = \pi - n\omega \pm \sin n\omega\left(\frac{\tang^n\frac{1}{2}a}{\cot^n\frac{1}{2}\rho} - \frac{\tang^n\frac{1}{2}a}{\tang^n\frac{1}{2}\rho}\right)$$

$$- \sin 2n\omega\left(\frac{\tang^{2n}\frac{1}{2}a}{2\cot^{2n}\frac{1}{2}\rho} - \frac{\tang^{2n}\frac{1}{2}a}{\tang^{2n}\frac{1}{2}\rho}\right) \pm \ldots$$

On prendra le signe supérieur lorsque n sera impair, et l'inférieur pour n pair. A l'inspection seule de cette relation, on déduit pour l'équation du lieu cherché

$$\cot nk = \frac{\tang^n\frac{1}{2}a\left(1 \mp \tang^{2n}\frac{1}{2}\rho\right) - \tang^n\frac{1}{2}\rho\left(1 \mp \tang^{2n}\frac{1}{2}a\right)\cos n\omega}{\tang^n\frac{1}{2}\rho\left(1 \pm \tang^{2n}\frac{1}{2}a\right)\sin n\omega}.$$

SOLUTION DE LA QUESTION 522

(voir p. 195);

PAR M. DEWULF.

Toutes les surfaces polaires d'un point d'une surface algébrique, prises par rapport à cette surface, ont même indicatrice en ce point; les rayons de courbure des sections faites par un plan issu de ce point dans la surface et ses diverses polaires, sont en ce point inversement proportionnels aux degrés des surfaces diminués d'une unité. (TH. MOUTARD.)

Soit

$$u_0 t^n + u_1 t^{n-1} + u_2 t^{n-2} + \ldots + u_n = 0$$

l'équation d'une surface :

$$u_0 = A,$$
$$u_1 = B_1 x + B_2 y + B_3 z,$$
$$u_2 = C_1 x^2 + C_2 y^2 + C_3 z^2 + C_4 xy + C_5 xz + C_6 yz.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Prenant l'origine en un point de la surface, le plan tangent à la surface en ce point pour plan de xy, on a $u_0 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, et l'équation de la surface devient

$$\text{(1)} \qquad U = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = 0.$$

Nous savons que l'équation de l'indicatrice en un point quelconque xyz d'une surface est

$$r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2 = C;$$

posons $x=0$, $y=0$, $z=0$, et cette équation devient

$$rX^2 + 2sXY + tY^2 = C;$$

or, en calculant r, s, t, on a :

$$(2)\qquad C_1X^2 + C_2Y^2 + C_4XY = CB_3.$$

La polaire d'ordre k de l'origine des coordonnées, par rapport à la surface (1), a pour équation

$$\frac{d^kU}{dt^k} = A_1u_1 + A_2u_2 + \ldots + A_{n-k}u_{n-k} = 0,$$

$$A_1 = (n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-k),$$

$$A_2 = (n-2)(n-3)\ldots(n-k)(n-k-1),$$

et l'équation de l'indicatrice à l'origine de cette surface est

$$(3)\qquad C_1X^2 + C_2Y^2 + C_4XY = CB_3\frac{A_1}{A_2}.$$

Cette équation fait voir que l'indicatrice ne varie pas avec k, donne des courbes semblables, ce qui démontre la première partie du théorème. Quant à la seconde, elle résulte aussi immédiatement de l'équation (3). On sait que les rayons de courbure des sections normales passant par un point sont proportionnels aux demi-diamètres que ces sections déterminent dans l'indicatrice ; or ces demi-diamètres sont proportionnels à $\frac{A_1}{A_2} = \frac{n-1}{n-k-1}$ et, par suite, inversement proportionnels à $(n-k)-1$.

Le théorème de Meusnier étend ce que nous venons de dire aux sections obliques.

SOLUTION DE LA QUESTION 534

(voir p. 248);

PAR M. CHARLES KESSLER.

THÉORÈME. *Soient*

$$y^m = F(x)$$

l'équation d'une courbe algébrique,

$$y - y_1 = F'(x_1)(x - x_1)$$

l'équation d'une tangente au point $x_1 y_1$; X, Y *un point quelconque de cette tangente :* $\frac{Y^m}{F(x)}$ *est un maximum ou un minimum lorsque* $Y = y_1$, $X = x_1$.

Démonstration. Je remarque que l'équation ci-dessus de la tangente à la courbe est inexacte; pour qu'il en fût autrement, il faudrait que l'équation de cette courbe parabolique fût $y = F(x)$: c'est du reste à cette dernière forme que je vais la ramener. Je pose

$$y = \sqrt[m]{F(x)} = f(x).$$

L'équation de la tangente est $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$, et je dis que $\frac{Y^m}{F(X)} = \left(\frac{Y}{f(X)}\right)^m$ ou $\frac{Y}{f(X)}$ est maximum ou minimum pour $X = x_1$, $Y = y_1$.

Ceci peut être considéré comme évident à priori, car pour tous les points de la courbe $\frac{y}{f(x)} = 1$ = constante, et par conséquent la dérivée est nulle : ce qui indique que tous les points de la courbe, et en particulier le point x_1, y_1

jouissent de cette propriété qu'ils rendent maximum ou minimum la fonction précédente.

En voici du reste une autre démonstration, ou plutôt une extension. Le numérateur de la dérivée de $\frac{Y}{F(X)}$ est

$$Y'f(X) - Yf'(X),$$

ou, en remarquant qu'entre l'ordonnée et l'abscisse à l'origine, on a la relation

$$\frac{Y}{y_1 - x_1 f'(x_1)} = \frac{\frac{x_1 F'(x_1) - y_1}{f'(x_1)} - X}{\frac{x_1 f'(x_1) - y_1}{f'(x_1)}}.$$

d'où

$$Y = Xf'(x_1) - x_1 + y_1$$

$$f'(x_1)f(X) - Xf'(x_1)f'(X) + x_1 f'(x_1) f'(X) - y_1 f'(X);$$

et comme

$$y_1 = f'(x_1),$$

on voit que cette expression est nulle pour $x = x_1$, $y = y_1$.

SOLUTION DE LA QUESTION 542

(voir p. 361);

PAR M. CHARLES KESSLER.

THÉORÈME. *Supposons que* z² *puisse se décomposer de* n *manières en produits de facteurs inégaux* (1 . z² *compris*); *démontrer que* 4z² *peut se décomposer de* n *manières, et pas davantage, en différence de deux carrés entiers.*

Démonstration. Supposons

$$z^2 = pq,$$

p, q étant deux quantités différentes entre elles; on pourra toujours trouver deux quantités et *deux quan-*

tités seulement telles, que

$$p = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad q = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

d'où

$$pq = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}.$$

Ceci apprend déjà que tout carré est la différence de deux autres carrés, et d'autant de manières qu'il peut se décomposer en produit de facteurs inégaux. De là on tire

$$4z^2 = 4pq = \alpha^2 - \beta^2$$

(α et β sont tous deux pairs ou tous deux impairs).

Des quantités α, β étant déterminées et uniques pour chaque système de valeurs de p et q, la proposition est démontrée. Elle s'étend en outre évidemment à tout nombre qui n'est pas premier et peut se formuler :

Supposons que k non premier puisse se décomposer de n manières en produits de facteurs inégaux $(1 . k)$ compris, $2^{2n} k$ peut se décomposer de n manières au moins en différence de deux carrés entiers : du reste, tout nombre est la différence de deux carrés.

Il est facile de montrer plus clairement que le nombre de manières dont $4z^2$ peut se décomposer en différence de deux carrés entiers, ne surpasse pas celui dont z^2 se décompose en produits de deux facteurs inégaux. Si, en effet, il en existe une autre

$$4z^2 = m^2 - n^2,$$

d'où

$$z^2 = \frac{m+n}{2} \cdot \frac{m-n}{2},$$

z^2 se décompose en produits de deux facteurs inégaux, et par hypothèse on a considéré toutes les manières dont cela arrive.

SOLUTION DE LA QUESTION 544

(voir p. 361);

PAR M. CHARLES KESSLER.

$$a_1 + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n} = \mathrm{P}.$$

Je suppose qu'on change n' signes, et désignant le nouveau polynôme par Q, combien PQ renferme-t-il d'irrationnelles? Soit $n = n' + n''$.

Soit A l'ensemble des n'' termes dont le signe n'est pas changé, B celui des n' termes dont on change le signe,

$$\mathrm{PQ} = (\mathrm{A} + \mathrm{B})(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2,$$

et le nombre des irrationnelles est

$$\frac{n'(n'-1)}{2} + \frac{n''(n''-1)}{2} = \frac{n'^2 + n''^2 - (n' + n'')}{2}$$

$$= \frac{n^2 - 2n'n'' - n}{2}.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1860

(voir p. 328);

PAR M CHARLES KESSLER.

Trouver l'intersection d'un cône de révolution par un plan. Si par tous les points de l'intersection on élève des normales au cône, chacune de ces normales perce la surface en un second point. On demande la courbe formée par ces points (*).

Solution géométrique. On sait que la section peut être

(*) La surface formée par les normales est du sixième degré. TM.

l'une quelconque des trois courbes du second degré. Soit M l'un des points de l'intersection, ASB plan méridien passant par M; $\theta = \mathrm{ASB}$.

La normale en M à la surface sera perpendiculaire à la génératrice SB, et rencontrera SA en M′, par exemple; car dans une surface de révolution le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien qui passe par le point de contact. M′ est un point de la courbe cherchée, et l'on a

$$\rho = \mathrm{M'S} = \frac{\mathrm{MS}}{\cos\theta}.$$

Donc les rayons vecteurs de la courbe des M′ sont proportionnels aux rayons vecteurs correspondants de la section, donc la courbe est la même que celle qui serait faite par un plan parallèle à celui de la section d'une distance du sommet S marquée par le rapport précédent; la courbe est donc de même nature que la section; algébriquement parlant, elle lui est semblable: ses sommets sont sur les mêmes génératrices, son plan est perpendiculaire à ASB. Si l'on opère le développement du cône en le coupant d'abord suivant SB, puis en le coupant suivant SA, que dans le développement on superpose SA et SB, les développées des courbes sont semblables.

THÉORÈME SUR LE TRIANGLE CIRCONSCRIT A UN CERCLE;

PAR M. JOSEPH HARCOURT,
Professeur à Neuwry (Irlande).

Théorème. Un triangle étant circonscrit à un cercle, on mène une quatrième tangente quelconque; des sommets du triangle on abaisse des perpendiculaires sur cette quatrième tangente. On multiplie chacune de ces perpendiculaires par le côté du triangle opposé au sommet d'où part la perpendiculaire; la somme *algébrique* des trois produits est égale au double de l'aire du triangle.

Démonstration (communiquée par M. Le Besgue) (*). A chaque sommet appliquons une force proportionnelle au côté opposé du triangle; lorsque les trois forces sont parallèles, le centre du cercle inscrit au triangle est le centre des forces parallèles, et le périmètre du triangle représente la résultante; prenant les moments par rapport à la quatrième tangente, on a la propriété énoncée; une propriété analogue existe pour le tétraèdre en remplaçant les côtés par les *aires* des faces.

La démonstration analytique ne présente aucune difficulté.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME III DE M. NAGEL

(voir p. 354);

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Lemme. Si l'on divise en parties égales les angles d'un triangle, ainsi que les suppléments de ces angles, pour avoir le centre du cercle inscrit et ceux des cercles exinscrits, ces bissectrices étant évidemment perpendiculaires deux à deux, on sait que le triangle formé par les trois derniers centres a pour hauteurs les bissectrices intérieures; de là résulte le théorème connu:

Les hauteurs d'un triangle sont bissectrices du triangle formé en réunissant les pieds de ces hauteurs.

THÉORÈME. *Dans un triangle, les lignes qui joignent les pieds des hauteurs sont respectivement perpendiculaires aux rayons qui joignent les sommets avec le centre du cercle circonscrit.*

(*) Retourné à Bordeaux. TM.

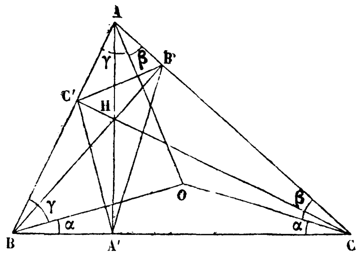
Pour le faire voir, soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et représentons respectivement par α, β, γ les angles à la base dans les triangles BOC, AOC, AOB, ce qui donne

$$A = \beta + \gamma, \quad B = \alpha + \gamma, \quad C = \alpha + \beta$$

et

$$\alpha = 90^\circ - A, \quad \beta = 90^\circ - B, \quad \gamma = 90^\circ - C.$$

Maintenant, soient A′, B′, C′ les pieds des hauteurs



correspondant aux sommets A, B, C, nous savons qu'une hauteur AA′ est bissectrice de l'angle A′, et CC′ de l'angle C′.

Soit H le point de concours de ces hauteurs, et considérons le quadrilatère BA′HC′ dans lequel les angles opposés en A′ et en C′ sont droits; donc $A'HC' = 180 - B$.

Mais d'après le lemme, nous savons que dans le triangle A′HC′ la droite HA′ est bissectrice de l'angle A′ du triangle B′A′C′; de même HC′ est bissectrice de l'angle C′.

Donc, dans le triangle où l'angle $A'HC' = A + C$,

$$\frac{A'}{2} + \frac{C'}{2} + A + C = 180,$$

d'où

$$\frac{A'}{2} + \frac{C'}{2} = B.$$

On aura de même

$$\frac{A'}{2}+\frac{B'}{2}=C,\quad \frac{B'}{2}+\frac{C'}{2}=A,$$

$$B'+C'=2A=180^\circ-2\alpha=180^\circ-A';$$

par conséquent

$$\frac{A'}{2}=\alpha,\quad \frac{B'}{2}=\beta,\quad \frac{C'}{2}=\gamma.$$

Ainsi nous voyons que les angles $OBC=\alpha$ et $C'A'H'=\frac{A'}{2}$ sont égaux; mais déjà le côté BC de l'un de ces angles est perpendiculaire au côté HA' de l'autre angle : donc leurs côtés OB et $C'A'$ sont aussi perpendiculaires; on verrait de même que $B'C'$ et $B'A'$ sont respectivement perpendiculaires à OA et à OC. C. Q. F. D.

Il est facile de reconnaître que ce qui précède revient au théorème III de M. Nagel. En effet, le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$ est, comme on le voit, celui du cercle des neuf points par rapport à ABC; donc, par un théorème connu, ce point est au milieu de la droite OH. A, B, C sont les centres extérieurs des cercles qui touchent les côtés du triangle $A'B'C'$.

Note. Dans le théorème I, il faut lire contacts extérieurs et non intérieurs. TM.

APPLICATION DES DÉTERMINANTS AU CONTACT DES CERCLES ET DES SPHÈRES;

D'APRÈS M. C.-W. BAUER (*),

Trois cercles.

1. Soit $OA_1A_2A_3$ un quadrilatère rectiligne plan.

(*) *Journal* de Schlomilch, t. V, p. 365; 1860.

Coordonnées, x_1, y_1 de A_1
x_2, y_2 de A_2
x_3, y_3 de A_3
o, o de O origine.

2.

$$(1)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Appliquant à ce déterminant le procédé connu, on a

$$(2)\quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_1 x_3 + y_1 y_3 \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_2^2 + y_2^2 & x_2 x_3 + y_2 y_3 \\ x_1 x_3 + y_1 y_3 & x_2 x_3 + y_2 y_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Posons

$$a_m^2 = x_m^2 + y_m^2,\quad a_{mn}^2 = (x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2,$$
$$a_n^2 = x_n^2 + y_n^2,$$
$$2(x_m x_n + y_m y_n) = a_m^2 + a_n^2 - a_{mn}^2,$$

a_{mn} distance du point A_m à A_n.

Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, les a_m expriment les distances OA_1, OA_2, OA_3, et les a_{mn} les distances A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1.

Ces équations donnent

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 2a_1^2 & a_1^2 + a_2^2 - a_{12}^2 & a_1^2 + a_3^2 - a_{13}^2 \\ a_1^2 + a_2^2 - a_{12}^2 & 2a_2^2 & a_2^2 + a_3^2 + a_{23}^2 \\ a_1^2 + a_3^2 - a_{13}^2 & a_1^2 + a_3^2 - a_{13}^2 & 2a_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Soient donnés trois cercles de rayons, r_1, r_2, r_3, et un quatrième cercle de rayon inconnu r qui les touche. Considérant le centre inconnu de ce cercle comme origine, posons

$$a_1 = r + r_1, \quad a_2 = r + r_2, \quad a_3 = r + r_3,$$

$$r_m^2 + r_n^2 - a_{mn} = 2k_{mn}$$

(a_{mn} représente les distances respectives des centres).

A la gauche du déterminant écrivons la colonne o, o, o, formée de trois zéros et au-dessus la ligne horizontale

$$+1, \quad -2r(r+r_1), \quad -2r(r+r_2), \quad -2r(r+r_3),$$

on aura un nouveau déterminant de 16 termes, mais égal à Δ^2, puisqu'il se réduit à $1 \,.\, \Delta^2$, et par conséquent ce nouveau déterminant est aussi nul; on sait qu'un déterminant ne change pas de valeur absolue en ajoutant une ligne successivement terme à terme aux autres lignes; faisant cette opération avec la première ligne horizontale, on trouve le déterminant à 16 éléments:

$$\begin{vmatrix} +1 & -2r(r+r_1) & -2r(r+r_2) & -2r(r+r_3) \\ +1 & +2r_1(r+r_1) & +2rr_1+2k_{12} & +2rr_1+2k_{13} \\ +1 & +2rr_2+2k_{12} & +2r_2(r+r_2) & +2rr_2+2k_{23} \\ +1 & +2rr_3+2k_{13} & +2rr_3+2k_{23} & +2r_3(r+r_3) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(A)}$$

Écrivons à gauche une colonne de quatre zéros, et en tête la ligne horizontale

$$+1, 0, \quad +2r, \quad +2r, \quad +2r,$$

nous aurons un nouveau déterminant de 25 éléments, ayant même valeur que le précédent, à cause des quatre zéros; dans ce nouveau déterminant, multipliant cette première ligne par r, on a

$$r, 0, \quad +2r^2, \quad +2r^2, \quad +2r^2;$$

ajoutant cette ligne à la deuxième ligne, savoir à

$$0, 1, \quad -2r(r+r_1), \quad -2r(r+r_2), \quad -2r(r+r_3),$$

on obtient

$$+r,\quad +1,\quad -2rr_1,\quad -2rr_2,\quad -2rr_3.$$

Ce nouveau déterminant sera toujours nul.

Multipliant successivement la même première ligne par $-r_1$, $-r_2$, $-r_3$, et ajoutant respectivement à la troisième, quatrième, cinquième ligne de (A), on obtient

$$\begin{vmatrix} +1 & 0 & +2r & +2r & +2r \\ +r & +1 & -2rr_1 & -2rr^2 & -2rr_3 \\ -r_1 & +1 & +2r_1^2 & +2k_{12} & +2k_{13} \\ -r_2 & +1 & +2k_{12} & +2r_2^2 & +2k_{23} \\ -r_3 & +1 & +2k_{13} & +2k_{23} & +2r_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Mettant 1° la seconde colonne à la place de la première, et *vice versâ*; 2° divisant par r les termes de la première et seconde ligne; 3° par 2 les colonnes troisième, quatrième et cinquième, on obtient

$$\begin{vmatrix} 0 & +\frac{1}{r} & +1 & +1 & +1 \\ +\frac{1}{r} & +1 & -r_1 & -r_2 & -r_3 \\ +1 & -r_1 & +r_2^1 & +k_{12} & +k_{13} \\ +1 & -r_2 & +k_{12} & +r_2^2 & +k_{23} \\ +1 & -r_3 & +k_{23} & +k_{23} & +r_2^2 \end{vmatrix} = 0 \ (*).$$

Effectuant ce déterminant, on obtient $\frac{1}{r}$ en fonction de r_1, r_2, r_3, ce qu'il fallait trouver. Le développement s'obtient facilement, les termes $\frac{1}{r}$, $+1$, $+1$, $+1$, donnent chacun 24 termes; ainsi tout au plus 96 termes; on voit qu'il suffit de calculer les termes provenant de $\frac{1}{r}$ et de $+1$.

(*) Je ne sache pas qu'on ait déjà trouvé r en fonction des trois autres rayons r_1, r_2, r_3.

En faisant varier les signes de r_1, r_2, r_3, on obtient les huit solutions que comporte le problème. r est donné par une équation du second degré; une des racines se rapporte à un mode d'attouchement, correspondant aux signes de r_1, r_2, r_3, et l'autre racine se rapporte au mode d'attouchement correspondant à des valeurs de r_1, r_2, r_3, avec des signes opposés; car on voit d'après le déterminant (A) que l'équation ne change pas en changeant simultanément les signes de r_1, r_2, r_3, et ceci, combiné avec la relation entre le coefficient du second terme de l'équation et la somme des racines, donne le théorème suivant, dû à M. G.-W Hearne.

Appelons rayon *réciproque* d'un cercle l'unité divisée par le rayon de ce cercle.

Soient:

$\frac{1}{R_3}$ le rayon réciproque du cercle qui est touché extérieurement par les trois cercles donnés;

$\frac{1}{R_0}$ le rayon réciproque du cercle qui est touché intérieurement par les trois cercles donnés;

$\sum \frac{1}{R_1}$ la somme des rayons réciproques de cercles qui sont touchés extérieurement par *un* des trois cercles donnés;

$\sum \frac{1}{R_2}$ la somme des rayons réciproques de cercles qui sont touchés extérieurement par deux des trois cercles donnés.

On a

$$\frac{1}{R_3} + \sum \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_0} + \sum \frac{1}{R_2}.$$

5. *Cas où les trois cercles donnés se touchent mutuellement.* Dans ce cas $a_{mn}^2 = (r_m + r_n)^2$; donc $k_{mn} = - r_m r_n$.

Divisant respectivement par r_1, r_2, r_3 les dernières lignes horizontales, et ensuite par r_1, r_2, r_3, respectivement les trois dernières lignes verticales (à droite), on a

$$\begin{vmatrix} 0 & +\frac{1}{r} & +\frac{1}{r_1} & +\frac{1}{r_2} & +\frac{1}{r_3} \\ +\frac{1}{r} & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +\frac{1}{r_1} & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +\frac{1}{r_2} & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +\frac{1}{r_3} & -1 & -1 & -1 & +1 \end{vmatrix} = 0.$$

Effectuant, on trouve

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$$
$$= 2\left[\frac{1}{rr_1} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{rr_2} + \frac{1}{r_1 r_3} + \frac{1}{rr_3} + \frac{1}{r_1 r_2}\right],$$

ou bien

$$\sum \frac{1}{r^2} = 2 \sum \frac{1}{rr_1},$$

formule qui peut ainsi servir à trouver trois cercles qui se touchent mutuellement et touchent un cercle *donné.*

Quatre sphères.

6. Soit le tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$; d'un point O on mène les droites OA_1, OA_2, OA_3, OA_4.

Coordonnées rectangulaires.

x_1, y_1, z_1 de A_1
x_2, y_2, z_2 de A_2
x_3, y_3, z_3 de A_3
x_4, y_4, z_4 de A_4
o, o, o de O origine.

Posons

$$OA_m = a_m,$$

$$a_m^2 = x_m^2 + y_m^2 + z_m^2;\quad a_n^2 = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2;$$

$$a_{mn}^2 = (x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2;$$

d'où

$$(1)\qquad 2\,(x_m x_n + y_m y_n + z_m z_n) = a_m^2 + a_n^2 - a_{mn}^2.$$

On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 & x_1x_4 + y_1y_4 + z_1z_4 \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 & x_2x_3 + y_2y_4 + z_2z_4 \\ x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 & x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3x_4 + y_3y_4 + z_3z_4 \\ x_1x_4 + y_1y_4 + z_1z_4 & x_2x_4 + y_2y_4 + z_2z_4 & x_3x_4 + y_3y_4 + z_3z_4 & x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 \end{vmatrix}.$$

A l'aide des équations (1), on change ce déterminant en un autre dans lequel il n'entre que des a.

7. Lorsque les sphères des rayons r touchent les sphères des rayons r_1, r_2, r_3, r_4, on a

$$a_m = r + r_m;$$

posons

$$r_m^2 + r_n^2 - a_{mn}^2 = 2k_{mn},$$

et opérant comme ci-dessus, on trouve finalement

$$(B)\qquad \begin{vmatrix} 0 & +\frac{1}{r} & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +\frac{1}{r} & +1 & -r_1 & -r_2 & -r_3 & -r_4 \\ +1 & -r_1 & +r_1^2 & +k_1^2 & +k_{13} & +k_{14} \\ +1 & -r_2 & +k_{12} & +k_2^2 & +k_{23} & +k_{24} \\ +1 & -r_3 & +k_{13} & +k_{23} & +r_3^2 & +k_{34} \\ +1 & -r_4 & +k_{14} & +k_{24} & +k_{34} & +r_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement, abstraction faite des réductions, donnerait 600 termes.

Les divers signes des rayons donnent les seize solutions que comporte le problème.

Cas où les quatre sphères données se touchent.

8. Raisonnant comme ci-dessus, on parvient au déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & +\frac{1}{r} & +\frac{1}{r_1} & +\frac{1}{r_2} & +\frac{1}{r_3} & +\frac{1}{r_4} \\ +\frac{1}{r} & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +\frac{1}{r_1} & -1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ +\frac{1}{r_2} & -1 & -1 & +1 & -1 & -1 \\ +\frac{1}{r_3} & -1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ +\frac{1}{r_4} & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\sum \frac{1}{r^2} = 2\sum \frac{1}{rr_1}.$$

9. M. Bauer donne les relations suivantes analogues à la relation donnée ci-dessus par M. Hearne.

Soient :

$\frac{1}{R_1}$ le rayon réciproque de la sphère qui est touchée extérieurement par les quatre sphères données;

$\frac{1}{R_0}$ le rayon réciproque de la sphère qui est touchée intérieurement par les quatre sphères données;

$\sum \frac{1}{R_1}$ la somme des rayons réciproques des sphères qui sont touchées extérieurement seulement par une des quatre sphères;

$\sum \frac{1}{R_2}$ la somme des rayons réciproques des sphères qui sont touchées extérieurement seulement par deux des quatre sphères.

On a

$$\frac{2}{R_4} - \frac{2}{R_0} = \sum \frac{1}{R_3} - \sum \frac{1}{R_1}.$$

Soient :

R_m le rayon de la sphère qui est touchée extérieurement par une des quatre sphères données,

Et R'_m le rayon de la sphère qui est touchée différemment par les quatre sphères, on a

$$\frac{1}{R_4 R_0} + \sum \frac{1}{R_2 R'_2} = \sum \frac{1}{R_3 R'_2}.$$

10. On a

$$x_m x_n + y_m y_n + z_m z_n = a_m a_n \cos (a_m a_n).$$

Au moyen de cette relation qui équivaut à six équations et du déterminant (B), on trouve une équation entre les cosinus des six angles *intérieurs* que donne un faisceau de quatre rayons, et les longueurs de ces rayons. C'est la relation donnée la première fois par Carnot (*) (*Géométrie de position*, 1803, p. 416); il fait voir comment on peut se servir de cette dernière relation pour trouver le rayon de la sphère qui touche quatre sphères, Il *présume* que l'équation sera du second degré et ajoute : « Le calcul étant fort long, quoique sans aucune difficulté, je me contente de l'indiquer. »

M. Mention a exécuté le calcul (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 438).

(*) Né à Nolay (Côte-d'Or) en 1753, mort en exil à Magdebourg en 1823.

MOUVEMENT DU PENDULE;

PAR M. FINK,
Professeur à Strasbourg.

M. Delaunay a traité dans sa *Mécanique* entre autres deux questions intéressantes, à savoir : la déviation des corps graves vers l'est, déviation due au mouvement de rotation de la terre combinée avec l'action de la pesanteur dans la chute verticale, et le déplacement du plan d'oscillation du pendule due au même mouvement de rotation. Ce savant emploie à cet effet la théorie du mouvement relatif. Je me propose de résoudre les mêmes questions sans ce secours; on verra qu'en négligeant le carré et les puissances supérieures de la vitesse angulaire de la terre, mes résultats coïncident avec les siens.

Déviation. Je prends trois axes fixes dans l'espace : l'axe Oz sera dirigé sur celui de la terre, du centre au pôle nord; l'axe Ox aura la position initiale de la trace du plan méridien du lieu sur l'équateur; l'axe Oy est perpendiculaire aux deux autres. Soient A la position initiale du lieu ou de l'observateur, R sa latitude, a le rayon terrestre, ω la vitesse angulaire de la terre; au bout du temps t, compté de l'instant où le point matériel commence à tomber, les coordonnées de ce lieu seront

$$(1)\quad x_1 = a\cos\lambda\cos\omega t,\quad y_1 = a\cos\lambda\sin\omega t,\quad z_1 = a\sin\lambda;$$

l'équation du plan tangent au globe en ce point, c'est-à-dire du plan horizontal de l'observateur, est, au temps t,

$$(2)\qquad x\cos\lambda\cos\omega t + y\cos\lambda\sin\omega t + z\sin\lambda - a = 0.$$

Je nomme b la distance initiale du mobile au centre de la terre, de sorte que $b - a$ est la hauteur d'où il tombe; ses coordonnées initiales sont

(3) $$x_0 = b\cos\lambda, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = b\sin\lambda.$$

La vitesse initiale du mobile, perpendiculaire au plan xz, est $b\omega\cos\lambda$; ses composantes parallèles aux x, y, z sont respectivement

(4) $$0, \quad b\omega\cos\lambda, \quad 0.$$

La pesanteur g étant dirigée sur la verticale de l'observateur, les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\cos\lambda\cos\omega t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\cos\lambda\sin\omega t,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g\sin\lambda.$$

Ayant égard à (4) on trouve, au moyen d'une première intégration,

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{\omega}\cos\lambda\sin\omega t,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g}{\omega}\cos\lambda(\cos\omega t - 1) + b\omega\cos\lambda,$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt\sin\lambda.$$

La position initiale du mobile a pour coordonnées (3), donc

(5) $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{g}{\omega^2}\cos\lambda(\cos\omega t - 1) + b\cos\lambda, \\ y &= \cos\lambda\left[\frac{g}{\omega^2}\sin\omega t + \left(b\omega - \frac{g}{\omega}\right)\right]t, \\ z &= \sin\lambda\left(b - \frac{1}{2}gt^2\right). \end{aligned}\right.$$

Pour avoir l'époque de la chute sur le plan horizontal de l'observateur, il faut substituer pour x, y, z, ces expressions dans l'équation (2), puis la résoudre par rapport à t.

Or ω étant égal à

$$\frac{2\pi}{86164''} = 0{,}000\,0729,$$

on pourra développer les $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ suivant les puissances de ωt, et comme la durée du mouvement de chute se réduit à quelques secondes, on négligera ω^2, ω^4, etc. On trouve

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l}
x = \cos\lambda\left[b - g\left(\frac{t^2}{2} - \frac{\omega^2 t^4}{2.3.4} + \ldots\right)\right] \\
\text{ou} \\
x = \cos\lambda\left(b - \frac{1}{2}gt^2\right), \\
y = \cos\lambda\left(b\omega t - \frac{gt}{\omega} + \frac{gt}{\omega} - \frac{g\omega t^3}{2.3} + \frac{g\omega^3 t^5}{2.3.4}\right) \\
\text{ou} \\
y = \cos\lambda\left(b - \frac{gt^2}{6}\right)\omega t, \\
z = \sin\lambda\left(b - \frac{1}{2}gt^2\right).
\end{array}\right.$$

Dans (2), je remplace également $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$ par les séries, et x, y, z par les valeurs précédentes; je supprime $\omega^2 t^2, \ldots$ et j'ai

$$(7)\qquad b - a - \frac{1}{2}gt^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad t = \sqrt{\frac{2(b-a)}{g}},$$

comme si la terre ne tournait pas.

La déviation est la distance du point de chute représenté par (6) et (7) au point x_1, y_1, z_1. Avec l'approximation adoptée, on trouve pour le carré de cette distance, avant d'avoir égard à (7),

$$\left(b - a - \frac{1}{2} gt^2\right)^2 + \omega^2 t^2 \left(b - a - \frac{1}{6} gt^2\right)^2 \cos^2\lambda.$$

Le premier terme est nul en vertu de (7), et la déviation *tout entière* à l'est (vu que $x - x_1 = 0$)

$$\omega t \cos\lambda \left(b - a - \frac{1}{6} gt^2\right).$$

Avec la valeur de t (équation 7), elle se transforme en

$$(8) \qquad \frac{1}{3} g\omega \cos\lambda \left[\frac{2(b-a)}{g}\right]^{\frac{3}{2}}$$

que je nomme u, comme dans l'ouvrage cité. Dans les expériences que l'auteur cite, on avait

$b - a = 158^{m},5$, $\lambda = 51^\circ$, $g = 9,8088$ et $u = 0,0283$;

le calcul de la formule (8) donne

$$u = 0,0276,$$

Pendule. Je conserve les mêmes axes de coordonnées et j'appelle x_1, y_1, z_1 le point de suspension du pendule simple, l sa longueur, N la réaction du fil de suspension, $-x$, y, z les coordonnées du point matériel; sa masse est supposée $= 1$. Les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -g\cos\lambda\cos\omega t - \mathrm{N}\frac{(x - x_1)}{l}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -g\cos\lambda\sin\omega t - \mathrm{N}\frac{y - y_1}{l}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -g\sin\lambda - \mathrm{N}\frac{z - z_1}{l}. \end{aligned}\right.$$

Comme plus haut, on a ici

$$(2) \qquad x_1 = a\cos\lambda\cos\omega t, \quad y_1 = a\cos\lambda\sin\omega t, \quad z_1 = a\sin\lambda.$$

Par le point x, y, z, j'imagine un second système d'axes de coordonnées fixes dans la terre, à savoir : la verticale du lieu axe des ζ, la méridienne axe des ξ, et la perpendiculaire axe des η. On aura

$$(3)\quad \begin{cases} x = x_1 + \xi \cos \xi x + \eta \cos \eta x + \zeta \cos \zeta x, \\ y = y_1 + \xi \cos \xi y + \ldots, \\ z = z_1 + \xi \cos \zeta z \ldots \end{cases}$$

L'axe des ζ, c'est-à-dire la verticale, donne immédiatement, au temps t,

$$\cos \zeta x = \cos\lambda \cos \omega t, \quad \cos \zeta y = \cos\lambda \sin \omega t, \quad \cos \zeta \xi = \sin\lambda.$$

L'axe des η, perpendiculaire au plan méridien qui fait avec le plan xz l'angle ωt, donne

$$\cos \eta x = -\sin \omega t, \quad \cos \eta y = \cos \omega t, \quad \cos \eta z = 0.$$

Quant à l'axe des ξ, il fait avec l'axe z un angle de

$$90 + 90 - \lambda, \quad \text{d'où} \quad \cos \xi z = -\cos\lambda.$$

Il est de plus perpendiculaire à l'axe ζ, ce qui donne

$$\cos \xi x \cos \zeta x + \cos \xi y \cos \zeta y + \cos \xi z \cos \zeta z = 0,$$

ou, à cause des valeurs déjà données,

$$(5)\quad \cos \xi x \cos\lambda \cos \omega t + \cos \xi y \cos\lambda \sin \omega t - \cos\lambda \sin\lambda = 0.$$

Avec $\cos^2 \xi x + \cos^2 \xi y + \cos^2 \xi z = 1$ et comme $\cos \xi z$ égale $-\cos\lambda$,

$$\cos^2 \xi x + \cos^2 \xi y + \cos^2 \lambda = 1.$$

Cette équation avec (5) donne

$$\cos \xi x = \sin\lambda \cos \omega t, \quad \cos \xi y = \sin\lambda \sin \omega t,$$

et les formules (3) deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} x = x_1 + \xi \sin\lambda \cos \omega t - \eta \sin \omega t + \zeta \cos\lambda \cos \omega t, \\ y = y_1 + \xi \sin\lambda \sin \omega t + \eta \cos \omega t + \zeta \cos\lambda \sin \omega t, \\ z = z_1 - \xi \cos\lambda + \zeta \sin\lambda. \end{cases}$$

Les équations (1), multipliées respectivement par $z_1 y - y_1 z$, $x_1 z - z_1 x$, $y_1 x - x_1 y$ donnent, par addition,

$$(7)\quad (z_1 y - y_1 z) d^2 x + (x_1 z - z_1 x) d^2 y + (y_1 x - x_1 y) d^2 z = 0.$$

On va remplacer toutes les quantités qui y entrent par des fonctions de ξ_1, $m\zeta_1$, ωt.

D'abord les équations (3) et (2) fournissent

$$\begin{aligned}
z_1 y - y_1 z &= a(\xi \sin\omega t + \eta \sin\lambda \cos\omega t),\\
x_1 z - z_1 x &= a(-\xi \cos\omega t + \eta \sin\lambda \sin\omega t),\\
y_1 x - x_1 y &= -a\eta \cos\lambda.
\end{aligned}$$

Avec cela l'équation (7) peut être mise sous la forme suivante

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
&\xi(\sin\omega t\, d^2 x - \cos\omega t\, d^2 y)\\
&+ \eta(\sin\lambda \cos\omega t\, d^2 x + \sin\lambda \sin\omega t\, d^2 y) - \cos\lambda\, d^2 z = 0.
\end{aligned}\right.$$

Pour calculer les coefficients de ξ et η, je multiplie la première des équations (6) par $\sin\omega t$, la deuxième par $-\cos\omega t$, j'ajoute et j'ai

$$(9)\quad x \sin\omega t - y \cos\omega t = -\eta.$$

Je multiplie les mêmes équations par $\sin\lambda \cos\omega t$, $\sin\lambda \sin\omega t$, la troisième par $-\cos\lambda$, j'ajoute et il vient

$$(10)\quad \sin\lambda(x \cos\omega t + y \sin\omega t) - z\cos\lambda = \xi.$$

L'équation (9), différentiée deux fois, donne

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sin\omega t\, d^2 x - \cos\omega t\, d^2 y\\
&= -d^2\eta - 2\omega dt(\cos\omega t\, dx + \sin\omega t\, dy)\\
&\quad + \omega^2 dt^2 (x \sin\omega t + y \cos\omega t),
\end{aligned}\right.$$

d'après l'équation (9) le dernier terme $= -\omega^2 \eta\, dt^2$.

L'équation (10), différentiée deux fois, donne

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sin\lambda(\cos\omega t . d^2 x + \sin\omega t\, d^2 y) - \cos\lambda\, d^2 z = d^2\xi\\
&+ 2\omega \sin\lambda\, dt(\sin\omega t\, dx - \cos\omega t\, dy)\\
&+ \omega^2 dt^2 \sin\lambda(x\cos\omega t + y \sin\omega t).
\end{aligned}\right.$$

Le dernier terme, en vertu de l'équation (10), se réduit à $\omega^2 dt^2 (\xi + z\cos\lambda)$, et d'après l'équation (10), à $\omega^2 dt^2 \sin\lambda [\xi \sin\lambda + (a+\zeta)\cos\lambda]$.

Restent les facteurs de $2\omega dt$.

Or de l'équation (9) on tire

$$\sin\omega t . dx - \cos\omega t . dy = - d\eta - \omega dt (x \cos\omega t + y \sin\omega t),$$

et d'après l'équation (10)

$$\sin\omega t . dx - \cos\omega t . dy = d\eta - \frac{\omega dt}{\sin\lambda}(\xi + z\cos\lambda),$$

d'après l'équation (6)

$$(13)\ \sin\omega t . dx - \cos\omega t . dy = - d\eta - \omega dt [\xi \sin\lambda + (a+z)\cos\lambda].$$

De l'équation (10) on déduit

$$\begin{aligned}\cos\omega t . dx + \sin\omega t\, dy &= \frac{d\xi + \cos\lambda\, dz}{\sin\lambda} \\ &\quad + \omega dt (x \sin\omega t - y \cos\omega t) \\ &= \sin\lambda . d\xi + \cos\lambda\, d\zeta - \omega\eta\, dt.\end{aligned}$$

Cette valeur, ainsi que les équations (11) (12) (13), subtituées dans l'équation (8), donnent

$$(14)\left\{\begin{aligned}&\xi[-d^2\eta - 2\omega dt(\sin\lambda\, d\xi + \cos\lambda\, d\zeta - \omega\eta\, dt) - \omega^2\eta\, dt^2] \\ &+\eta\left\{d^2\xi + 2\omega dt \sin\lambda(- d\eta - \omega dt[\xi\sin\lambda + (a+\zeta)\cos\lambda])\right\} \\ &+\omega^2 \sin\lambda\, dt^2 [2a + \zeta(\cos\lambda + \xi\sin\lambda)] = 0.\end{aligned}\right.$$

Effectuant, etc.,

$$\begin{aligned}0 = \eta d^2\xi - \xi d^2\eta - 2\omega\sin\lambda(\xi d\xi + \eta d\eta)\, dt - 2\omega\cos\lambda . d\zeta dt \\ + \omega^2\eta\cos\lambda\, dt^2 [\xi\cos\lambda + (a+\zeta)\sin\lambda].\end{aligned}$$

En négligeant le terme en ω^2, de même que $\frac{d\zeta}{dt}$ qui est très-petit dans les expériences, on a une équation dont l'intégrale est

$$\xi d\eta - \eta d\xi + \omega \sin\lambda\,(d\xi^2 + d\eta^2) = C.$$

Observant de plus, encore avec M. Delaunay, que le pendule Foucault est installé de façon que pendant chaque oscillation il revienne coïncider avec la verticale du point de suspension, on voit que l'équation doit être satisfaite par $\xi = 0$ avec $\eta = 0$, de sorte que la constante est nulle. On posera ensuite, si on veut, $\xi = r\cos\theta$, $\eta = r\sin\theta$, et l'équation devient

$$d\theta = -\,\omega \sin\lambda\, dt,$$

d'où

$$\theta = \theta_0 - \omega \sin\lambda \times t,$$

ce qui donne $\omega \sin\lambda$ pour la rotation relative du plan du pendule en 1 seconde.

Ces calculs se simplifient beaucoup si dès le commencement on néglige $\omega^2, \ldots$. En ne remontant qu'à l'équation (8), on voit que cette équation devient

$$\xi\,(\omega t\, d^2x - d^2y) + \eta\,(\sin\lambda\, d^2x + \omega t \sin\lambda\, d^2y - \cos\lambda\, d^2z) = 0.$$

Les équations (6) donnent $\omega t x - y = -\eta$,

(*a*) $$(x + \omega t y)\sin\lambda - \zeta\cos\lambda = \xi,$$

d'où

$$\omega t\, d^2x - d^2y = -\,d^2z - 2\omega\, dx\, dt,$$

$$(d^2x + \omega t\, d^2y)\sin\lambda - \cos\lambda . d^2z = d^2\xi - 2\omega \sin\lambda\, dt\, dy\,.$$

Ces mêmes formules (*a*) donneront dx, dy, dans les expressions desquels on pourra supprimer les termes en ω, puisqu'on multipliera par $2\omega dt$. On aura ainsi

$$dy = d\eta,\quad dx = \frac{d\xi + \cos\lambda\, dz dz}{\sin\lambda} = \cos\lambda\, d\zeta + \sin\lambda . d\xi,$$

et l'équation (14) devient

$$\xi[-d^2\eta - 2\omega dt(\sin\lambda\, d\xi + \cos\lambda\, d\zeta)]$$
$$+ \eta\,[d^2\xi - 2\omega \sin\lambda\, d\eta\, dt] = 0$$

ou

$$xd^2\xi - \xi d^2\eta - 2\omega \sin\lambda\, dt(\xi d\xi + \eta d\eta) - 2\omega \cos\lambda\,.\,dz\,dt = 0.$$

DÉFINITIONS DES MODES DE REPRÉSENTATION

mentionnés dans l'extrait d'un Mémoire sur les Cartes géographiques, inséré au Compte rendu de la séance de l'Académie des Sciences du 5 mars 1860;

Par M. A. TISSOT.

Lorsqu'on a égard uniquement à la nature des lignes du canevas, on peut classer de la manière suivante les divers systèmes de projection qui ont été employés ou seulement proposés pour la représentation de la surface entière du globe.

1°. *Le développement de Mercator* est le seul dans lequel les méridiens et les parallèles soient remplacés par des lignes droites.

Il y a six systèmes où, quand le pôle occupe le centre de la carte, les méridiens se trouvent figurés par des lignes droites partant de ce point, et faisant entre elles des angles égaux aux différences de longitude, les parallèles par des circonférences ayant toutes ce même point pour centre. Ce qui varie de l'un à l'autre de ces systèmes, dont les quatre premiers sont des perspectives, c'est la manière dont les rayons des parallèles de la carte dépendent de la latitude; voici leurs noms :

2°. *La perspective centrale* ou *projection gnomonique;*

3°. *La projection stéréographique* (*voir* la Note à la fin);

4°. *La projection de La Hire;*

5°. *La projection orthographique;*

6°. *La projection de Lorgna* (*);

7°. *La projection stéréographique équatoriale modifiée.*

Dans les deux systèmes suivants, les parallèles sont représentés par des cordes d'une même circonférence parallèles entre elles, et les méridiens par les ellipses qui divisent ces cordes en parties proportionnelles aux différences de longitude; ce sont :

8°. *La projection de l'Astronomie populaire d'Arago;*

9°. *La projection homalographique de M. Babinet.*

Ils se distinguent l'un de l'autre par le rayon du méridien principal et par l'écartement des parallèles.

Pour les deux derniers systèmes, savoir :

10°. *La projection globulaire* ou *projection anglaise*,

11°. *La projection stéréographique méridienne modifiée*,

Toutes les lignes du canevas sont des circonférences.

Dans le premier et les quatre derniers modes de représentation, c'est un lieu de l'équateur qui se trouve au centre de la carte; pour tous les autres, il conviendrait aussi d'effectuer la projection sur un méridien : de cette manière on rejetterait les plus grandes déformations vers les bords de la carte, c'est-à-dire vers les régions qui sont occupées en grande partie par les contrées polaires ou par l'Océan; mais afin de les définir plus facilement,

(*) Antonio-Maria Lorgna, né à Vérone en 1730, mort à Vérone en 1796. TM.

nous supposerons d'abord qu'il ne s'agisse pour eux que de la projection équatoriale. Nous pourrons alors ajouter que dans les onze systèmes, à l'exception du 8e, du 9e et du 10e, les deux series de lignes qui représentent les méridiens et les parallèles se coupent à angle droit.

Il reste à dire quelques mots de chaque système en particulier.

1°. *Le développement de Mercator* (*), qui conserve les angles et donne des lignes droites pour projections des *loxodromies,* est destiné à la construction des *cartes marines* ou *cartes réduites*. L'écartement de deux méridiens y est le même que celui qu'on mesurerait sur le globe le long de l'équateur, et, quand on néglige l'aplatissement, la distance d'un parallèle à l'équateur y est égale au logarithme népérien de la cotangente de la demi-distance polaire du parallèle.

2°. *La perspective centrale* est prise du centre de la sphère, comme son nom l'indique; il est facile d'y reconnaître les différents lieux qui se trouvent sur le plus court chemin de deux points donnés du globe, puisque tout grand cercle y est représenté par une ligne droite. En appelant λ la distance polaire d'un parallèle et r le rayon du cercle qui lui sert de projection, on a

$$r = \text{tang.}\ \lambda.$$

Sur un cadran solaire, les lignes d'heures s'obtiendraient comme les méridiens, et les courbes de déclinaison comme les parallèles de la *perspective centrale;* cette remarque d'ailleurs est indépendante de la position du plan sur lequel on fait la perspective par rapport à la ligne des pôles, et de celle du mur sur lequel on trace le

(*) Mercator (Gérard), né à Ruremonde en 1512, mort à Duisbourg en 1594; sa première carte est de 1569. Tr.

cadran par rapport au style, pourvu que les deux positions se correspondent; de là est venu le nom de *projection gnomonique*.

3°. En cherchant la condition qui doit être remplie pour que le canevas des droites concourantes et des circonférences concentriques n'altère pas les angles, on trouve

$$r = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \lambda;$$

on est ainsi conduit à une perspective de l'hémisphère prise du pôle opposé, c'est-à-dire à la *projection stéréographique*.

4°. *La Hire* (*) a proposé de mettre le point de vue en dehors de la sphère, à une distance de sa surface égale au sinus de 45°, ce qui donne

$$r = \frac{(2\sqrt{2} + 1)\sin\lambda}{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}\cos\lambda}.$$

5°. En l'éloignant jusqu'à l'infini, on obtient la *projection orthographique*, et le rayon du parallèle devient

$$r = \sin\lambda.$$

6°. Parmi les modes de projection que comprend ce même canevas à droites concourantes et à circonférences concentriques, il en est aussi un qui conserve les surfaces: c'est celui de *Lorgna;* la condition indiquée conduit à prendre

$$r = 2 \sin \frac{1}{2} \lambda;$$

cette longueur est celle de la corde de méridien comprise entre le parallèle et le pôle.

(*) Philippe de la Hire, né à Paris en 1640, mort à Paris en 1718; peintre, architecte, lecteur royal, membre de l'Académie des Sciences. TM.

7°. Le 2e et le 3e système augmentent les distances le long des méridiens, tandis que le 5e et le 6e les diminuent; elles ne seront pas modifiées si on fait

$$r = \lambda.$$

Supposons maintenant que dans l'une des six projections précédentes on veuille placer un lieu de l'équateur au centre de la carte; alors ce qui a été dit des méridiens s'appliquera aux grands cercles passant par ce lieu, et ce qui a été dit des parallèles aux petits cercles parallèles à son horizon. Le canevas géographique ne sera plus aussi simple; au lieu des droites et des circonférences qui représentaient respectivement les méridiens et les parallèles, on aura les lignes indiquées dans le tableau suivant :

Système n°	2.	Droites parallèles.	Hyperboles.
»	3.	Circonférences.	Circonférences.
»	4.	Ellipses.	Ellipses.
»	5.	Ellipses.	Droites parallèles.
»	6.	Courbes du 4e degré. .	Courbes du 4e degré.
»	7.	Courbes transcendantes.	Courbes transcendantes.

8°. Dans le 8e mode de représentation, le méridien principal a pour rayon $\frac{\pi}{2}$, π étant le rapport de la circonférence au diamètre, et les parallèles gardent leurs distances mesurées le long d'un méridien du globe.

9°. Le suivant conserve les surfaces; le rayon du méridien principal y est égal à $\sqrt{2}$, et l'écartement des parallèles y est déterminé par l'équation

$$2z + \sin 2z = \pi \sin l,$$

dans laquelle l désigne la latitude du parallèle, et $\sin z$ sa distance à l'équateur sur la carte. Cette équation se trouve réduite en tables dans la Notice qu'a publiée M. Babinet.

10°. Supposons que l'on veuille tracer de 10 en 10° les méridiens et les parallèles de la projection globulaire; après avoir décrit un cercle avec un rayon égal à $\frac{\pi}{2}$ pour figurer le méridien principal, et deux diamètres à angle droit pour le méridien central et l'équateur, on divisera chaque quart de la circonférence et chacun des quatre rayons en 9 parties égales; par les pôles et les points de division de l'équateur, on fera passer des circonférences, ce qui donnera les méridiens; par les points de division qui se correspondent sur le méridien principal et sur le méridien moyen, on fera passer d'autres circonférences et on aura les parallèles.

11°. Enfin le canevas du dernier système est formé par la réunion des méridiens de la projection globulaire avec les parallèles de la projection stéréographique.

Note. Le nom de *stéréographie* a été introduit par le jésuite Aguillon (François) (*).

« Quare tametsi *stereographices* nomine nusquam
» vocatum hoc projectionis genus reperimus; quia tamen
» nec alio quidem ullo solitum est appellari, placuit hoc
» nomen usurpare, quod nobis in præsenti visum est ad
» rem ipsam quam maxime accommodatum. » (AGUILONII *Opticorum libri sex*. Parisiis, 1613, in-f°, in Præfatione.). (*Voir* CHASLES, *Méthodes*, p. 516.)

(*) Né à Bruxelles en 1568, mort à Anvers en 1617. TM.

THÉORÈMES CINÉMATIQUES SUR LES SURFACES ET VOLUMES ENGENDRÉS PAR MOUVEMENT;

PAR M. ÉMILE BARBIER,
Elève de l'École Normale (*).

1. Le centre de gravité G d'une surface plane S se meut avec une vitesse constante dans son plan, pendant que ce plan tourne uniformément autour d'une droite qu'il contient; le volume engendré par la surface S a pour mesure le produit de l'aire S par la longueur de l'arc engendré par le centre de gravité de la courbe parcourue par le centre de gravité G. En particulier, si l'on suppose un cercle C tournant autour d'un point fixe I, en même temps que son plan tourne autour d'une droite qui y est contenue; de plus, si la rotation du plan s'achève pendant qu'un nombre entier de rotations autour du point I se sont accomplies, et si les rotations simultanées sont uniformes, les volumes engendrés sont indépendants de la distance du cercle C au point I. La surface engendrée est un anneau ondulé à moins que le centre C ne soit en I.

2. Toutes les sections droites d'un cylindre quelconque, tournant autour d'un axe situé dans le plan de l'une quelconque d'elles, engendrent des volumes équivalents.

3. Le volume engendré par une surface plane quelconque, tournant autour d'une droite quelconque, est équivalent au volume engendré par la projection de la surface plane sur un plan méridien passant par son centre de gravité.

(*) Devenu agrégé n° 1. TM.

4. Une sphère de rayon constant, dont le centre parcourt une hélice ordinaire, est enveloppée par une surface canal qu'on peut appeler *serpentin*.

Cette dénomination étant adoptée, nous pourrons dire que le serpentin donne lieu à la proportion suivante :

Sa section perpendiculaire à l'axe du cylindre est au grand cercle de la sphère génératrice, comme la longueur d'une spire d'hélice est à son pas.

QUESTIONS.

554. On a fait arriver dans un poids d'eau x un poids p de vapeur d'eau à d degrés sous la pression de c centimètres; on a aussi porté la température t de cette eau à la température t'; l'eau est renfermée dans un vase métallique pesant k kilogrammes et dont la chaleur spécifique est m : on demande la valeur de x.

555. Dans un triangle isocèle donné, inscrire une parabole qui touche les deux côtés égaux, soit bornée par la base et dont l'aire soit un maximum.

(Ramchundra, professeur indien à Calcutta).

556. C_1, C_2, C_3 sont trois cônes de *même* degré ayant leurs trois sommets sur la *même* droite; C_1 coupe C_3 suivant une courbe *plane*, C_2 coupe C_3 suivant une courbe *plane*, C_1 et C_2 se couperont aussi suivant une courbe *plane*, et les trois plans passent par la *même* droite.

(Steiner.)

557.

$$\frac{x}{x^2+1^2}+\frac{x}{x^2+2^2}+\frac{x}{x^2+3^2}+\ldots=\frac{1}{2}\pi \quad \text{pour} \quad \lim x=0.$$

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XIX.)

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie; Arithmétique.

Analyse algorithmique; Déterminants.

Calcul infinitésimal; dérivées; séries.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Trigonométrie plane et sphérique.

Coniques planes et sphériques.

Surfaces du second ordre.

Courbes planes en général.

Géométrie de l'espace; Lignes et Surfaces.

Physique mathématique.

Mélanges.

Questions résolues.

Questions proposées.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des Collaborateurs sont précédés d'un astérisque.)

Pages.

ERRATA.

TOME XIX.

Page 18, dernière ligne, *au lieu de* K, *lisez* k.
19, lignes 6 et 7, *remplacez les* $+$ *par des* $\times$.
19, dernière ligne, *remplacez les* , *par des* $\times$.
20, ligne 6, *au lieu de* (-1), *lisez* $(-1)^t$.
45, ligne 12, *au lieu de* $(n-1)_{p-1}$, *lisez* $(p-1)_{n-1}$.
95, ligne 5 en remontant, *au lieu de* Sa, *lisez* la.
96, ligne 10, *au lieu de* normales, *lisez* droites.
247, lignes 11 et 17, *au lieu de* Rouché, *lisez* Rouget.
267, lignes 4 et 3, *au lieu de* normale, *lisez* tangente.
336, ligne 7 en remontant, *au lieu de* 323, *lisez* 523.
354, ligne 12 en remontant, *au lieu de* intérieurs, *lisez* extérieurs.
361, ligne 7 en remontant, *au lieu de* n, *lisez* m.
361, ligne 10 en remontant, *au lieu de* d^4, *lisez* d^8.

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les dix-neuf premiers volumes.

Nos.	Pages.
TOME II.	
61	48
TOME IV.	
93	259
TOME V.	
120	202
TOME VII.	
192	368
193	368
TOME VIII.	
199	44
TOME X.	
240	357
245	358
TOME XI.	
251 (échecs) (FAURE.)	115
252 (domino) (RÉDACT.)	115
266	401
TOME XII.	
270	90
280	327
TOME XIV.	
307	262
313	305
TOME XV.	
316	52
317	52
324	229
325	229
331	243
333	243
342	353
343	353
347	387
349	407
TOME XVI.	
356	57
357	57
371	127
375	179
379	180
383	182
385	183
398	390
399	391
400	391
403	401
404	401
410	403
411	404
TOME XVIII.	
473	172
474	172
475	172
479	172
480	172
TOME XIX.	
499	46
515	94
516	94
521	94
522	195
523	233
526	233
527	233
528 à 534	247
535 à 539	306
540 à 541	361
543	361
545 à 553	404
555 à 557	464

Observation. Sur 557 questions, il en reste 79 à résoudre.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

LA STÉRÉOTOMIE DES ABEILLES.

Maximus in minimis certe Deus et mihi major
Quam vasto cœli in templo astrorumque catervâ.
(POLIGNAC, Anti-Lucret, lib. VII, v. 1353-1354).

Si l'on veut classer les animaux d'après leurs aptitudes industrielles, on devra les ranger dans cet ordre :

1°. Insectes;

2°. Oiseaux;

3°. Quadrupèdes, parmi lesquels on ne peut guère citer que les castors, de la famille des Rongeurs.

Les deux premières classes construisent des demeures et des magasins d'approvisionnement pour leurs progénitures : ce qui exige des connaissances géométriques et mécaniques dont le fabricateur des mondes a doué ces êtres, qui paraissent toutefois privés d'*intelligence et de conscience morale* (*); car leurs qualités en tout genre

(*) C'est cette privation qui a porté Descartes à assimiler les animaux à des machines, mais il ne leur a jamais refusé le sentiment et la volonté qui constituent la vie animale. Même chez l'homme, les idées *innées* viensont stationnaires, nullement fonctions du temps, limitées, et sans ces progrès qui caractérisent l'espèce humaine, progrès qui sont les conséquences de la faculté de parler. Dans la classe des Insectes, genre Hyménoptère, c'est l'espèce mellifère; et dans celle-ci la section des abeilles à miel, *Apis mellifera*, qui a attiré de toute antiquité l'attention. Il est à remarquer pourtant que la Bible mentionne l'industrie de la fourmi (*Prov.* VI, 7), et ne parle nullement de l'industrie de l'abeille, ne la cite que pour figurer une poursuite acharnée (*Deut.* I, *Prov.* CXVIII), et toutefois le miel était un des trois produits principaux, avec l'huile et le lait, de la terre promise. Dans les temps modernes, l'industrie des abeilles a fixé aussi l'attention des géomètres (V. *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 178), et récemment un éloquent avocat, savant géomètre, le célèbre lord Brougham, en a fait l'objet d'un Mémoire très-instructif (*Comptes rendus*, t. XLVI, p. 1024; 1858). Un motif intéressé a fait négliger d'autres espèces qui produisent aussi du miel, mais non alimentaire, et dont le travail est cependant aussi et peut-être encore plus admirable que celui de l'abeille domestique. En effet, celle-ci trouve un local tout préparé pour la recevoir, soit une ruche, soit une cavité quelconque; elle fait partie d'une société aussi nombreuse qu'une ville très-peuplée compte d'habitants : de là une république d'ouvriers travaillant pour une présidente et pour une agrégation polyandrique; tandis que dans les autres espèces les ateliers ne consistent qu'en un petit nombre d'indi-

---

nent aussi de Dieu. C'est ce qu'a parfaitement exposé Cufuerel, philosophe hollandais, complétement ignoré, et que je n'hésite pas à placer au premier rang, comme précurseur de la philosophie critique fondée par Kant, la seule qui fasse bien le départ de ce que l'homme peut savoir et de ce qu'il est condamné à éternellement ignorer ici-bas, la seule qui reste sur la terre sans jamais perdre de vue le ciel.

vidus, au plus cent, très-souvent moins, jusqu'à un ouvrier tout seul; et là, avant tout, il faut construire un logement, un *nid* pour y placer la génération à venir.

Il est vrai que l'abeille vulgaire résout un problème difficile de maximis et de minimis; mais les espèces solitaires exécutent des opérations stéréotomiques qui exigent plus d'adresse, plus d'imagination, plus de raffinement dans le choix des matériaux, dans la précision des formes. Lisons ce que dit à ce sujet l'immortel Réaumur, dans la préface du tome VI (1742) de sa délicieuse *Histoire des Insectes*, où l'on reconnaît la main de Dieu, tandis que dans l'histoire de l'homme on reconnaît trop souvent la main du démon (*).

« Les huit derniers Mémoires du volume précédent (V^{e}) ont été employés et ont à peine suffi à raconter les merveilles que celles-ci (les mouches à miel) nous offrent, et à en prouver la réalité. Il semble qu'elles ont dû épuiser tout ce que nous pouvions donner d'admiration à des mouches. Y en a-t-il de dignes de leur être comparées? Le nombre des abeilles d'une ruche bien peuplée égale celui des habitants d'une grande ville; toutes y travaillent de concert au bien de leur société; leurs gâteaux sont des ouvrages inimitables à l'œil des hommes qui ignorent jusqu'aux secrets de ramasser et de préparer la matière dont ils sont faits. La plus sublime géométrie n'eût pu déterminer une figure plus avantageuse à tous égards pour les cellules dont elles composent leurs gâteaux, que celles dont elles ont fait choix.

» L'air de grandeur qu'ont pour ainsi dire les établis-

(*) Pourquoi la Rochelle, à l'instar d'autres villes, n'élève-t-elle pas une statue au grand homme qui l'a illustrée? Quelle Société, consacrée à l'étude de la nature, ne souscrirait pas à un tel monument? Lisez le jugement que porte Cuvier sur Réaumur (*Biographie* Michaud).

sements des mouches à miel, l'ordre qui y règne, les ouvrages qui s'y exécutent, et l'utilité dont ils nous sont, ne doivent pourtant pas nous éblouir au point de nous ôter le désir de savoir comment se conduisent d'autres mouches dont les sociétés sont peu nombreuses, et ce que font dans le cours de leur vie d'autres mouches du même genre, dont le goût est de vivre solitaires. On admire avec raison ces grandes manufactures dont les ateliers sont remplis d'ouvriers qui s'entr'aident, où les uns ne sont destinés qu'à ébaucher l'ouvrage, les autres l'avancent encore plus, les autres le perfectionnent, et les autres le finissent; on pense avec plaisir ce qu'il y a à gagner en faisant passer successivement la même pièce par différentes mains; mais quand on est au fait des différentes pratiques de nos arts, on n'en estime pas moins un ouvrage pour avoir été commencé et fini dans une boutique obscure par un seul ouvrier, et où l'on fait plus de cas de celui qui seul y a mis la main. C'est ainsi que le vrai connaisseur des ouvrages de la nature, que le bon observateur saura encore admirer les abeilles solitaires dans leur travail, malgré le plaisir qu'il a eu cent et cent fois à voir tant de milliers de mouches occupées en même temps à différents ouvrages dans la même ruche. Enfin ces ruches si peuplées sont de grandes villes; mais on peut être curieux de connaître les mœurs simples des villageois et même des sauvages, après avoir étudié les mœurs des habitants des plus grandes villes et des plus policées. »

Nous choisirons pour exemple le problème de stéréotomie résolu par l'abeille *empileuse*, *Apis centucularis* (Réaumur, t. VI, p. 97 et suivantes) : C'est une femelle solitaire, fécondée, qui est obligée de construire sa demeure et d'engendrer sa société. A cet effet, elle choisit un terrain ni trop dur ni trop friable, et y creuse un cylindre parfaitement calibré de 13 à 14 millimètres de diamètre, sur 26 à 27 centimètres de longueur, et le plus fréquemment l'axe est horizontal ; elle enlève la terre par mottes extrêmement petites, mais avec une telle activité, que le cylindre est terminé au bout de quelques heures. Le déblai est déposé près de l'entrée ; nous verrons à quel dessein. Il s'agit maintenant de *tapisser* le cylindre ; à cet effet, l'abeille se dirige vers un rosier, vole longtemps autour, et quand son choix est fixé, elle se pose sur le bord d'une feuille, trois jambes dessous et trois jambes dessus, et la tête tournée vers le pédoncule. Supposons qu'on ait tracé avec de la craie, sur la demi-feuille, une portion d'ellipse, convexe vers la nervure médiane ; si avec des ciseaux on découpe la feuille en suivant cette trace, on obtient un morceau borné par l'ellipse découpée et par le bord dentelé de la feuille qui est aussi sensiblement elliptique. C'est cette opération qu'exécute notre ouvrière ; ses dents lui servent de ciseaux, et l'image qu'elle doit avoir dans la tête, lui sert de *trait* et la dirige, et tout est découpé avec plus de précision et en moins de temps que nous ne ferions avec nos instruments (*). A mesure qu'une partie est coupée, elle la plie avec les deux jambes du milieu de son corps ; de sorte qu'elle finit par tenir entre ces jambes un morceau triangulaire formé par un quart d'ellipse découpée et par un quart d'ellipse dentelée du bord de la feuille, et par la droite de la plicature. Alors le morceau prend par son poids une position verticale ; elle s'envole, le porte dans le creux cylindrique, le déplie et l'applique contre les parois ; la partie pointue formée par la rencontre des deux ellipses est pliée pour recouvrir le fond du cylindre ; elle recom-

(*) Descartes construit les courbes au moyen d'un système de *règles* liées d'une certaine manière. La trisection du corps de l'insecte paraît servir au même usage.

mence le même manége jusqu'à ce que le cylindre soit entièrement tapissé; mais ce n'est là qu'une besogne préparatoire. Cette enveloppe doit servir de moule à former les cellules, qui sont le but essentiel.

Prenons trois trapèzes égaux et appliquons chaque trapèze contre la même concavité cylindrique; ces trois figures se changeront en trois surfaces cylindriques, terminées chacune par deux droites et par deux arcs de cercles inégaux; réunissons ces trois surfaces, de telle sorte que le bord rectiligne de la première passe sous la seconde surface, le bord de la seconde sous la troisième, et le bord de la troisième sous la première; nous obtiendrons ainsi une sorte de cône tronqué ouvert par les deux bouts, et si l'on plie le petit bout en forme de voûte, on aura une espèce de dé à coudre. Telle est la forme d'une cellule. L'abeille découpe successivement trois morceaux dans des feuilles de rosier, comme elle a fait pour l'*enveloppe*, mais les ellipses sont de moindre dimension; le grand axe a 4 millimètres et le petit 2 millimètres environ; les trois morceaux sont égaux; mais elle ne les déplie plus, et leur laisse la forme triangulaire et en construit une cellule en forme de dé, comme il a été dit; et les trois morceaux, les trois voussoirs tiennent ensemble par l'élasticité et par la résistance qu'oppose la paroi de l'enveloppe cylindrique, qui sert aussi à leur donner la forme cylindrique. La stéréotomiste taille ces voussoirs sans aucun gabarit, ou plutôt l'artiste suprême a mis ces gabarits dans la tête de l'insecte. Pendant ces excursions de l'arbre au nid et du nid à l'arbre, il faut qu'elle conserve dans son *sensorium* les dimensions des cercles et des ellipses. Après vient l'opération chimique; l'abeille vole de fleur en fleur pour élaborer le miel qu'elle dépose dans la cellule, ainsi qu'un œuf, destiné à devenir successivement ver, chrysalide, mouche; le miel servant de pâture au ver. Pour donner plus de consistance à la cellule, l'abeille met par-dessus encore trois cellules semblables, qui se recouvrent, *s'empilent*, de sorte que chaque cellule est triple et est composée de neuf morceaux triangulaires.

Le miel étant liquide, il faut l'empêcher de s'écouler; l'abeille découpe, toujours dans une feuille de rosier et toujours marchant sur la circonférence, un cercle parfaitement *rond*, d'un diamètre un peu moindre que celui de l'ouverture de la cellule; elle fait entrer de frottement ce cercle dans cette ouverture, et comme pour les cellules, elle empile deux à trois de ces cercles, et y laisse une certaine distance ou certain vide entre cet opercule et l'ouverture. Ayant construit successivement huit ou neuf cellules, elle fait entrer le bout fermé de la seconde cellule dans le vide laissé dans la première cellule; de même la troisième cellule dans la seconde, et ainsi des autres jusqu'à ce que tout le cylindre soit rempli. La dernière cellule restant ouverte, l'abeille la ferme au moyen de la terre qu'elle a déblayée et qu'elle remblaye maintenant, de sorte que le nid est entièrement caché sous terre.

En juillet 1736, un paysan des environs des Andelys, en labourant, trouva de ces cylindres; il crut que c'était un maléfice de quelque sorcier pour faire manquer la récolte. Effrayé, il apporta cette trouvaille au seigneur du village, auditeur de la Chambre des Comptes, et qui habitait Paris; celui-ci consulta son chirurgien, qui s'adressa à l'abbé Nollet; celui-ci envoya le cylindre à Réaumur, qui conjectura aussitôt que cela pouvait bien être le produit d'un travail d'Insecte, et appliquant son génie observateur, il découvrit toutes les opérations qu'on vient de lire; quant au fait, il était déjà connu du célèbre Ray.

Comme tout le genre, cette espèce d'abeilles renferme trois sortes d'individus, mâles, femelles, ouvriers, qui n'ont ni la même taille, ni la même grosseur. Aussi les cellules, toutes de même diamètre, ont des longueurs appropriées aux individus qui doivent éclore. Comment la mère ouvrière peut-elle connaître d'avance le résultat de la ponte? Ce sont là des mystères qui n'ont pas à redouter les attaques des incrédules; toute négation, toute explication est impossible.

Voici ce qu'en conjecture Newton :

Annon sensorium animalium est locus cui substantia sentiens adest, et in quem sensibiles rerum species per nervos et cerebrum deferantur, ut ubi præsentes a præsente sentiri possint? Atque his rite expeditis, annon ex phænomenis constat esse entem incorporeum, viventem, intelligentem, omnipræsentem, qui in spatio infinito, tanquam sensorio suo (*), *res ipsas intime cernat, penitusque perspiciat, totasque intra se præsens præsentes complectatur; quarum quidem rerum id quod in nobis sentit et cogitat, imagines tantum ad se per organa sensuum delatas, in sensoriolo suo percipit et contuetur.* » (*Optices* lib. III, questio XXVIII.)

La charmante production de M. Michelet, l'*Insecte*, devrait être donnée en prix dans toutes les Institutions; il y règne une morale pure, élevée, revêtue d'un style où brillent les mêmes qualités; heureuse exception au dévergondage littéraire du jour.

Note bibliographique supplémentaire sur l'Alvéole des abeilles.

Aux renseignements que nous avons donnés (t. XV, p. 175), il faut ajouter :

1°. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1702-1739. On y trouve la question posée par Réaumur à Kœnig, et qui est le point de départ;

(*) Expression qui fait penser à Spinosa.

2°. *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1781. Castillon et Lhuiller traitant la question de *minimum minimorum*, trouvent un polyèdre différent de celui de l'alvéole, et en concluent que l'abeille n'a pas satisfait aux plus économiques conditions; mais lord Brougham, dans le Mémoire cité ci-dessus, fait voir que ces géomètres ont fait une omission qui vicie tous leurs calculs et annule leurs conclusions.

Dans ce même travail, le géomètre anglais démontre que le minimum exige que la largeur du rhombe soit égale au côté de l'hexagone, et réciproquement, de cette égalité on déduit le minimum.

BIOGRAPHIE.

SOPHIE GERMAIN.

Mulierem fortem quis inveniet?
(PROV. ch. XXI, v. 10).

Cette fille de génie vit le jour à Paris le 1er avril 1776, deux ans avant la mort de Voltaire, Rousseau, Lekain. Comme Pascal, elle montra une intelligence précoce, et, ce qui est bien plus rare, un jugement d'une sagesse prématurée et en donna des preuves en cette occasion. Son père(*), membre de l'Assemblée constituante, réunissait souvent chez lui ses collègues, et l'on pense bien que l'on discutait avec ardeur les grandes questions de l'époque. La jeune personne, dévouée aux saintes idées de 89, assistait avec un vif intérêt à ces réunions, mais trouvait qu'on allait trop vite et trop loin, et craignait qu'en surexcitant des passions populaires, on ne tombât sous la

(*) Député de la ville de Paris, demeurant rue Saint-Denis, *au Cabas d'or;* enseigne qui a disparu il y a peu de temps.

tyrannie désordonnée des masses, qui n'ont pour logique que des passions, pour arguments des poings fermés et pour but des intérêts grossièrement matériels. Ces craintes ne tardèrent point à se réaliser. Profondément affligée, la jeune prophétesse chercha à se distraire de ses chagrins dans le monde des abstractions. Elle parcourut l'*Histoire des Mathématiques* de Montucla, étudia Bezout, et, pendant les saturnales sanguinaires de 93, elle ne quittait presque plus la maison; se séquestrant volontairement, elle s'enfonça dans les méditations sur la théorie des nombres et sur le calcul infinitésimal qu'elle apprit dans les œuvres de Legendre et de Cousin. Ses progrès furent si considérables, si rapides, qu'en 1801 elle entra en commerce épistolaire avec Gauss, sous le pseudonyme d'un élève de l'École Polytechnique; d'abord sur les *Disquisitiones*, qui venaient de paraître, et ensuite sur des sujets dignes d'un tel correspondant. Pendant la campagne de 1804, le général d'artillerie Pernetty, ami de la famille Germain, étant venu à Brunswick, découvrit à l'illustre mathématicien le vrai nom de ce prétendu élève dont il n'avait jamais soupçonné le sexe. Sa surprise fut extrême, et ses lettres subséquentes portent le témoignage de sa haute admiration pour l'esprit profond et pénétrant de la jeune Française: admiration d'autant plus sincère, qu'alors le professeur allemand, froissé dans ses affections, dans son bien-être (*), n'éprouvait que des sentiments de répulsion pour notre nation.

Connu et apprécié de Lagrange, Laplace, Legendre,

(*) Le duc de Brunswick, mort si misérablement à la suite de la bataille d'Iéna, bienfaiteur de Gauss, avait pourvu aux frais de ses études. Dans la contribution de guerre imposée à la ville de Gottingue, la part de Gauss fut assez forte; Laplace l'acquitta à Paris, mais Gauss ne voulut pas accepter cet acte de générosité, et se libéra plus tard, voulant même payer les intérêts.

Lacroix, ce talent éminent restait ignoré du public géomètre. Ce fut le travail d'un physicien allemand qui donna de l'éclat au nom de Sophie Germain.

En 1810, Chladni, se dirigeant vers Paris, séjourna quelque temps à Mayence où j'étais alors professeur; il voulait bien partager quelquefois mes repas; sa conversation était extraordinairement intéressante. Doué d'une mémoire surprenante, il savait par cœur des chants entiers d'Homère, de Virgile, du Tasse, de Schiller, et connaissait l'histoire des sciences : hommes, ouvrages, dates. Il portait à Paris le clavi-cylindre, piano à sons prolongés, et de plus ses célèbres figures *acoustiques :* il s'était rendu très-habile exécutant sur son instrument et comptait faire sensation plutôt comme artiste que comme savant. L'exécution me semblait traînante, larmoyante, élégiaque et d'une impression monotone, fatigante. M'apercevant qu'il avait une susceptibilité d'artiste, je n'osai lui découvrir *entièrement* ma façon de penser.

Il vint à Paris; on s'occupa peu de son piano, mais ses belles expériences acoustiques attirèrent même l'attention de Napoléon. Il invita l'Institut à proposer pour sujet de prix extraordinaire le mouvement moléculaire des plaques élastiques. Lagrange considérait la question comme présentant des difficultés presque insurmontables : Sophie osa l'aborder. En 1811, elle présenta une solution renfermant une équation défectueuse corrigée par Lagrange; en 1813, elle obtint une mention honorable, et finit en 1815 par remporter le prix. Ce succès répandit la réputation de notre célèbre compatriote dans le monde mathématique, la rangea désormais parmi ces êtres privilégiés qui, planant dans les hautes régions, aperçoivent et créent même des oasis dans des saharas. Depuis, elle développa et perfectionna la théorie des surfaces élastiques dans divers Mémoires insérés dans des recueils scientifiques. En arithmologie, elle démontra des théorèmes nouveaux, que Legendre a admis dans son ouvrage. Une maladie cruelle mit fin à ses progrès, mais non à l'activité de son esprit. Au milieu des douleurs atroces d'un cancer, elle se livrait à une composition philosophique que le mort vint interrompre. C'est ainsi que Condorcet, traqué et enfin déchiré par des tigres qu'il avait aidé à démuseler, rêva ses *progrès de l'esprit humain,* merveilleux édifice auquel il manque le nom de l'*architecte* (*voir* la Note).

Le 17 juin 1831 mit fin aux tortures et à la vie de l'illustre demoiselle âgée seulement de cinquante-cinq ans; c'était une perte déplorable pour la science et pour la société. Elle était belle-sœur du membre de l'Institut Dutrochet, qui a attaché son nom à l'*endosmose*. Son neveu, M. Lherbette, député de l'Aisne, qui, sous la Restauration, a souvent défendu la cause libérale avec énergie et talent, a trouvé dans les papiers de sa nièce l'opuscule dont nous parlerons plus loin. Nul doute que les lettres de Gauss ont été conservées de même que celles de Sophie dans les papiers de Gauss. La publication de cette correspondance offrirait un haut intérêt de curiosité et d'instruction. L'opuscule publié deux années après la mort de l'auteur n'existe plus dans le commerce; une nouvelle édition est très-désirable.

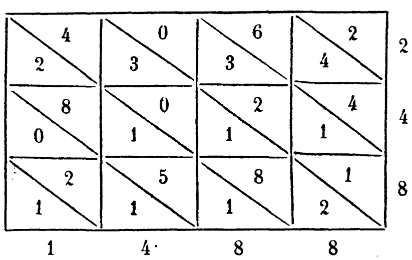
Note. On lit à la fin du huitième livre de l'*Anti-Lucrèce* du cardinal de Polignac (vers 1741) ces belles pensées :

Silicet astronomos et qui cœlestia quondam
Lustrarunt occulis et quos nova protulit ætas
Contemplatores, æterna nomine dignos
Censuimus, quod sint ausi signare figuram
Astrorum, et spatia, et moles variosque meatus,

Et causam supremam ipsis quæ tradidit astris
Materiam, formam atque situm, normamque movendi
Legitimo, ingrati, laudum fraudamus honore!
Est grave mentis opus charta describere cœlum
Ac terras, duplicique globo diversa notare
Climata, sidereumque rotis effingere motum.
Et potuit sine menti fabri consistere mundus!
O pudor! O miseræ vecors insania gentis!
O mirum artificem! Quis tam præclara videndo
Non stupeat genus esse hominum qui talia casu
Facta velint, et materiæ sine more vaganti
Accepta hæc referant; cum non sine mente, sine arte
Tot portentorum reddi mera possit imago!

PROCÉDÉS DE MULTIPLICATION USITÉS AU MOYEN AGE EN ITALIE.

1°. La figure explique suffisamment le procédé. C'est la multiplication de 4567 par 326. On fait les additions diagonalement. Le produit écrit autour est 1488842.



Ce procédé se nomme *per gelosia*. La figure simule les jalousies d'une fenêtre.

Notre procédé actuel portait ces trois noms :

2°. *Per scacchero*, par échiquier:

Per baricocolo, espèce de petits gâteaux ronds;

Per organetto, petit orgue.

Il y avait encore les procédés :

3°. *Per colonna.* On multiplie de tête tout le multiplicateur par chaque chiffre du multiplicande et on n'écrit que les unités en retenant les excédants; de sorte qu'on obtient tout de suite le produit sans avoir recours aux produits partiels.

4°. *Per repiego*, par composition; plutôt par décomposition en *facteurs*.

5°. *Per crosetta,* en croix. On additionne *de tête* toutes les unités, les dizaines, les centaines, etc., ce qui oblige de multiplier en croix, et on obtient le produit sur une seule ligne. Ce procédé est encore en usage dans la multiplication par approximation.

6°. *De Fiorentini,* des Florentins. On fait la multiplication de gauche à droite.

7°. *Per spezzatamento,* par morcellement. On décompose le multiplicateur par voie d'addition; ce qui rend l'opération moins pénible. Exemple :

$$20 = 3 + 4 + 5 + 8;$$

le produit par 6 se conclut de celui par 3; 8 de celui par 4, et 5 n'exige qu'une dimidiation.

(Tartaglia, *General Trattato di numeri,* libro secondo, p. 26). Cet ouvrage de 1546 contient beaucoup de prix de denrées et de marchandises qui présentent de l'intérêt pour les *économistes*.

EXTRAIT D'UNE LETTRE.

Le n° 1 de 1858 du Bulletin de la Société des Sciences historiques du département de l'Yonne renferme diverses lettres de l'illustre Fourier.

Dans celle du 22 mai 1788, adressée à M. Bonnard, son maître et son ami, datée de l'abbaye de Saint-Benoît-sur-Loire, où il commençait alors son noviciat de bénédictin, on y trouve l'énoncé d'une question qui peut-être par sa singularité pourra, si vous le jugez convenable, être soumise aux lecteurs des *Nouvelles Annales*.

« Voici, dit Fourier à son ami, une question d'un » genre assez singulier. Elle me vient dans l'esprit au » sujet de certaines propositions d'Euclide dont nous » avons parlé quelquefois.

» *Disposer dans un même plan* 17 (m) *lignes droites* » *de manière qu'elles donnent* 101 (n) *points d'inter-* » *section. Il faut supposer les lignes prolongées à l'in-* » *fini et qu'un point d'intersection n'appartienne pas* » *à plus de deux lignes. Il faut ramener le problème à* » *une pure analyse, en sorte que m et n étant déter-* » *minés, on puisse parvenir aux équations nécessaires.* »

Dans une autre lettre, Fourier déplore le malheur de sa situation.

« N'est-ce pas, dit-il, être condamné à l'ignorance » que de ne pouvoir lire d'autres ouvrages que les siens. » C'est une privation dont toute la philosophie ne peut » se consoler. Je n'ai de livres à lire qu'un chétif exem- » plaire de Montaigne auquel il manque des feuillets que » je suis réduit à deviner. Je m'occupe un peu de grec; » vous croirez bien que c'est plutôt pour lire Euclide et » Diophante que Pindare et Démosthènes....

Et plus loin :

» J'ai encore travaillé ces méthodes d'élimination; il » n'est pas difficile de reconnaître combien celles dont » on fait usage sont défectueuses, mais il l'est beaucoup » de leur en substituer de meilleures. Vous voyez bien

» qu'il faudrait que j'eusse sous les yeux l'ouvrage de
» M. Bezout sur le même sujet. Seul et sans secours, on
» peut méditer mais non découvrir : souvent on fuit les
» hommes, on en devient meilleur mais non plus savant.
» Le cœur y gagne et l'esprit y perd, etc. »

Cette lettre est datée du 22 mars 1789, et à la suite se trouvent ces mots où le grand analyste laisse entrevoir la prescience de sa grandeur future.

« Hier j'ai eu vingt-quatre ans accomplis ; à cet âge
» Pascal et Newton avaient acquis bien des droits à l'im-
» mortalité. »

FOURNERAT,
Membre de la Société historique de l'Yonne,
à Ancy-le-Franc.

MACHINE A CALCULER DE SCHEUTZ PERFECTIONNÉE.

Tout géomètre connaît la célèbre machine à calculer les séries, due au génie de M. Scheutz, Suédois, ou du moins en a entendu parler. Cette machine est fondée sur la théorie des différences introduite aujourd'hui dans l'enseignement. M. Donkin, célèbre constructeur anglais, vient d'apporter quelques perfectionnements à cette admirable production. Un rapport *approbatif* est signé par MM. G.-G. Stokes, C. Wheatstone, R. Villis, et un second rapport *aussi approbatif* par l'illustre astronome G.-B. Airy (en date du 31 août 1859). Par cette machine perfectionnée une Table d'*annuité sur la vie* a été *calculée* et *imprimée* en soixante-quinze minutes ; un calculateur par la voie ordinaire y mettrait cent soixante-quinze minutes, et encore le contrôle exige deux calculateurs. On ne peut rien ajouter à de tels noms, à une telle expérience.

BIBLIOGRAPHIE.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK
(CRELLE, t. LVII, 2e cahier, 1859.)

(voir t. V, p. 76).

Mécanique.

A. CLEBSCH (de Carlsruhe) (p. 93 à 110). *Sur la figure d'un fil flexible.*

Connaissant la fonction des forces, Jacobi ramène les équations du mouvement à une certaine équation aux différences partielles. M. Clebsch applique la même méthode à la recherche de la figure que prend un fil flexible soumis à l'action de diverses forces en équilibre; le Mémoire contient neuf paragraphes :

1°. *Équations générales.* U étant la fonction des forces, T la torsion qu'éprouve l'élément ds, toute la théorie repose sur ce que $\int U\,ds$ doit devenir un maximum entre des limites données. On trouve pour l'équation aux différences partielles

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = \left(\frac{dV}{ds} + U\right)^2; \quad T = -\frac{dV}{ds} - U;$$

où V est une fonction de x, y, z, s, renfermant trois constantes arbitraires h, a, b, et l'on trouve pour la figure cherchée

$$\varkappa = \frac{dV}{dh}, \quad \alpha = \frac{dV}{da}, \quad \beta = \frac{dV}{db},$$

$\varkappa$, α, β sont trois nouvelles constantes.

2°. La chaînette ordinaire.

3°. Les deux extrémités du fil sont attachées à un axe de rotation; la figure d'équilibre est telle, que le moment d'inertie du fil relativement à l'axe devient un maximum, elle est indépendante de la grandeur de la vitesse initiale; et on ramène l'intégrale à une fonction elliptique de troisième espèce. La figure est hélicoïde, se rapprochant et s'éloignant alternativement de l'axe.

4°. Lorsque le fil n'est pas libre; il est tenu de rester sur une surface donnée.

5°. Lorsque la surface donnée est de révolution.

6°. La chaînette sur la sphère.

7°. Fil sur une sphère tournant autour d'un diamètre.

8°. Fil mince doué d'élasticité, et dont la section transversale est si médiocre, qu'on peut négliger la résistance à la flexion.

9°. Fil mince soumis à la pesanteur.

Les deux derniers problèmes sont résolubles par des équations analogues à celles qu'on a trouvées pour les fils privés d'élasticité.

A. Clebsch (p. 149 à 168). *Sur l'équilibre des corps flottants.*

La plus ancienne théorie sur la stabilité des corps flottants est celle du *métacentre*. En supposant le corps infiniment peu dérangé de sa position, on cherche les conditions qui doivent être remplies pour que le corps manifeste des dispositions à revenir dans sa première position, et l'on regarde la position comme stable et seulement stable lorsque cette condition était remplie. Cette théorie a été critiquée et rectifiée par M. Duhamel (*Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XXIV). On pourrait signaler encore d'autres défauts de l'ancienne théorie; il peut se faire que le corps, dans le premier moment, ne soit pas ramené, augmente, s'écarte davantage et soit ramené par l'effet des pressions *hydrodynamiques* avant que les oscillations aient acquis une étendue appréciable. Dans ce cas le corps serait stable, contrairement à la règle du métacentre.

Abandonnant cette règle, on chercha les équations des oscillations du corps, et l'on s'approcha ainsi d'une solution plus rigoureuse; on trouve ces équations dans les traités de Poisson et de M. Duhamel. Toutefois ces équations sont fondées sur la supposition que, dans ces mouvements infiniment petits, on peut remplacer les pressions *hydrodynamiques,* celles qui résultent du mouvement du fluide, par les pressions *hydrostatiques* que le fluide exerce quand il est en repos. Il est vrai que ces deux sortes de pressions diffèrent de quantités infiniment petites, de l'ordre des vitesses; ce qui n'autorise pourtant pas à négliger les pressions hydrodynamiques; car dans le voisinage de l'équilibre les pressions hydrostatiques se détruisent mutuellement; mais il n'en est pas ainsi des pressions hydrodynamiques, car elles réagissent contre le mouvement du corps, et leurs effets sont du même ordre que l'effet *total* de la pression hydrostatique.

Il résulte de là que les équations de mouvement des corps flottants données jusqu'ici sont non-seulement inexactes, ne donnant au plus qu'une première approximation, mais sont complétement *fausses,* car elles négligent des termes de même ordre que ceux que l'on conserve.

M. Clebsch, et c'est le point principal de ce Mémoire, a égard aux termes négligés, et parvient, pour représenter le mouvement des corps, à une équation transcendante, par conséquent susceptible d'une infinité de formes, et la stabilité a lieu lorsque cette équation n'admet que des racines négatives. La difficulté du problème n'a pas permis de traiter à fond un cas spécial, et encore moins d'indiquer une règle générale simple.

Analyse.

C. W. Borchardt (p. 111 à 121). *Sur la représentation d'une résultante d'élimination correspondante à une représentation interpolatoire.*

Soit

$$\varphi(x) = 0$$

une fonction entière donnée par les valeurs

$$x = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

faisons

$$f(x) = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n),$$

on a

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\varphi\alpha_i}{f'\alpha_i}\frac{fx}{x - \alpha_i}$$

(théorème connu).

C'est ce développement de φx qui est la représentation *interpolatoire* de φx.

Le but de ce Mémoire est celui-ci :

Soient les deux fonctions algébriques entières de degré n

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = 0;$$

chacune de ces fonctions est donnée par les *valeurs* qu'elles prennent en faisant

$$z = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

c'est-à-dire qu'on donne $\varphi\alpha_i$, $\psi\alpha_i$, i prenant les valeurs depuis zéro jusqu'à n; l'élimination de z donne une *résul-*

tante fonction des coefficients qu'on trouve de ces fonctions, et ces coefficients sont des fonctions de $\varphi\alpha_i$, $\psi\alpha_i$; il s'agit d'établir *directement*, immédiatement cette résultante en fonctions de $\varphi(\alpha_i)$, $\psi(\alpha_i)$.

M. Cayley a démontré (*Nouvelles Annales*, t. XVIII, p. 397), que si l'on développe l'expression

$$\frac{\varphi(x)(\psi y) - \varphi y \,\psi x}{y - x} = \mathrm{F}(x, y),$$

suivant les puissances de x et de y, et $a_{ik}\, x^i\, y^k$ étant un terme général. Alors le déterminant D formé par les coefficients a_{ik} (i et k prennent les valeurs de o à n) donne la résultante. M. Borchardt suppose que les fonctions φx et $\psi(x)$ sont données sous forme interpolatoire

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\varphi\alpha_i}{f'\alpha_i} \frac{fx}{x - \alpha_i},$$

$$\psi x = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\psi\alpha_i}{f'\alpha_i} \frac{fx}{x - \alpha_i}.$$

Par d'admirables considérations sur un déterminant d'ordre $(n+1)^2$, le célèbre analyste parvient à trouver D en fonction de $\mathrm{F}(\alpha_i, \alpha_k)$; i et k prenant toutes les valeurs de o à n.

M. Rosenham a le premier traité cette importante question (Crelle, t. XXX), en supposant que $\varphi(z)$ est donné par les n valeurs $\varphi(\alpha_i)$ et $\psi(z)$ par les n autres valeurs $\psi(\beta_i)$; pour passer à la forme interpolatoire, il faut supposer que les α et les β coïncident, ce qui amène une grande complication, que M. Borchardt a évitée en abordant le problème directement. On apprécie l'utilité de ces recherches en considérant que dans les sciences physiques, les fonctions ne sont données que par leurs valeurs numériques.

C. W. Borchardt (p. 183 à 186). *Comparaison entre deux formes de la résultante d'élimination d'une inconnue entre deux équations.*

1°. Première méthode d'Euler :

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots$$
$$a_0 = a_m (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_m),$$
$$\varphi(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots$$
$$+ b_0 = b_m (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_m).$$

On forme le produit

$$P = \prod_{i=1}^{i=m} \prod_{k=1}^{k=n} (\beta_k - \alpha_i).$$

Désignant la résultante de l'élimination x entre $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ par R, on obtient

$$R = a_m^n b_n^m P$$

$$P = (-1)^{mn} a_m^n \varphi\alpha_1 \varphi\alpha_2 \ldots \varphi\alpha_m = b_n^m f\beta_1 f\beta_2 \ldots f\beta_m.$$

Pour avoir P, désignons par $\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ le produit $\alpha_k - \alpha_i$; on prend toujours $k > i$; Δ est connu en fonction des coefficients de $f(x)$.

Posons

$$A = \Delta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$
$$B = \Delta(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m).$$

$$D = \begin{vmatrix} 1, & \beta_1, & \beta_2^2, & \ldots, & \beta_2^{m+n-1} \\ 1, & \beta_1, & \beta_2^2, & \ldots, & \beta_2^{m+n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \beta_n, & \beta_2^2, & \ldots, & \beta_n^{m+n-1} \\ 1, & \alpha_1, & \alpha_1^2, & \ldots, & \alpha_1^{m+n-1} \\ 1, & \alpha_2, & \alpha_2^2, & \ldots, & \alpha_2^{m+n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & \alpha_n, & \alpha_n^2, & \ldots, & \alpha_n^{m+n-1} \end{vmatrix}$$

on aura $D = (-1)^{mn} ABP$, d'où $P = \frac{D}{AB}$.

2°. Deuxième méthode d'Euler; = celle de Bezout; = *dialytique* de Sylvester.

On élimine les puissances $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^{m+n-1}$ entre les $m+n$ équations

$$0 = fx; \quad 0 = xfx; \ldots, \quad 0 = x^{n-1} fx,$$
$$0 = \varphi x; \quad 0 = x\varphi x; \ldots, \quad 0 = x^{m-1} \varphi x,$$

et l'on obtient la résultante, au moyen du déterminant

$$\begin{array}{r|l|} T = 0 & a_0, \; a_1, \ldots, a_m, \quad 0.0, \ldots\ldots, 0 \\ 1 & 0 \quad a_0, \ldots, a_{m-1} \quad 0.0, \ldots\ldots, 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n-1 & 0 \quad 0, \ldots\ldots, \; 0.0\, a_0, a_1, \ldots, a_m \\ n & b_0, \; b_1, \ldots\ldots, b_{n-1}, b_n, 0, . \; , 0 \\ n+1 & 0_0, \; b_0, \ldots\ldots\ldots, b_{n-1}, b_n, 0, 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m+n-1 & 0 \ldots\ldots 0, \; b_0, \; b_1, \ldots\ldots b_n \end{array}$$

Les chiffres placés à gauche du premier trait indiquent les rangs des lignes horizontales.

Il faut démontrer l'*identité* T = R.

Multipliant, d'après la règle connue, les déterminants D et T, on obtient un nouveau déterminant, lequel étant développé donne

$$D.T = AB f\beta_1 f\beta_2 \ldots f\beta_n . \varphi\alpha_1 \varphi\alpha_2 \ldots \varphi\alpha_n$$

$$= (-1)^{mn} a^n_m\, b^m_n\, A.B.P^2;$$

d'où

$$T = a^n_m\, b^m_n\, P = R.$$

O. Hesse (à Heidelberg) (p. 175 à 182). *Nouvelles propriétés des substitutions linéaires qui transforment des fonctions homogènes du second degré en d'autres qui ne contiennent que les carrés des variables.*

M. Kummer est parvenu le premier à décomposer en carrés le carré du produit des différences des racines d'une équation cubique, problème d'où dépend la recherche des axes principaux d'une surface du second ordre (Crelle, t. XXVI, p. 268).

Ensuite M. Borchardt, à l'aide de la théorie des déterminants, est arrivé au même résultat, et l'a généralisé pour une fonction de degré n; ce qui fournit un moyen de calculer les perturbations planétaires (Crelle, t. XXX, p. 38).

Déjà Jacobi avait déduit le résultat Kummer de formules entièrement nouvelles (*Giornale Arcadico,* t. XLVIII), et (Crelle, t. XXX, p. 46); la dernière de ces formules est surtout importante; elle conduit à des propriétés nouvelles, but de ce Mémoire.

Soient X_1, $X_2, \ldots, X_n$, n variables liées aux n variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$ par les n équations linéaires

$$(1) \qquad X_\varkappa = a_1^{(\varkappa)} x_1 + a_2^{(\varkappa)} x_2 + \ldots + a_n^{(\varkappa)} x_n;$$

$\varkappa$ prenant successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, on en déduit

$$(2) \qquad x_\varkappa = e_1^{(\varkappa)} X_1 + e_2^{(\varkappa)} X_2 + \ldots + e_n^{(\varkappa)} X_n,$$

formons un nouveau système de n équations

$$(3) \qquad Y_\varkappa = e_1^{(\varkappa)} y_1 + e_2^{(\varkappa)} y_2 + \ldots + e_n^{(\varkappa)} y_n,$$

d'où l'on déduit

$$(4) \qquad y_\varkappa = a'_\varkappa Y_1 + a''_\varkappa Y_2 + \ldots + a_n^{(n)} Y_n,$$

et aussi l'identité

$$(5) \quad X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \; (*).$$

Si l'on élève les deux membres de l'équation (5) à la $n^{ième}$ puissance, et si l'on supprime de part et d'autre le produit continu $\prod(n) = 1.2.3\ldots n$, on obtient l'identité

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\sum \frac{1}{C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}} X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \ldots X_n^{\alpha_n} Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \ldots Y^{\alpha_n}, \\ = &\sum \frac{1}{C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha_n}, \end{aligned}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n,$$

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \prod(\alpha_1) \prod(\alpha_2) \ldots \prod(\alpha_n).$$

(*) Le lecteur peut vérifier en posant $n = 2$.

Remplaçons dans le produit $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha n}$, les y par des Y déduits de l'équation (4), et désignons dans ce développement le coefficient de $y_1 y_2 \ldots y_n$ par

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha n} \quad A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha n},$$

où $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha n}$ est une fonction rationnelle entière des a, et on laisse $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha}$.

Alors le coefficient de $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$ dans le premier membre est $X_1 X_2 \ldots X_n$.

Et dans le second membre $\sum A_{\alpha_1 \alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha n}$.

Donc

$$(8) \qquad X_1 X_2 \ldots X_n = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_2^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha n}.$$

De même si l'on développe $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha n}$ à l'aide de l'équation (3), et qu'on désigne par

$$C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} E_{\alpha_1 \alpha_1 \ldots \alpha_n},$$

les coefficients de $X_1 X_2 \ldots X_n$, où E est composé en e comme A en a, on aura

$$(9) \qquad Y_1 Y_2 Y_3 \ldots Y_n = \sum E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_n^{\alpha n}$$

Si l'on développe l'équation (7) suivant les puissances et les produits de x et y, et qu'on égale des deux côtés les coefficients de $X_1 X_2 \ldots X_n$ et de $Y_1 Y_2 \ldots Y_n$, on a

$$(10) \qquad 1 = \sum C_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} E_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n},$$

premier nouveau théorème, déduit des substitutions linéaires.

Si

$$X = Y,$$

alors

$$X^2 + X_1^2 + \ldots + X_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

et

$$(11) \qquad 1 = \sum C_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} (A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})^2,$$

second nouveau théorème, qui décompose l'unité en carrés.

M. O. Hesse donne encore d'autres belles propriétés, ainsi que les formules de Jacobi.

ORIGINE PREMIÈRE DES DÉTERMINANTS,

LEIBNIZ (1693).

Dans une Lettre de Leibniz à L'Hospital, datée de Hanover (*sic*) 28 avril 1693, et insérée dans le t. II, p. 238-241 des *Leibnizens mathematische Schriften*, édités par C.-I. Gerhardt, Berlin, 1850, on lit :

« Puisque vous dites que vous avés de la peine à croire qu'il soit aussi general et aussi commode de se servir des nombres que de lettres, il faut que je ne me sois pas bien expliqué. On ne sçaurait douter de la generalité en considerant qu'il est permis de se servir de 2, 3, etc., comme de *a* ou de *b*, pour veu qu'on considere que ce ne sont pas des nombres veritables. Ainsi 2.3 ne signifie point 6, mais autant qu'*ab*. Pour ce qui est de la commodité de l'epreuve par des nombres, et même par l'abjection du novenaire, j'y trouve un tres grand avantage même pour l'avancement de l'analyse. Comme c'est une ouverture assez extraordinaire, je n'en ay pas encore parlé à d'autres, mais voicy ce que c'est. Lorsqu'on a besoin de beaucoup de lettres, n'est-il pas vray que ces lettres n'expriment point les rapports qu'il y a entre les grandeurs qu'elles signifient, au lieu qu'en me servant des nombres je puis exprimer ce rapport. Par exemple soyent proposées trois equations simples pour deux inconnues à dessein d'oster ces deux inconnues, et cela par un canon general. Je suppose

(1) $$10 + 11x + 12y = 0$$

et

(2) $$20 + 21x + 22y = 0$$

et

(3) $$30 + 31x + 32y = 0,$$

ou le nombre feinst estant de deux characteres, la première me marque de quelle equation il est, le second me marque à quelle il appartient (*). Ainsi en calculant on trouve par tout des harmonies qui non seulement nous servent de garans, mais encore nous font entrevoir d'abord des règles ou théorèmes. Par exemple ostant pre-

---

(*) Ces équations d'après l'écriture actuelle sont

$$a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0,$$
$$a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0,$$
$$a_{30} + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0.$$

Éliminant x_1, x_2, on a le déterminant

$$[a_{10}\ a_{21}\ a_{32}] = 0$$

que trouve Leibniz ; il fait cette opération par la voie ordinaire des multiplications.

mierement y par la première et seconde equation, nous aurons

$$(4)\qquad \left.\begin{matrix} +\ 10.22 + 11.22x \\ -\ 12.20 - 12.21\ldots \end{matrix}\right\} = 0,$$

et par la première et troisième nous obtenons

$$(5)\qquad \left.\begin{matrix} +\ 10.32 + 11.32x \\ -\ 12.30 + 12.31\ldots \end{matrix}\right\} = 0,$$

où il est aisé de connoistre que ces deux équations ne different qu'en ce que le charactere antecedant 2 est changé au charactere antecedant 3. Du reste, dans un même terme d'une même equation les characteres antecedants sont les mêmes et les characteres posterieurs font une même somme.

» Il reste maintenant d'oster la lettre x par la quatrieme et cinquieme equation, et pour cet effect nous aurons

$$\left.\begin{matrix} 1_0\ 2_1.3_2 \\ 1_1.2_2.3_0 \\ 1_2.2_0.3_1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1_0\ 2_0.3_1 \\ 1_1.2_1.3_2 \\ 1_2\ 2_2.3_0 \end{matrix}\right. \quad (*)$$

qui est la dernière équation délivrée des deux inconnues qu'on voulait oster, et qui porte sa preuve par soy par les harmonies qui se remarquent par tout, et qu'on auroit bien de la peine à découvrir en employant des lettres a, b, c, surtout lors que le nombre des lettres et des equations est grand. Une partie des secrets de l'analyse consiste dans la caracteristique, c'est à dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert, et vous voyés, Monsieur, par ce petit echantillon, que Viete et Des Cartes n'en ont pas encore connu tous les mysteres En poursuivant tant soit peu ce calcul, on viendra à un theoreme *general*

(*) Ici Leibniz écrit le second caractère sous la forme actuelle d'indice.

pour quelque nombre de lettres et d'equations qu'on puisse prendre. Le voicy comme je l'ai trouvé autre fois :

» *Datis æquationibus quotcunque sufficientibus ad tollendas quantitates, quæ simplicem gradum non egrediuntur, pro æquatione prodeunte, primo sumandæ sunt omnes combinationes possibiles, quas ingreditur una tantum coefficiens uniuscujusque æquationis; secundo, eæ combinationes opposita habent signa, si in eodem æquationis prodeuntis latere ponantur, quæ habent tot coëfficientes communes, quot sunt unitates in numero quantitatum tollendarum unitate minuto; cæteræ habent eadem signa* (*).

» J'avoue que dans ce cas de degré simple on auroit peut estre decouvert le même theoreme en ne se servant que de lettres à l'ordinaire, mais non pas si aisement, et ces adresses sont encore bien plus necessaires pour découvrir des theoremes qui servent à oster les inconnues montées à des degrés plus hauts. Par exemple pour oster la lettre x par le moyen de deux equations dont l'une est de trois degrés et l'autre de deux, je suppose

$$10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = 0$$

et

$$20x^2 + 21x + 22 = 0,$$

où le caractere anterieur du coefficient marque le degré dont il est coefficient, en remplissant la loi des homogenes (**), ce qui sert à les observer dans tout le pro-

(*) Tous les termes étant dans le même membre, le nombre des inconnues étant n, les termes qui ont en commun $n-2$ coefficients ont des signes opposés et les autres ont même signe.

(**) Cela revient à

$$a_{10}x^3 + a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13} = 0,$$
$$a_{20}x^2 + a_{21}x + a_{22} = 0;$$

la somme des indices et des exposants est toujours 4.

grès de l'opération. Dans les equations plus hautes, pour mieux s'assurer du calcul, on peut au lieu du dernier terme prendre un nombre tel que l'équation donneroit en prenant x pour l'unité ou pour quelque nombre veritable, par exemple au lieu de

$$10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = 0,$$

on pourroit ecrire

$$10x^3 + 11x^2 + 12x - 11220;$$

prenant x pour 10, pourveu qu'on se souvienne que 11220 signifie un solide ou une grandeur de trois dimensions (*); ainsi le calcul se verifiera toujours en nombres veritables et se pourra même examiner à tout moment par l'abjection du novenaire, ou de l'ondenaire, et neantmoins les harmonies paroistront par tout substituant 13 pour 11220. En calculant ainsi on trouvera des theoremes et on dressera les tables que j'ay souhaittées. On voit aussi par là une chose que j'ai indiquée dejà dans les occasions, c'est que la perfection de l'analyse depend de l'art des combinaisons qui est proprement la specieuse generale (**). »

La réponse de l'Hospital est datée de Paris, 15 juin 1693 :

« C'est avec un plaisir sensible, Monsieur, que je reçois vos lettres, j'y trouve toujours des vûes nouvelles auxquelles personne n'avoit encore pensé. La manière

---

(*) Prenant

$$x = a_{10},$$

on prend pour terme tout connu

$$a^4_{10} + a_{11}a^2_0 + a_{12}a_0.$$

(**) *Spécieuse* dans le sens de Viète, et signifie la représentation figurée de quantités.

dont vous vous servez des nombres au lieu de lettres dans les equations pour en tirer ensuite des regles ou théoremes est tres ingenieuse, et comme l'analyse n'est que l'art d'abbreger les raisonnements et de representer tout d'une vûe à l'esprit ce qu'il ne pourrait appercevoir autrement que par un long circuit, il est certain que les caracteristiques en font la principale partie. Je ne doute pas que celle dont vous vous servez pour exprimer la situation des angles et des lignes, et que vous appellez *caracteristica situs*, ne contienne quelque chose de tres beau et de tres utile. Vous m'en eclaircirez davantage quand vous le jugerez à propos; je crois avoir ouï dire que vous aviez aussi imaginé une espece de caracteristique pour servir à composer des machines de mecanique, cela peut estre d'un grand usage dans cette science qui n'est pas encore arrivée à la perfection (*). »

Ainsi l'origine des déterminants remonte à 1693 (**); c'est un nouveau bijou dans le splendide écrin immensément riche de l'auteur de la hiérarchie et de la caractéristique infinitésimales. Il a découvert non-seulement les déterminants de Cramer (1750), mais ce qui encore est plus essentiel, la caractéristique de Vandermonde (1772); l'admiration est au comble quand on entend l'illustre prophète proclamer, deux siècles d'avance, la haute position de cette caractéristique combinatoire dans toute l'analyse, position qui n'a été révélée que de nos jours.

Si l'on me demandait quelle est l'intelligence la plus intense en profondeur, la plus universelle en directions,

---

(*) Se trouve dans une lettre à Huyghens datée de Hanovre, 8 septembre 1679 (GERHARDT, t. II, p. 20). M. Babbage a inventé quelque chose d'analogue pour les machines.

(**) Date malheureusement trop mnémonique.

dont Dieu ait gratifié la terre, depuis l'apparition de l'homme, je répondrais, sans hésiter : Leibniz.

Les esprits sérieux, amis des fortes méditations, doivent une vive reconnaissance à MM. George Henri Perthes, C.-I. Gerhardt et à notre compatriote le comte Foucher de Careil. Il est à désirer qu'on voulût bien pour la partie mathématique consulter quelque géomètre *lettré*. Lorsque dans ce siècle *utilitaire* on rencontre un homme vouant à la science *abstraite* ses veilles, sa fortune, c'est découvrir inopinément une source vivifiante au milieu d'un Sahara; nouvelle gloire que la France peut ajouter à tant d'autres.

Inter scabiem tantam et contagia lucri
Nil parvum sapit et semper sublimia curat.

(Horat, *Epist.* xii, lib. I, ad Iccium.)

BIBLIOGRAPHIE.

Sulla geometria analitica delle linee piane. Opuscolo di *Giuseppe Sacchi*, dottore in matematica. Pavia, 1854; in-8 de viii-131 pages; 1 planche lithographiée.

En 1850, le célèbre Bordoni, dont la science déplore la perte récente (*), après quarante années de service universitaire prit sa retraite, et M. Sacchi le remplaça comme *suppléant* dans la chaire de Géodésie et d'Hydro-

(*) Le 26 mars 1860. Il a appliqué le calcul des probabilités aux examens universitaires. Nous ferons connaître ce Mémoire, si nous parvenons à nous le procurer. Jouissant d'une haute réputation au delà des Alpes, il est complétement inconnu en deçà. L'abbé Julien est le premier et le seul géomètre français qui l'ait cité dans ses excellents *Problèmes de Mécanique rationnelle*.

métrie. Il fit ce cours pendant huit années et enrichit la collection d'instruments appropriés à ce cours. Deux fois Bordoni le proposa au gouvernement autrichien pour être nommé *définitivement;* mais s'étant attiré l'animadversion de ce gouvernement, il fut éloigné de Pavie et on le nomma professeur au lycée dit de *Porte-Neuve* à Milan, dont le directeur était *commissaire de police*. Occupant encore la même position, il est permis d'espérer que sous le régime actuel on réparera cette longue injustice, et qu'on replacera M. Sacchi à l'université de Pavie, position où l'appellent ses talents et qui est aussi dans l'intérêt de l'enseignement. L'analyse suivante est une pièce justificative.

Beaucoup de systèmes de coordonnées ont maintenant cours dans l'enseignement. Pour chaque question, il faut savoir discerner le système qui facilite la solution. Souvent même il convient d'imaginer un système approprié à la question. Lorsqu'une fonction représente une ligne sur une surface donnée et que la même fonction représente une ligne sur une autre surface donnée, mais ces coordonnées ayant une signification différente, alors beaucoup de propriétés d'une de ces lignes peuvent se transporter sur l'autre. Ainsi la fonction $ay + bx + c$ représente une droite sur un plan et un cercle sur une sphère, mais les coordonnées étant des fonctions transcendantes des tangentes d'arcs, les propriétés des droites sur un plan sont transférées sur les cercles de la sphère, conception de Gudermann qui a ramené la sphérométrie à la géométrie plane (*). Découvrir de semblables connexions à l'aide d'autres fonctions transcendantes pour chaque surface, est la besogne de l'avenir.

On peut aussi imaginer un système de coordonnées et réunir une suite de problèmes, comme applications. C'est

(*) *Voir* dans les *Nouvelles Annales* les travaux instructifs de M. Vannson.

ce qu'a exécuté avec talent le savant auteur de cet opuscule, titre modeste qui tient plus qu'il ne promet.

Soit AMB un arc de courbe plane; d'un point fixe O, considéré comme pôle, on abaisse une perpendiculaire OP sur la tangente à la courbe menée au point M; on prend pour *coordonnées* OP et le rayon vecteur OM; l'équation d'une ligne est une relation entre ces deux lignes, et l'auteur établit quinze relations fondamentales qui facilitent l'emploi du système. L'utilité de ce système ressortit surabondamment des applications suivantes, qui en montrent la fécondité et très-souvent l'élégance.

Soit OA un axe polaire (A est sur la courbe); OT une perpendiculaire à OM et terminée à la tangente en M, de sorte que T est sur la tangente. Prolongeons la perpendiculaire TO jusqu'à ce qu'elle rencontre en N la normale menée en M et qui est parallèle à OP.

Notations.

$$\mathrm{OP} = p, \qquad \mathrm{MP} = q, \qquad \mathrm{OM} = r,$$
$$\mathrm{POT} = \alpha, \quad \mathrm{TMO} = \beta, \quad \mathrm{MOA} = \omega,$$
$$\mathrm{MN} = \mathrm{N}, \quad \mathrm{MT} = \mathrm{T},$$

R = rayon de courbure en M,
s = l'arc AM,
A = aire du secteur AOM;

les accents désignent des dérivées par rapport à une variable quelconque, à moins qu'on ne la dénomme expressément. On a

$$\text{(I)} \qquad r^2 = p^2 + q^2,$$

$$\text{(II)} \qquad p = r\sin\beta, \quad q = r\cos\beta,$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} \mathrm{N} = \dfrac{r^2}{p}, & \mathrm{T} = \dfrac{r^2}{q}, \\[2ex] \mathrm{ON} = \dfrac{rq}{p}, & \mathrm{OT} = \dfrac{rp}{q}, \end{cases}$$

(IV) $\quad \operatorname{tang} \beta = r \frac{\omega'}{r'},$

(V) $\quad \frac{r'}{\omega'} = \frac{dr}{d\omega} = \frac{rq}{p},$

(VI) $\quad \frac{dp}{d\alpha} = q,$

(VII) $\quad p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}},$

(VIII) $\quad \mathrm{R} = \frac{rdr}{dp}$ (rayon de courbure),

(IX) $\quad \frac{dq}{d\alpha} = \mathrm{R} - p,$

(X) $\quad s' = \omega' \frac{r^2}{p},$

(XI) $\quad s' = r' \frac{r}{q},$

(XII) $\quad \frac{ds}{d\alpha} = \mathrm{R},$

(XIII) $\quad \frac{ds}{d\alpha} = p + \frac{aq}{d\alpha},$

(XIV) $\quad 2\mathrm{A}' = p \frac{rr'}{q} = ps',$

(XV) $\quad 2 \frac{d\mathrm{A}}{d\alpha} = p\mathrm{R}.$

Au moyen de ces formules, on passe des coordonnées polaires ordinaires aux nouvelles coordonnées et *vice versâ*.

I^er^ Exemple. *Cercle* : $r^2 - 2dr\cos\omega + d^2 - a^2 = 0$; équation

$$\frac{dr}{d\omega}(r - d\cos\omega) = dr\sin\omega,$$

$$q\,(r - d\cos\omega) = pd\sin\omega,$$

$$(r^2 - p^2)(r - d\cos\omega)^2 = p^2 d^2 (1 - \cos^2\omega).$$

Eliminant $\cos\omega$, il vient pour équation en nouvelles coordonnées

$$2ap = r^2 + a^2 - d^2.$$

II^e Exemple. *Ellipse* : $2a$, $2b$ axes ; $2a$ = arc polaire ; d = distance du centre à l'origine ; $e^2 = a^2 - b^2$;

$$r^2(e^2\cos^2\omega - a^2) + 2b^2 dr\cos\omega + b^2(a^2 - d^2) = 0,$$

équation polaire.

On en déduit

$$e^2p^2(2adl - e^2r^2 - c^2m^2) = b^2(am^2 - dl)^2,$$

$$m^2 = d^2 - e^2, \quad c^2 = a^2 + b^2, \quad l^2 = e^2r^2 + m^2b^2.$$

III^e Exemple.

(c_1) $$4a\cos^2\omega + r\cos\omega - 4a = 0, \quad \text{cissoïde},$$

(c_2) $$2a\cos^2\omega + r\cos\omega + 2a = 0,$$

(c_3) $$(r^2 + a^2)\cos\omega - ar\omega = 0, \quad \text{strophoïde}$$

en nouvelles coordonnées sont exprimées par les équations

(c_1) $$g^2p^4(3r^2 + 4g^2) + 2p^2r^4(2r^2 + 3g^2) - g^2r^6 = 0,$$

$$g = 4a,$$

(c_2) $$\left\{\begin{aligned} &g^2p^4(5r^4 - 8g^2r^2 + 4g^4) \\ &- 2p^2r^4(2r^4 - 3r^2r^2 + 2g^4) + g^2r^8 = 0, \end{aligned}\right.$$

$$g = 2a,$$

(c_3) $$p^2(r^4 + 6a^2r^2 + a^4) = 4a^2r^4.$$

IV^e Exemple.

$$r^m = a^m\omega, \quad \text{d'où} \quad p^2(m^2r^{2m} + a^{2m}) = m^2r^{2m+2}.$$

$m = 1$, spirale d'Archimède ;

$m = 2$, spirale parabolique ;

$m = -1$, spirale hyperbolique;
$m = -2$, trombe;

$r = ae^{n\omega}$, $p = \frac{r}{\sqrt{1+n^2}}$, spirale logarithmique.

$$(f) \quad \begin{cases} (r-b)^m = a^m \cos n\omega, \\ p^2[m^2p^2(r-b)^{2m-2} + n^2a^{2m} - n^2(r-b)^{2m}] \\ \qquad = m^2r^4(r-b)^{2m-2}; \end{cases}$$

$m = -1$, $n = 1$, conchoïde de Nicomède,
$m = n = 1$.

Remplaçant a et b par $2a$, $2b$, on obtient

$$4p^2(br + a^2 - b^2) = r^4,$$

conchoïde circulaire.

Faisant

$$2b = a,$$

on a le limaçon de Pascal, et

$$b = a, \quad 4ap^2 = r^3, \quad \text{cardioïde.}$$

Faisant dans (f)

$b = 0$, $m = -1$, spirale de Cotes,
$b = 0$, $m = 1$ rhodoracées de Grandi,

$$r^{2m} - 2r^m(b^m - a^m \cos m\omega) + e^{2m} = 0,$$

$$(g)\ 4p^2r^{2m-2}[b^mr^{2m} + r^m(a^{2m} - b^{2m} - e^{2m}) + b^me^{2m}] = (r^{2m} - e^{2m})^2.$$

$m = 1$, ovales de Descartes ou *aplanétiques;*
Propriété fondamentale $r + nr_1 = h$;
r et r_1 distance d'un point à deux foyers;
n, h constantes.
$m = 1$, $e = 0$, conchoïde circulaire;
$m = 1$, $e = 0$, $b = a$, cardioïde;

$a = b$, $e = 0$, $n = \pm 1$, conique.

Posant

$$b = 0, \quad e^{2m} \pm a^{2m} - c^{2m},$$

il vient

$$(g_3) \qquad 2c^m p r^{m-1} = r^{2m} + c^{2m} - a^{2m},$$

m entier positif; c'est le lieu d'un point dont le produit de ses distances aux sommets d'un polygone régulier de m côtés est constant. a est le rayon du cercle circonscrit au polygone, et l'origine est au centre de ce cercle; le produit constant est c^m. Si m est négatif, l'équation est celle du lieu d'un point dont le produit des distances aux sommets d'un polygone régulier de m côtés est égal à la $m^{ième}$ puissance de la distance de ce point au centre du cercle circonscrit au polygone régulier : cassinienne à m foyers.

$m = 2$, ellipse cassinienne;

Si $c = a$, $m = 1$, lemniscate de Bernoulli;

$m = -1$ une droite;

$m = -2$, l'hyperbole équilatère;

$m = \frac{1}{2}$, cardioïde;

$m = -\frac{1}{2}$, parabole;

$m = 0$, spirale logarithmique;

$m = \frac{1}{3}$, lieu du sommet d'une parabole touchant le cercle de rayon $4a$ et ayant pour origine le foyer, point fixe placé sur la circonférence;

$m = -\frac{1}{3}$, caustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe;

$m = \frac{2}{3}$, podaire du centre de la lemniscate.

Équation de l'épitrochoïde.

$$(h)\qquad \left\{\begin{array}{l} 4mp^2\,[r^2 - a^2 + (m-1)c^2] \\ = [(m-1)\,r^2 - a^2 + (m-1)\,c^2]^2. \end{array}\right.$$

$a =$ rayon du cercle fixe;

$b =$ rayon du cercle se mouvant extérieurement sur le cercle fixe;

$m = \dfrac{a+b}{b}$, $c^2 = d^2 - b^2$, distance du point décrivant M au centre du cercle mobile, l'origine est au centre du cercle fixe.

On parvient à cette équation directement, en considérant que N étant le point de contact des deux cercles correspondant à une position donnée du point M, MN est une normale à la courbe de cercle.

Changeant b en $-b$, on a l'équation de l'*hypotrochoïde,* cercle mobile intérieur.

Faisant

$$a = b, \quad m = 2,$$

on a une conchoïde circulaire dont l'origine est au centre du cercle.

Si $d = b$, on a les épicycloïdes.

Le chapitre IV traite des asymptotes, rayons de courbure, points d'inflexion, de rebroussement.

$$\text{Sous-tangente} = \frac{p}{\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{r^2}}};$$

si donc pour $r = \pm\infty$, p a une valeur finie réelle, il y a des branches infinies.

Dans les coniques

$$R = \frac{a^2 b^2}{p^3}, \text{ origine au centre.}$$

Dans l'hyperbole équilatère

$$R + N = 0.$$

Dans la strophoïde (c_3)

$$R = \frac{1}{4a^3} \frac{(r^4 + 6a^2r^2 + a^4)^{\frac{3}{2}}}{3r^2 + a^2}.$$

Ainsi cette ligne n'a ni points d'inflexion ni points de rebroussement.

Le chapitre V traite des développées, développantes, trajectoires.

Soient r, p, q, α (*voir* ci-dessus) les quantités relatives à un point d'une courbe donnée; r_1, p_1, q_1, α_1 les quantités correspondantes au point de la développée, on a (*voir* ci-dessus)

$$p_1 = q, \quad \alpha_1 - \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{dp_1}{d\alpha_1} = \frac{dq}{d\alpha}, \quad q_1 = R - p,$$

et, à l'aide des relations (I) et (VIII),

$$(1) \qquad p_1^2 = r^2 - p^2, \quad r_1^2 = r^2 + r^2\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - 2pr\frac{dr}{dp}.$$

Eliminant r et p, on obtient l'équation de la développée en r_1 et p_1;

Eliminant p_1, r_1, on obtient l'équation de la développante.

Exemples :

$$p = mr, \text{ spirale};$$

$$p_1 = mr_1, \text{ développée};$$

si l'on a

$$4mp^2 = (m+1)^2(r^2 - a^2), \text{ épicycloïde},$$

on obtient

$$4mp_1^2 = (m+1)^2\left[r_1^2 - \left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 a^2\right],$$

développée, seconde épicycloïde;

$$\frac{m-1}{m+1}a = a_1, \quad \frac{m-1}{m+1}b = b_1,$$

rayons du cercle fixe et du rayon mobile.

Si donc

$$a = \infty, \quad a_1 = a, \quad b_1 = b,$$

la développée est une cycloïde égale à la cycloïde développante; de même pour la spirale logarithmique.

Trajectoires.

Soit l'équation d'une ligne

$$\varphi(r_1, p_1) = 0;$$

faisons-la tourner dans son plan autour de son origine O et soit

$$\varphi(r, p) = 0$$

l'équation de la trajectoire qui coupe ces lignes sous un angle constant dont le sinus est égal à m. On a, d'après un théorème projectif,

$$p_1 = p\sqrt{1-m^2} + qm;$$

p et q ont même signification que ci-dessus; d'où

$$p_1^2 + p^2 = m^2 r^2 + 2pp_1\sqrt{1-m^2}.$$

Exemples :

$$p_1 = 0,$$

faisceau de droites passant par l'origine; la trajectoire est

$p = mr$, spirale logarithmique;

$$p_1 = r,$$

faisceau de cercles concentriques; trajectoire

$$p = r\sqrt{1 - m^2}, \text{ spirale logarithmique;}$$

$$p_1^2 = \frac{r^4}{r^2 + a^2},$$

faisceau de spirales d'Archimède; trajectoire

$$p^2(a^2 + r^2) = r^2\left(ma + r\sqrt{1 - m^2}\right), \text{ spirale logarithmique.}$$

Si

$$m = 1,$$

on a

$$p_1^2 + p^2 = r^2$$

ou

$$p_1 = q.$$

$mr_1 + nr_2 = a$, ovales de Descartes;
r_1, r_2 rayons vecteurs allant à deux points fixes;
a paramètre variable.
L'équation de la trajectoire *orthogonale* est

$$\tang^m \frac{1}{2}\omega_1 \tang^n \frac{1}{2}\omega_2 = k$$

(pour ω *voir* ci-dessus).
Si

$$m = \pm n,$$

l'ovale devient une conique et la trajectoire une conique confocale.

Note. Nous venons de recevoir les Mémoires de Bordoni, ainsi que les Manuels anglais publiés par les Rév. Galbraith et Haughton; on en rendra compte.

Traité de Perspective-relief, par M. *Poudra*; in-8 de 224 pages; 1860.

La perspective-relief est une application nouvelle de la géométrie. Cette science s'adresse à tous les arts d'imitation. L'ouvrage a reçu de l'Académie des Sciences un accueil favorable; l'auteur a cru devoir en conséquence placer en titre, comme introduction, le Rapport instructif fait à cette Académie par deux de ses membres, MM. Poncelet et Chasles.

Les sculpteurs y trouveront des principes extrêmement simples pour la construction des bas-reliefs; tout est ramené à la construction de trois perspectives planes sur les faces du parallélipipède qui doit contenir le bas-relief.

Les géomètres y trouveront les formules qui servent à payer des coordonnées d'un point à ceux du point homologue.

On y expose ensuite les principes sur lesquels repose le tracé des décorations théâtrales; ces constructions sont un résultat de l'alliance de la perspective plane à la perspective-relief. Ces principes n'avaient jamais été exposés et ne pouvaient l'être avant que cette dernière science fût connue. On en tire quelques applications aux dioramas et panoramas et aux décorations dans les fêtes publiques.

Comme application à l'architecture, on y expose une théorie des apparences donnant une appréciation des causes diverses des illusions de la vue; l'auteur en déduit quelques principes sur la décoration des monuments et sur la position à leur donner pour rendre leur apparence agréable à la vue; il appelle l'attention des architectes sur ce sujet, qui peut faire éviter des erreurs de construction toujours fort dispendieuses à réparer.

Des applications de la perspective-relief à la décoration des parcs et jardins terminent l'ouvrage (voir *Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 107).

NOTE SUR UN OUVRAGE DE JEAN CEVA

(voir Nouvelles Annales, t. X, p. 184) ;

Par M. GENOCCHI.

Ayant passé quelques semaines à Plaisance, il y a plusieurs années, j'ai trouvé dans la bibliothèque communale de cette ville un exemplaire de l'ouvrage en question. Je transcris le frontispice: *De re numaria quoad fieri potuit geometrice tractata. Ad illustrissimos et excellentissimos Dominos Præsidem Quæstoresque hujus arciducalis Cæsari magistratus Mantuæ. Auctore Joanne Ceva. Mantuæ, apud Albertum Pazzanum. Impress. Arciduc., superioribus annuentibus. MDCCXI.* C'est un volume de 64 pages petit in-8°. Après la dédicace il y a un second titre qui explique mieux le but de l'ouvrage, savoir : *De monetis, quibus de causis valores immutentur, quidve curandum, ut publico indemnitati consulatur.* Ainsi le sujet est tout à fait du domaine de l'économie publique, et me semble traité d'une manière remarquable pour son temps. On y trouve des détails intéressants sur le taux des monnaies à Mantoue, à Milan, à Venise, sur les frais de fabrication, sur la valeur de l'or et de l'argent. Le rapport de l'argent à l'or était, dix ans auparavant, de 1 à 13, et s'était réduit alors à celui de 1 à $13\frac{1}{2}$. L'auteur veut bien que le souverain tire un profit de la fabrication des monnaies, *dum id honesti limites non transeat.* Il propose qu'on ferme l'entrée aux monnaies de cuivre étrangères, et que les autres monnaies des pays étrangers et surtout des pays limitrophes soient reçues seulement pour leur valeur intrinsèque, en exceptant toutefois les plus communes; il conseille de borner au nécessaire la fabrication des monnaies de cuivre, et qu'à l'exception de ces petites monnaies, sous, demi-sous, etc., dont la valeur normale sert à évaluer toutes les autres, on s'abstienne de donner aux monnaies un nom de leur valeur et exprimant une somme fixée de livres ou de sous. Il débute par des *définitions*, *pétitions*, *solutions;* puis viennent des *théorèmes*, des *corollaires*, des *problèmes :* il démontre, par exemple, que la valeur intrinsèque des monnaies est en raison composée directe de la population et inverse de la quantité d'argent monnayé, en prenant un terme moyen comme on démontre en géométrie que l'aire d'un rectangle est en raison composée de la base et de la hauteur.

NOTE SUR LE CENTRE SPONTANÉ DE ROTATION.

Ce point, qui occupe une si grande place dans la géométrie et dans la mécanique, a été signalé et dénommé par Jean Bernoulli :

Voco spontaneum, *quia a natura sponte quasi eligitur, pro diversitate circumstantiarum; ita ut non sit in potestate nostra illud ponere pro libitu* (*Opera omnia*, t. IV, p. 268).

On trouve ce passage dans le n° CLXXVII, qui porte pour titre *Propositiones variæ mechanico-dynamicæ.*

Ces propositions sont au nombre de cinquante-neuf et méritent encore de fixer l'attention aujourd'hui, elles renferment ce qu'on a écrit de plus clair, de plus philosophique sur le mouvement de rotation et sur la question connexe des forces vives; en général, tout ce qu'il a écrit

est utile à lire et à méditer. Ce n'est pas seulement un géomètre, c'est un savant et, qui plus est, un penseur: le charme de telles lectures rend fort ennuyeuses grand nombre d'autres lectures.

MOYEN HYDRODYNAMIQUE POUR TROUVER L'AIRE D'UN CERCLE;

D'APRÈS MAUROLYCUS.

On construit: 1° un cylindre *creux*, ayant pour base le cercle et pour arête le diamètre de ce cercle; 2° un cube *creux*, ayant pour côté ce même diamètre. On place les deux corps par leurs bases, sur un plan horizontal, bien nivelé; ensuite, après avoir rempli d'eau complétement le cylindre, on verse cette eau dans le cube, qui ne sera pas rempli complétement. Multipliant la hauteur qu'atteint l'eau dans le cube par le côté du cube, on a l'aire du cercle servant de base au cylindre (*). On trouve ce procédé dans la traduction d'Archimède, par Maurolycus, éditée par Cyllennius, Hesperius. Palerme, 1685.

On y indique aussi le moyen de trouver le centre de gravité d'une surface plane, en la suspendant à un fil à deux points différents, moyen qui est aujourd'hui indiqué dans tous les Traités de Statique.

On lit ce qui précède dans l'ouvrage suivant:

Admirandi Archimedis monumenta omnia mathematica quæ extant, quorumque catalogum inversa pagina demontrat. Ex traditione doctissimi viri D. Francisci Maurolyci, nobilis Siculi abbatis Sanctæ Mariæ a Partu. Opus præclarissimun, nunc prius typis commissum, a ma-

(*) On n'insérera pas de démonstration.

theseos vero studiosis enixe desideratum, tandemque e fuligine temporum accurate excussum. Ad illustr. et religiosissimum virum Fr. Simonem Rondinelli, Sac. Hierosolymitanæ Religionis Equitem laudatiss. S. Joannis Baptistæ a Savigliana, nec non Poudade a et S. Philippi de Osmo Commendatorem digniss. Unius e Melitensibus triremibus olim strenuissimum ductorem, plurimarumque navium Turcicarum debellatorem gloriosum, in urbe feliciss. Panormo pro sua sac. relig. pluribus annis vigilantiss. Legatum, Receptorum ac Procuratorem generalem, et inclytæ Reaccensorum Academiæ Orbe in ipsa eruditissimum principem Panormi. Apud D. Cyllennium Hesperium, cum lic. sup. MDCXXXV. Sumpt. Antonini Giardinæ bibliopolæ Panorm. Fol. IV. 296 pages.

Maurolycus (François), né à Messine en 1494, d'une famille originaire grecque de Fanariote, est mort le 21 juillet 1575. Grand géomètre, il se mêlait, à ce qu'il paraît, d'astrologie. Don Juan l'ayant consulté, il lui prédit, à ce qu'on prétend, la victoire de Lépante.

« Les plus grands hommes demeurent toujours enfants par quelque endroit: Ceux mêmes qui ont reconnu l'illusion de ces présages en ont substitué encore d'autres plus ridicules à ceux qu'ils ont rejetés. Il semble que l'esprit humain ne puisse se défaire d'une folie, qu'en la remplaçant par une nouvelle, et que toute la perfection se trouve à changer seulement d'erreurs. » (La Motte, *OEuvres*, t. III, 1714, p. 26.)

En 1714 La Motte a écrit l'histoire de notre temps. Extravagances pour extravagances, aux charlatans *hypnomanciens*, nécroscopes, aux esprits frappeurs, médiums, etc, je préfère les horoscopes, les œuvres hermétiques, qui au moins ont été utiles aux sciences.

TRACÉ DES CARTES GÉOGRAPHIQUES.

DISCOURS PRONONCÉ LE 8 FÉVRIER 1856
A LA SÉANCE ANNUELLE DE L'UNIVERSITÉ IMPÉRIALE DE SAINT-PÉTERSBOURG,

PAR P. TCHÉBYCHEF (*).

Messieurs,

Les sciences mathématiques, dès la plus haute antiquité, ont attiré l'attention d'une manière spéciale; de nos jours elles ont acquis encore plus d'intérêt par leur influence sur les arts et l'industrie. Le rapprochement de la théorie avec la pratique donne de très-heureux résultats, et la pratique n'y gagne pas seule; les sciences elles-mêmes se développent sous son influence : elle fait découvrir des objets nouveaux de recherches ou des faces nouvelles dans les sujets connus depuis longtemps.

Malgré le haut degré de développement auquel sont parvenues les sciences mathématiques par les travaux des grands géomètres des trois derniers siècles, la pratique dévoile clairement leur imperfection sous beaucoup de rapports; elle pose des questions essentiellement neuves pour la science, et provoque ainsi la recherche de méthodes entièrement nouvelles. Si la théorie gagne beaucoup aux nouvelles applications d'une vieille méthode ou à ses nouveaux développements, elle doit encore acquérir davantage par la découverte de nouvelles méthodes, et dans ce cas la pratique est pour la science un guide sûr.

(*) Traduit du russe par M. Mention.

L'activité pratique de l'homme offre une extrême diversité, et pour en satisfaire toutes les exigences, le défaut de méthodes nombreuses et variées se fait sentir dans la science. Une importance particulière s'attache aux méthodes que nécessite la solution des aspects divers d'un même problème général, savoir : *Comment disposer de ressources données pour en retirer le plus grand profit possible?*

La solution des problèmes de ce genre constitue l'objet appelé *théorie des maximums et minimums.* D'un caractère purement pratique, ces problèmes ont une importance particulière pour la théorie; ils se rencontrent dans toutes les lois déterminant le mouvement de la matière, soit pondérable, soit impondérable. Il est impossible de ne pas reconnaître leur influence salutaire sur le développement des sciences mathématiques.

Jusqu'à l'invention de l'analyse infinitésimale, on ne possédait que des cas particuliers de la solution de pareils problèmes; mais ces solutions renfermaient déjà le germe de la nouvelle et si importante branche des mathématiques, connue sous le nom de *Calcul différentiel.* Pour montrer l'influence des questions *de maximum et de minimum* sur cette découverte, je rapporterai ici le passage du célèbre ouvrage de Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica,* où il parle de l'origine d'une découverte, dont les applications et les résultats sont aujourd'hui innombrables :

«Il y a dix ans (en 1677), quand je correspondais avec le très-savant géomètre Leibnitz, je lui écrivis que j'avais une méthode pour la détermination des *maxima* et *minima*, pour mener les tangentes et résoudre d'autres questions analogues, et que cette méthode pouvait être employée avec la même facilité pour les équations tant irrationnelles que rationnelles. Je cachai alors ma méthode sous des lettres transposées, dont le sens était le suivant : « Une » équation renfermant un nombre quelconque de quanti- » tés fluentes, trouver la fluxion et réciproquement. » A quoi l'illustre Leibnitz répondit que, de son côté, il avait trouvé une méthode semblable, et il me la communiqua dans sa lettre même. Cette méthode se distinguait de la mienne seulement par la dénomination et la notation. » (Remarques sur la 7ᵉ proposition du 2ᵉ livre, édition de 1713.)

Mais la découverte du calcul différentiel et la solution de problèmes analogues à ceux qui y avaient conduit, n'épuisaient pas complétement le sujet; les recherches de Newton lui-même le manifestèrent : la question, qu'il résolut, de déterminer la forme d'un corps qui, se mouvant dans un fluide, rencontre la moindre résistance, offrit un problème de *maxima* et *minima*, essentiellement distinct de ceux pour lesquels on avait employé le calcul différentiel. La méthode générale pour résoudre les problèmes de ce genre, important surtout en mécanique analytique, conduisit encore à la découverte d'un nouveau calcul, connu sous le nom de *Calcul des variations*.

Malgré un tel développement des mathématiques, relatif à la théorie des *maximums* et *minimums*, il est aisé de remarquer que la pratique va plus loin, et exige la solution de problèmes sur les *maxima* et *minima*, encore d'un nouveau genre, essentiellement distinct de ceux qui ont recours aux calculs différentiel et des variations.

Comme exemple de semblables questions et de leur résolution, nous pouvons présenter nos recherches sur le *parallélogramme de Watt*, imprimées dans les *Mémoires des Savants étrangers* de notre Académie pour 1854. Par les résultats auxquels nous sommes parvenu, en examinant la méthode nécessaire pour déterminer la meilleure construction des mécanismes de cette espèce, on voit que dans ce cas les questions pratiques conduisent à beaucoup de résultats théoriques intéressants pour la science; que, des méthodes provoquées d'abord par la pratique, découle le moyen de résoudre de nouvelles questions théoriques, intéressantes même indépendamment de leur signification pratique (*).

Le tracé des cartes géographiques offre un autre exemple, particulièrement remarquable, de questions de ce genre. Dans l'état actuel de la théorie des cartes géogra-

---

(*) Ainsi nous trouvons ici, entre autres choses, la solution de la question suivante : « Une fonction entière

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^m + \ldots + H$$

variant nécessairement avec x, quel sera le moindre degré de sa variabilité? » Et ensuite : « Par quelles valeurs de A, B, C,..., H atteint-elle cette limite? » La solution de ce problème fournit beaucoup d'intéressants résultats d'algèbre supérieure. Par exemple :

1°. Si l'on a l'équation

$$f(x) = x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + H = 0,$$

alors entre les limites h et $h \pm 4\sqrt[n]{\frac{\pm f(h)}{2}}$, il se trouve au moins une racine d'une des équations

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0.$$

Le signe du radical se détermine par celui de la fraction $\frac{-f(h)}{f'(h)}$. Ceci est d'une application importante dans la séparation des racines par la méthode de Fourier.

2°. Dans l'équation

$$x^{2n+1} + Bx^{2n-1} + Cx^{2n-3} + \ldots + Hx \pm K = 0,$$

il y a toujours une racine entre $-2\sqrt[2n+1]{\frac{K}{2}}$ et $\pm 2\sqrt[2n+1]{\frac{K}{2}}$, d'où résulte cette propriété des équations :

Dans l'équation

$$x^{2n+1} + Bx^{2n-1} + Cx^{2n-3} + \ldots + Hx \pm K = 0,$$

renfermant x à des puissances impaires, si K est compris entre -2 et $+2$, il se trouve, entre les mêmes limites, au moins une racine.

phiques, on peut enseigner en nombre infini diverses méthodes pour leur tracé, de manière que les éléments très-petits de la terre conservent dans la représentation leur véritable forme. Mais puisque, en outre, par la propriété de la terre d'être sphéroïdale, l'échelle de représentation de ses divers éléments varie nécessairement, les éléments égaux, pris à des endroits différents, seront représentés sur la carte avec des dimensions différentes. Plus les changements d'échelle seront sensibles, plus inexacte sera la carte géographique. Et puisque la grandeur de ces variations d'échelle, sur l'espace d'une même portion de surface, est plus ou moins forte, selon la méthode de projection, la question suivante se présente naturellement :

Pour quelle projection ces changements d'échelle seront-ils le plus petits possible ?

Dans une Note que j'ai lue à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 18 janvier, j'ai montré que ce problème, traduit en analyse, se ramène à un problème spécial de *maximum* et *minimum*, essentiellement distinct de ceux qu'on résout dans les calculs différentiel et des variations. Ce problème ressemble à ceux qui ont fait l'objet du Mémoire précité sur le *parallélogramme de Watt ;* mais il se rapporte à une classe plus élevée: là on cherchait quelques constantes, ici on demande de trouver deux fonctions inconnues, ce qui correspond à la détermination d'une quantité infinie de constantes. Cela établit entre ces problèmes une différence analogue à celle qui existe dans les problèmes du calcul différentiel et du calcul des variations. Sous le rapport théorique, cet objet est d'autant plus intéressant qu'il se ramène à la recherche d'une équation aux dérivées partielles, particulièrement remarquable, exprimant, entre autre choses, l'équilibre de chaleur dans les plaques infiniment minces. Ainsi, le problème sur les projections de cartes les plus avantageuses est liée à cette propriété remarquable de la chaleur: Dans l'équilibre de chaleur d'une plaque circulaire infiniment mince, la température du centre est la moyenne de la température de tous les points de la circonférence; de même pour la sphère, la température du centre est la moyenne des températures à la surface.

La solution définitive de la projection la plus avantageuse pour les cartes est très-simple : la projection la plus avantageuse, pour représenter une partie quelconque de la surface terrestre, est celle dans laquelle aux limites de la représentation l'échelle conserve une même grandeur facile à déterminer, d'après la grandeur normale de l'échelle adoptée. En ce qui touche la détermination de la projection jouissant de cette propriété, elle se réduit au problème ordinaire dans lequel *il s'agit d'intégrer une équation aux dérivées partielles*, où la valeur de l'intégrale aux limites est donnée, limites entre lesquelles elle doit rester finie et continue.

Ainsi, pour la représentation de chaque contrée sur la carte, il n'y a qu'une projection la plus avantageuse. Elle se détermine par la position de la contrée par rapport à l'équateur et la forme de ses limites; en outre, les parallèles et les méridiens représentent diverses lignes courbes, mais généralement approchantes du cercle et de la droite, si l'on projette une petite portion du globe terrestre. Ces lignes se construiront par points sans aucune difficulté.

Les cas où les parallèles et les méridiens se transforment complétement en cercles ou lignes droites, sont surtout remarquables; cela facilite notablement le tracé des cartes de dimensions minimes. Lagrange, dans ses Mémoires *Sur la construction des cartes géographiques* (nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, 1779) a déterminé toutes les projections où cela a lieu. En se fondant sur la propriété générale de la projection la plus avantageuse, il n'est pas difficile de montrer pour quels pays il conviendrait de s'en servir : les limites de ces pays se détermineront par les points pour lesquels l'échelle, dans ce genre de projection, conserve la même grandeur. Les limites déterminées de cette manière représentent généralement des courbes assez compliquées. Mais, à mesure que l'espace décrit diminue, elles se simplifient et convergent rapidement vers des ellipses, tellement qu'elles ne diffèrent guère de ces lignes, pour la représentation de contrées assez étendues, comme par exemple la Russie d'Europe. Ces ellipses ont des positions connues, déterminées ; leur centre se trouve au centre de projection ; l'un des axes est dans la direction du méridien. Le rapport des axes de ces ellipses se détermine au moyen de la position du centre, relative à l'équateur, et d'une certaine quantité que Lagrange appelle *exposant* de projection.

Réciproquement, pour la représentation de chaque partie du globe, assez petite et bornée par une ellipse semblable, on peut trouver la méthode de projection, suivant laquelle les parallèles et les méridiens seront des lignes circulaires ou droites, et qui donnera une représentation approchant de la réalité. Mais pour cela, d'après ce qui a été dit plus haut, le centre de projection et son exposant doivent être choisis d'une manière convenable, d'accord avec la position du pays et la forme des frontières (*). De là des méthodes particulières de projection,

(*) L'exposant de projection se détermine par la formule

$$\sqrt{1 + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \cos^2 l},$$

où l est la latitude du centre, n le rapport de l'axe dirigé suivant le méridien à l'autre axe. (*Voyez* ma Note *Sur la construction des cartes géographiques,* lue à l'Académie le 18 janvier de la présente année.)

où l'on conserve la similitude des éléments infiniment petits, telles que : stéréographique, polaire et horizontale, projection de Gauss et de Mercator, qui se concluent toutes de la méthode générale par une hypothèse particulière sur le centre de projection ou l'exposant. Elles ne peuvent donner une représentation approchant de l'exactitude que dans des cas particuliers connus.

Ainsi, si l'ellipse ci-dessus mentionnée se transforme en cercle, l'exposant devient égal à l'unité, et la projection la plus avantageuse se réduit en général à la projection stéréographique *horizontale,* qui se transforme en *polaire,* quand le centre du cercle coïncide avec le pôle de la terre. A mesure que l'axe de l'ellipse, dirigé selon le méridien, diminue, la projection la plus avantageuse s'approche de celle de Gauss. Le centre s'approchant de l'équateur, cette projection devient celle de Mercator.

Il est clair, d'après cela, que, ayant en vue d'obtenir la meilleure représentation cartographique de pays différents, on ne peut se borner à un seul ou plusieurs des procédés particuliers, mais qu'il est nécessaire d'employer la méthode générale, en choisissant chaque fois convenablement et le centre de projection et la grandeur de l'exposant.

D'après ce qui a été dit plus haut, cela s'effectue aisément, par la projection d'une partie du globe dont les limites représentent une ellipse, avec un axe dirigé selon le méridien.

Mais la pratique n'offre jamais de cas aussi simples; les frontières des divers pays ont toujours la forme de courbes extrêmement irrégulières. Malgré cela, pour la meilleure représentation d'une contrée pas trop étendue, on peut déterminer la position du centre de projection et la grandeur de l'exposant, en comparant la forme des frontières à l'ellipse ou aux autres sections coniques.

Pour cela il suffit d'avoir une représentation approchée du pays, pour la projection duquel on cherche le centre et l'exposant les plus avantageux, et à cet effet on peut employer une carte tracée par quelque méthode que ce soit.

A proprement parler, ici trois hypothèses sont à faire, qui donnent le principe de trois solutions distinctes; mais, en les comparant entre elles, il ne sera pas difficile de trouver la plus avantageuse. 1° On peut regarder la contrée à projeter comme une portion d'espace bornée par une ellipse, avec un axe dirigé selon le méridien; pour les pays où la plus grande étendue en méridiens et parallèles se trouve presque opposée au centre, cela correspond toujours à la solution la plus avantageuse : ce cas se rencontre le plus dans la pratique. 2° On peut regarder la contrée à projeter comme une portion d'espace comprise entre deux ellipses, deux hyperboles ou deux paraboles semblablement disposées : cela peut donner la solution la plus avantageuse, seulement pour les pays recourbés en forme de faucille ou offrant une bande étroite inclinée sur les méridiens et les parallèles. 3° Enfin elle peut être comparée à un espace compris entre les branches de deux hyperboles opposées : cela correspond aux contrées dont les frontières sont sensiblement courbées en face du centre (*).

(*) Pour un espace qui, dans la projection stéréographique horizontale avec le rayon ± 1, est borné par l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la limite des changements d'échelle (la différence entre la plus grande et la plus petite, divisée par l'échelle moyenne) s'exprime ainsi : $\frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2}$; pour l'espace entre les deux ellipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

En nous arrêtant à la première hypothèse, qui comprend la plus grande partie des cas qu'on rencontre dans la pratique, nous remarquerons que, parmi la quantité d'ellipses qui peuvent être décrites autour de la contrée à projeter, la projection la plus avantageuse se déterminera par la plus petite, si pour la comparaison des diverses ellipses entre elles nous adoptons la longueur de leur diamètre moyen, également incliné sur les axes.

D'après la forme des frontières, il n'est pas difficile de reconnaître les points sur lesquels cette ellipse s'appuiera, et par eux de trouver les axes et le centre. Le centre de cette ellipse sera le lieu le plus avantageux du centre de projection; la position de ce centre et le rapport des axes de l'ellipse se détermineront au moyen de l'exposant le plus avantageux. Tout ceci se rapporte principalement à la représentation des contrées très-petites; mais pour les contrées étendues, d'après la méthode générale d'approxi-

---

cette limite égale $\frac{2(\lambda^2-1)a^2b^2}{a^2+b^2}$; entre les deux hyperboles

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda^2,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

elle égale $\frac{2(\lambda^2-1)a^2b^2}{\pm(a^2-b^2)}$; entre les deux paraboles

$$x^2=2py+\alpha,\quad x^2=2py+\alpha',$$

elle est égale à $2(\alpha-\alpha')$; enfin dans l'espace entre les branches des deux hyperboles opposées

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-\lambda^2,$$

la limite du changement d'échelle égale $\frac{2(\lambda^2+1)a^2b^2}{\pm(a^2-b^2)}$. Cela résulte des dernières équations de la note plus haut mentionnée et est exact jusqu'à $\text{tang}^2\frac{u}{2}$ près, où u est la distance angulaire des points du pays projeté au point adopté pour centre de projection stéréographique.

mation successive, il est aisé de trouver les corrections et pour la position du centre et pour la grandeur de l'exposant. Ainsi s'obtiendra la méthode la plus avantageuse de tracé géographique d'un pays donné, dans lequel les parallèles et les méridiens restent des cercles.

On voit donc que le tracé des cartes géographiques appartient au nombre de ces questions pratiques, qui se résolvent diversement pour les diverses contrées; que la méthode de tracé, avantageuse pour la France, l'Allemagne ou l'Angleterre, peut être désavantageuse pour la Russie. En outre, par son étendue, la Russie offre des difficultés particulières dans la représentation cartographique; c'est pourquoi le choix de projection le plus en rapport avec son espace, la forme de ses frontières et sa position relativement à l'équateur, a une importance spéciale. Sans parler des cartes embrassant toutes les parties de la Russie, les cartes de ses diverses parties présentent des variations d'échelle très-sensibles. Ainsi, en projetant tout ce qui lui appartient du côté des monts Ourals par la méthode de Gauss, on admet des variations d'échelle de plus de $\frac{1}{20}$; ce qui, pour la mesure des surfaces, donne une différence de *un* mille carré sur *dix*, erreur très-sensible. Les erreurs deviennent moindres par la projection stéréographique horizontale, avec un centre convenablement choisi; mais la différence d'échelle atteint $\frac{1}{34}$, ce qui fournit pour l'évaluation des surfaces une erreur de *un* mille carré sur *dix-sept*. Ces erreurs ne sont pas assez petites pour être négligées; le moyen de les diminuer consiste à déterminer la projection correspondant le mieux à la forme et à la position du pays projeté.

En examinant sur la carte cette partie de la Russie, nous remarquons que dans le contour général de ses limites, elle est loin d'être une ellipse dont l'axe se dirigerait selon le méridien; et, dans ce cas, comme nous l'avons vu, on ne peut parvenir à la meilleure représentation, en conservant pour méridiens ou parallèles des cercles ou des lignes droites.

Simplifier ainsi la construction de sa carte, ce serait diminuer sensiblement le degré d'exactitude de la représentation. Pour atteindre la représentation la plus exacte, il est nécessaire de déterminer, d'après ce qui a été dit plus haut, la méthode de projection, en intégrant une certaine équation. Puisque l'intégration doit être effectuée sous des conditions dépendant de la forme des limites et que ces limites présentent toujours des courbes compliquées, il s'entend que l'intégration exacte est impossible. Mais la pratique ne l'exige pas. Il lui suffit de se borner à des variations d'échelle de dix-millièmes, et dans ce cas tout repose sur la détermination de certains coefficients qui, avec une précision suffisante pour la pratique, peuvent être calculés d'après la forme des limites, si recourbées qu'elles soient. Quant aux parallèles et aux méridiens, ils se construiront par points sans difficulté.

Passant à la méthode la plus simple de tracé des cartes, où les parallèles et les méridiens représentent des cercles ou des lignes droites, nous remarquons que les possessions de la Russie, du côté des monts Ourals, du Caucase et de la Géorgie, s'étendent plus du nord au sud que de l'est à l'ouest; dès lors on ne peut comparer cet espace à un cercle, encore moins à une ellipse dont l'axe dirigé du nord au sud serait très-petit, en comparaison de l'axe dirigé de l'est à l'ouest. Par conséquent, d'après ce qui a été dit ci-dessus, ni la projection de Gauss, ni la projection stéréographique ne correspondent à la forme du pays. Appliquant au cas actuel la méthode de détermination du centre et de l'exposant que nous avons montrée, nous remarquons que le centre de l'ellipse minimum qui, ayant un axe dirigé suivant le méridien, embrassant toutes les possessions ouraliennes de la

Russie, y compris le Caucase et la Géorgie, se trouve entre Jaroslaf et Ouglitch, à 57° de longitude et $57^{\circ},36'$ de latitude; le rapport de ses axes est égal à $\frac{17}{10}$. Partant de cette ellipse, nous trouvons qu'à la projection la plus avantageuse correspond l'exposant 1,0788 (*). Cette grandeur ne diffère de 1, exposant de la projection stéréographique, que d'une quantité inférieure à un *dixième*. Mais une telle différence a une notable influence sur le degré d'exactitude de la représentation. Nous avons vu que la projection stéréographique, pour la position la plus avantageuse de son centre, sur l'espace de la portion de Russie examinée par nous, offre une variation d'échelle allant jusqu'à $\frac{1}{34}$. En adoptant la quantité trouvée 1,0788 pour l'exposant de projection et plaçant son centre entre Jaroslaf et Ouglitch (à 57° de longitude, et $57^{\circ}\,42'\,30''$ de la latitude), nous avons obtenu une carte de cette partie de la Russie, où les changements d'échelle ne dépassent pas $\frac{1}{50}$, et c'est le plus haut degré de précision qu'on puisse atteindre, en conservant pour parallèles et méridiens des cercles et des lignes droites.

C'est ainsi, Messieurs, que la majeure partie des questions pratiques se ramène à des problèmes de *maximums* et *minimums*, entièrement nouveaux pour la science; et ce n'est que par la solution de ces problèmes que nous pouvons satisfaire aux exigences de la pratique qui cherche partout ce qu'il y a de meilleur, ce qu'il y a de plus avantageux.

(*) Par la formule de la remarque faite page 55, pour $l = 57^{\circ}\,36'$, $n = 1,7$, l'exposant est 1,0675. Calculant les corrections, nous trouvons qu'on doit augmenter cette quantité de 0,0113, et que la latitude du centre de projection est égale à $57^{\circ}\,36' + 6'\,30'' = 57^{\circ}\,42'\,30''$. Sa longitude reste égale à 57°.

BURGI (JOBST)
ET SENS *NÉPÉRIEN* DU MOT LOGARITHME (*);

D'APRÈS M. WILHEM MATZKA,
Professeur à l'université de Prague.

En 1620 Burgi publia l'ouvrage suivant :

Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen, sambt gründlichen Unterricht, wiesolche nützlich in allerley rechnungen zu gebrauchen und verstanden verden sol. Gedruckt in der alten stadt Prag, bei Paul Sessen, der loblichen Universitet buchdrucker. Im jahre 1620.

« Tables progressives arithmétiques et géométriques, avec une instruction solide pour les comprendre et s'en servir utilement dans toutes sortes de calculs. Imprimé dans l'antique ville de Prague, par Paul Sessen, imprimeur de la louable Université. Dans l'année 1620. »

Format petit in-4 de 7 feuilles et demie.

L'*Instruction solide* a été omise, il n'y a que les Tables : de sorte que le but véritable de ces Tables n'était pas bien connu. Cela a contribué à faire croire que Burgi a inventé les logarithmes longtemps avant Neper; à quoi il faut ajouter l'assertion de son beau-frère Bramer que nous avons citée (*Bulletin*, t. IV, p. 57), et surtout ce que dit Kepler avec tant d'assurance dans ses *Tabulæ Rudolphinæ*; fol. Ulmæ, 1617 :

Hoc inquam si expetis : ecce tibi apices logistici Justo Byrgio multis annis ante editionem neperianam, *viam præiverunt ad hos ipsissimos logarithmos. Etsi* homo

(*) *Journal de Grunert*, t. XV, p. 121; 1850 et t. XXXIV, p. 349; 1860.

cunctator et secretorum suorum custos, *fœtum in partu destituit, non ad usus publicos educavit.*

D'après cela, des doutes sur la priorité de l'invention étaient légitimes, et M. Matzka, dans son Mémoire de 1850, se prononce même en faveur de Burgi ; mais depuis la question a changé de face. M. le Dr Gieswald, professeur en premier du gymnase de Dantzig, a eu le bonheur de découvrir dans la Bibliothèque de cette ville le manuscrit de l'*Instruction solide* ci-dessus mentionnée, et l'a publié *in extenso* (p. 26-36) dans sa dissertation *Programme scolaire* (*) de 1856 :

Justus Byrg als mathematiker und dessen Einleitung in seine logarithmen.

« J. Byrg comme mathématicien et sur son Introduction à ses logarithmes. »

Dans la préface à cette *Instruction*, on lit :

Betrachtent derowegen die eigenschaft und correspondenz der 2 *progressen alz der arithmetischen und der geometrischen ; das was in der ist multipliciren, ist in jener nur addiern, und was in der ist dividiern in jener subtrahiren ; und was in der ist radicem quadratam extrahiren, in jener nur ist halbiren ; radicem cubicam extrahiren, nur in* 3 *dividirn ; radicem zensi in* 4 *diviern. sursolidam in* 5 *und alsofort in andern quantitaten.*

« Considérant à cet effet la propriété et la correspondance de deux progressions, telles que l'arithmétique et la géométrique, ce qui dans celle-ci est *multiplier* est dans celle-là seulement *additionner;* ce qui dans celle-ci est

(*) Il est d'usage en Allemagne que les directeurs ou supérieurs des colléges publient à la fin de l'année scolaire, non pas des discours qui le plus souvent impatientent les élèves et ennuient les *spectateurs*, qu'on croit *auditeurs*, mais des dissertations scientifiques, curieuses et instructives.

diviser est dans celle-là *soustraire*; ce qui dans celle-ci est *radicem quadratam extrahere*, est dans celle-là *dimidier*; *radicem cubicam extrahere*, seulement diviser par 3; radicem *zensi* par 4; *sursolidam* par 5, et ainsi de suite pour les autres quantités. »

Mais tout ce paragraphe de Burgi n'est que la traduction presque littérale d'un passage de l'arithmétique de Michael Stiffel (voir *Bulletin*, t. I, p. 71), dans son *Arithmetica integra* (1547, p. 249). Stiffel place l'une au-dessous de l'autre les deux progressions :

$$\begin{array}{cccccccc} -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 4,\ldots, \\ \frac{1}{8}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{2}, & 1, & 2, & 4, & 8, & 16,\ldots \end{array}$$

Et dit là-dessus :

Qualiaque facit progressio geometrica multiplicando et dividendo, *talia facit progressio arithmetica* addendo et subtrahendo.

Et Lib. 1, p. 35, il ajoute :

Additio in arithmeticis progressionibus respondet multiplicationi in geometricis. — Substractio in arithmeticis respondet in geometricis divisioni. — Divisio in arithmeticis progressionibus respondet extractionibus radicum in progressionibus geometricis, ut dimidiatio in arithmeticis respondet extractioni quadratæ in geometricis. — Triplatio in arithmeticis respondet multiplicationi cubicæ in geometricis. — Quintuplatio in arithmeticis respondet multiplicationi surdesolidæ in geometricis. Et sic de aliis in infinitum.

Burgi dit presque mot à mot la même chose et même la phrase finale.

L'Instruction *solide* débute ainsi :

Zu diesen Tabulen findet man Zweierley Zahlen :

eine mitt rothen Caractern, welche wie einem ieden leichtlich zu sehen, nichts anders dann ein arithmescher progress; die andre aber mit schwarzen nichts anders dann ein geometrischer progress ist : und auf das wir in diesem desto kurzer durchgehen, woll wir dorthin den arithmetischen progress die rothe et den geometrischen progress die schwarze zahl nennen, damit auch ein ieder die fundamenta dieser tabulen grundlicher fasse und dieselbige besser gebrauchen, so wollen wir in folgender begriff dieser 2 progressen für augen stellen und dieselben mit etlichen exemplen erklaren.

$$\textit{Arithmetik}\ldots\quad \frac{0.1.2.3.\ 4.\ 5\ldots(\textit{roth})}{1.2.4.8.16.32\ldots(\textit{schwartz})}.$$

« Dans ces Tables, on trouve deux sortes de nombres : les uns en caractères *rouges*, qui, comme chacun le voit facilement, ne sont autres qu'une progression arithmétique; mais les autres *noirs* ne sont autres qu'une progression géométrique : mais afin d'abréger le trajet, nous appellerons nombre *rouge* la progression arithmétique et nombre *noir* la progression géométrique, et afin que chacun saisisse à fond les fondements de ces Tables et puisse mieux s'en servir, nous voulons mettre sous les yeux la propriété de ces progressions et les expliquer par quelques exemples :

$$\frac{0.1.2.3.\ 4.\ 5\ldots(\text{rouge})}{1.2.4.8.16.32\ldots(\text{noir})}. \text{ »}$$

Ainsi Burgi se sert des deux mêmes progressions que Stiffel, et quoiqu'il ne le nomme nulle part, il dit partout que d'autres arithméticiens, et entre autres un nommé Simon-Jacob Zons, ont traité des propriétés de ces deux séries. De là il résulte avec évidence qu'il n'a pas voulu passer pour l'inventeur de la relation entre les nombres rouges et noirs, de ce qu'on nomme aujourd'hui logarithme et *logarithmand* (*).

Dans la préface citée ci-dessus, il dit même expressément :

So habe ich nichts nutzlicheres erachtet, alsz diese Tabulen also zu continuern, *dass alle zahlen so vorfallen in derselben mogen gefunden werden, auch welcher* continuation *diese Tabulen erwachsen.*

« Ainsi je n'ai pensé rien de plus utile que de *continuer* ces Tables, de manière qu'on puisse y trouver tous les nombres qui se présentent ; cette *continuation* a donné naissance à ces Tables. »

Ainsi Burgi se donne seulement comme *continuateur* de Tables qui ont existé avant les siennes.

Burgi met dans le rang des nombres rouges toutes les dizaines

$$0.10.20.30\ldots100.110.120$$

(terme général $10n$).

Au-dessous de zéro, il met le nombre noir 100000000 (huit zéros).

Au-dessous de 10, il met le nombre noir 100010000.

Ainsi en style moderne, le terme général de sa progression géométrique est $10^8.(1001)^n$.

Si l'on prend pour unité un dixième, la progression *rouge* se change en

$$0.1.2.3\ldots10.11.12,$$

et en divisant chaque nombre *noir* par 10^8, la progression *noire* devient

$$1.1{,}001;\ 1{,}0002001\ldots(1{,}001)^n.$$

(*) Les Allemands emploient ce mot pour désigner le nombre correspondant à un logarithme.

Stiffel avait adopté 2^n pour la progression géométrique, à quoi Burgi substitue $(1,001)^n$.

Dans nos Tables, les nombres se suivent selon l'ordre naturel, et les logarithmes *approchés* sont placés vis-à-vis; dans les Tables de Burgi, ce sont les logarithmes qui sont disposés suivant l'ordre naturel 1, 2, 3,..., et les nombres *approchés* sont placés en regard. Ce sont des Tables dites *antilogarithmiques*, beaucoup moins commodes que les nôtres.

On peut conclure, de ce qui précède, que Stiffel le premier a vu la possibilité de remplacer les multiplications, etc., par des additions, à l'aide de deux progressions correspondantes (voir *Nouvelles Annales*, t. V, p. 496); que divers ont calculé, à cet effet, les termes de ces progressions en les réduisant en Tables, et que Burgi a continué et donné plus d'extension à ces Tables.

Il reste démontré que plusieurs, avant Néper, avaient en vue le même but que Néper, et que celui-ci l'a mieux atteint que ses prédécesseurs et d'une manière bien plus philosophique, et ses Tables sont tellement accommodées aux besoins des calculateurs, qu'elles sont entrées dans le domaine public, surtout avec la base 10 de Briggs (*).

Burgi ne se sert jamais de l'expression *logarithme*. On a donné à ce mot une origine qui se rattache à la théorie suivante qu'on doit à Képler (*Tabulæ Rudolphinæ*, cap. III, p. 11, col. 1). On dit qu'un rapport $\frac{a}{b}$ est contenu m fois dans un rapport $\frac{a'}{b'}$ lorsque le produit de m facteurs égaux à $\frac{a}{b}$ est égal à $\frac{a'}{b'}$: ce qu'on écrit $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a'}{b'}$.

(*) Les opérations infinitésimales s'exécutent avec la base népérienne e; il serait commode d'avoir des Tables trigonométriques avec cette base : par là on éviterait les changements de systèmes.

Supposons qu'on adopte un rapport fixe $\frac{a}{b}$ et qu'on y compare successivement tous les rapports possibles $\frac{a'}{b'}$; alors m est dit le logarithme de $\frac{a}{b}$; par exemple, prenons $\frac{a}{b} = \frac{10}{1}$, et $\frac{a'}{b'} = \frac{2}{1}$; alors $\left(\frac{10}{1}\right)^{0,30103} = \frac{2}{1}$ (à peu près), et 0,30103 est le logarithme de 2 : c'est la définition de Képler, qui ne diffère pas essentiellement, comme l'on voit, de la définition exponentielle d'Euler, aujourd'hui enseignée. De là on a déduit que logarithme est l'expression abrégée des mots grecs ἀριτμός τῶν λογῶν, *rationum numerus.* Mais M. Matzka objecte très-judicieusement que Néper a introduit le premier ce mot dans son ouvrage de 1614 (*Mirifici Logarithmorum, etc.*) et que sa théorie n'est nullement fondée sur l'idée d'un nombre de rapports, car cette théorie est purement *cinématique*, et, soit dit en passant, contient le premier germe des *fluxions*, lequel, entré dans la tête de Newton, en sort comme *calcul fluxionnel*; de même que la théorie des grandeurs *extrêmes* de Fermat contient le premier germe des différentiels, lequel, entré dans la tête de Leibnitz, en sort comme *calcul différentiel*. Il faut donc chercher chez Néper même le sens qu'il attachait au mot *logarithme*, dont d'ailleurs il n'indique nulle part *explicitement* la dérivation.

Or, dans l'Introduction à l'ouvrage ci-dessus cité, on lit : *Quum nihil sit... mathematicæ praxi tam molestum, quodque logistas* (les calculateurs) *magis remoretur, ac retardet, quam magnorum numerorum multiplicationes, partitiones, quadratæque et cubicæ* (*scilicet radicis*) *extractiones, quæ, præter prolixitatis tædium, lubricis etiam erroribus plurimum sunt obnoxiæ, cœpi igitur anima revolvere, qua arte certa et expedita possem dicta impedita amoliri. Multis subinde in hunc finem per-*

pensis, nonnulla tandem inveni præclara compendia alibi fortasse tractanda (*) : *verum inter omnia nullum hoc utilius, quod una cum multiplicationibus, partitionibus, et radicum extractionibus arduis et prolixis, ipsos etiam numeros multiplicandos, dividendos, et in radices resolvendos*, ab opere rejicit *et eorum loco* alios substituit numeros, qui illorum munere fungantur *per solas additiones, subtractiones, bipartitiones et tripartitiones. Quod quidem arcanum cum... sit, quo communius eo melius: in publicum mathematicorum usum propalare libuit.*

Voilà le but bien clairement exposé : il consiste à substituer aux nombres données, d'autres dont les calculs sont plus faciles. En effet, dans son ouvrage publié en 1619 sous le titre : *Logarithmorum canonis constructio*, il appelle les nombres *numeri naturales* et leurs logarithmes *numeri artificiales*, nombre artificiel, nombre servant à calculer; or un nombre *de compte* se rend en grec par λογιστικός ἀριθμός; le mot *logistique* était très-usité du temps de Néper; Képler dans ses Tables Rudolphines appelle les nombres chiffrés des *apices logistici*. Ainsi logarithme signifie donc dans le sens de son inventeur *nombre artificiel*.

M. Matzka, qui donne cette ingénieuse et exacte dérivation, fonde là-dessus une manière très-élémentaire d'exposer les logarithmes dans les écoles primaires. Un produit ne change pas dans quelque ordre qu'on multiplie les facteurs; une somme ne change pas dans quelque ordre qu'on ajoute les nombres. Cette analogie suffit pour expliquer les logarithmes considérés comme nombres auxiliaires artificiels.

(*) Probablement sa *Rabdologie* (1617).

BIBLIOGRAPHIE.

Mémoire sur la théorie géométrique des surfaces du second ordre ; par M. *Ch. Méray*, docteur ès sciences ; Rome, in-4 de 24 pages, 1860 (extrait des *Annali di Mat. pura ed applicata*, t. III, janv.-fév. 1860).

C'est une bonne étude sur la *Géométrie supérieure* de M. Chasles, et dont les théorèmes fondamentaux sont démontrés *géométriquement*. On n'y trouve qu'une seule équation, qui porte le n° 1 ; de quoi on aurait pu se dispenser, puisque cette équation est unique ; c'est la méthode logique de M. Chasles, rendue moins *équationnelle*, s'il est permis de s'exprimer ainsi. Est-ce un avantage ? Nous trouvons même que la classique et célèbre *Géométrie supérieure* est trop peu équationnelle. Des équations *écrites* valent mieux que des équations *parlées*, mais dont on se sert volontiers pour ressembler, à ce qu'on croit, à Euclide. Pure archéolâtrie. C'est faire rouiller une médaille fondue hier pour lui donner un vernis d'antiquité. La géométrie moderne se compose de *figures*, d'*équations* et de *déductions*, sans négliger les *inductions*, source de découvertes, et de chacune selon les besoins de la cause, comme l'on dit au barreau. Pourquoi les Grecs n'ont-ils pas fait usage d'équations ? Même réponse que pour les chiffres : parce qu'ils ne les connaissaient pas. Apollonius ressuscité ne marcherait pas plus sur les traces d'Euclide que Platon ne serait platonicien, qu'Aristote ne serait aristotélicien ; hommes de génie, ils apprendraient nos procédés et se placeraient bientôt au premier rang. Un courtisan disait au grand Frédéric que si César revenait, il trouverait *à qui parler*. « Si César revenait, répondit l'illustre capitaine, il étudierait nos moyens défensifs et offensifs, et puis nous battrait. » C'est vrai en toute chose.

DIOPHANTE.

Voici l'inscription *fictive* sur son tombeau, qu'on trouve dans l'*Anthologie grecque* (*) :

Οὗτος τὸν Διόφαντον ἔχει τάφος ἆ μέγα θαῦμα
　Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο·λέγει.
Εκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην.
　Δωδεκάτη δ'επιθεὶς μῆλα πόρεν χλοάειν
Τῇ δ'αρ ἐπ' ἑϐδομάτη τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
　Εκ δέ γάμων πέμπτῳ παῖδ'ἐκενέυσεν ἔτει.
Αἴ αἴ τελύγετον δειλὸν τέκος, ἥμισυ πατρος
　Τοῦ δὲ καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἕλων βιότου.
Πένθος δ'ἆυ πισύγεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς,
　Τῇ δὲ πόσου σοφίῃ τερμ' επόρησε βίου.

Traduction latine.

Hunc Diophantus habet tumulum qui tempora vitæ
　Illius, mira denotat arte tibi.
Egit sextantem juvenis; lanugine malas
　Vestire hinc cœpit parte duodecima.
Septante uxori post hæc sociatur, et anno
　Formosus quinto nascitur inde puer.
Semissem ætatis postquam attigit ille paternæ,
　Infelix subita morte peremptus obit.
Quatuor æstates genitor lugere superstes
　Cogitur, hinc annos illius assequere.

(*) BACHET, nº 19; BRUNCK, t. II, p. 423; t. III, p. 229; JACOBS, t. XIV, p. 126; HEILBRONNER, p. 859.

Imitation versifiée.

Passant, sous ce tombeau repose Diophante,
Et quelques vers tracés par une main savante
Vont te faire connaître à quel âge il est mort :
Des jours assez nombreux que lui compta le sort,
Le sixième marqua le temps de son enfance;
Le douzième fut pris par son adolescence.
Des sept parts de sa vie une encor s'écoula,
Puis, s'étant marié, sa femme lui donna
Cinq ans après un fils, qui, du destin sévère,
Reçut de jours, hélas! deux fois moins que son père.
De quatre ans, dans les pleurs, celui-ci survécut :
Dis, si tu sais compter, à quel âge il mourut.

Solution.

Représente par x le nombre en question
Et, sans rien oublier, pose une équation
Où dans le premier membre on trouve le sixième,
Puis le douzième d'x, augmentés du septième.
Ajoutes-y neuf ans : le tout égalera
L'inconnue x. Transpose, ajoute..., et cætera.
Tu verras aisément, sans qu'on puisse en rabattre,
Que l'âge du bonhomme est bien QUATRE-VINGT-QUATRE.

H. EUTROPE.

Note du Rédacteur. La poésie est plus ancienne que la prose. Avant l'invention de l'écriture, l'histoire et la science se transmettaient par des moyens mnémoniques, et le rhythme est un de ces moyens. Les traités d'algèbre indiens, tel que le *Lilawati*, sont en vers. Que de milliers d'années écoulées avant la décomposition de la parole en mots et sons élémentaires et combinés, et d'autres milliers d'années avant la représentation graphique de ces sons!

GENEALOGIE DE VIÈTE (*).

§ I. Viète. — Famille originaire des environs de Fontenay, illustrée par l'un de ses membres, le fameux et savant mathématicien François Viète, créateur de l'algèbre.

Nous devons les éléments de cet article à l'obligeance de notre collègue et ami M. B. Fillon, qui lui-même a publié sur François Viète une Notice pleine d'intérêt.

I. — *Viette* (François), marchand à Foussays, mentionné dans un acte de 1528, est le premier de cette famille qui soit connu. Il fut père de : 1° Etienne, qui suit; 2° Mathurin, rapporté § IV; 3° Jean, qui eut pour enfants : Aliénor, dame de la Sablière, mariée à Louis Suppin, et le 23 janvier 1583 à Charles Clabat, écuyer, seigneur des Granges; Anne, femme de Jean Cardinault, morte avant 1581; 4° Jeanne, épouse de Jean Dubois, seigneur de Saint-Cyr; 5° Josèphe, épouse de François Beau, seigneur des Cambaudières.

II. — *Viète* (Etienne), qui le premier écrivit son nom avec un seul T, fut bachelier ès lois, procureur à Fontenay et notaire de la seigneurie du Busseau. Il eut de Marguerite Dupont, fille de François et de Françoise Brisson : 1° François, qui suit; 2° Nicolas, rapporté § II; 3° René, relaté § III; 4° Claude, mariée le 17 juin 1568 à Cristophe Bonnet, mourut en 1573; 5° Françoise, épouse de Pierre Robert, seigneur du Vignault, notaire à Fontenay, morte vers 1597; 6° Jeanne, morte fille en 1596 ainsi que 7° Julie.

(*) Extrait du *Dictionnaire historique, biographique et généalogique des familles de l'ancien Poitou*, par M. Filleau de la Touche. Poitiers; 1840-1854.

III. — *Viète* (François), né à Fontenay en 1540, fit son droit à Poitiers et le termina dès l'âge de vingt ans. Après avoir plaidé comme avocat pendant quelque temps dans sa ville natale jusqu'en 1567, il devint plus tard conseiller au parlement de Bretagne, où il figure le 6 avril 1574. On doit supposer qu'il dut ce poste à la faveur dont jouissait son cousin et condisciple le président Barnabé Brisson (*), près duquel il fut sans doute appelé à Paris, ce qui lui permit de faire des études sans lesquelles ses immenses découvertes eussent été sans base ni fondements. Obligé de quitter Rennes pour se réfugier à Beauvais-sur-Mer près de Françoise de Rohan, il y composa deux ouvrages. Nommé maître des requêtes ordinaires de l'hôtel du roi par le crédit de Brisson et du duc de Rohan (28 mars 1580), il se rend à Paris, mais il est très-promptement dépouillé de sa charge. On a lieu de croire qu'il courut quelques dangers, causés sans doute par une certaine tendance vers les idées de la Réforme. Retiré dans le bas Poitou, il se livra aux travaux les plus sérieux, et publia dans l'espace de neuf années presque tous les ouvrages qui ont consacré son immortalité. Lié aux Politiques, il suivit les membres du parlement attachés à cette faction qui siégèrent à Tours, et rentra avec Henri IV à Paris pour y occuper son siége dans le Conseil privé.

On apprendra avec plaisir la cause de cette insigne faveur. Pendant son séjour à Tours, on avait saisi plusieurs correspondances en chiffres enlevées aux Espagnols. Henri IV les soumit à Viète et lui en demanda le secret. En quatorze jours, le puissant cerveau du mathématicien possédait la langue espagnole, et le secret des correspondances était livré à son roi, qui s'en servit avec succès pour déconcerter les Espagnols; car, malgré le soin qu'ils

(*) Pendu à Paris en 1591 par les Seize. Tм.

avaient de changer les figures, Viète, dans sa méthode étant parvenu à décupler des décuples, trouvait toujours la clef. En son absence, Dulys, son secrétaire, qu'il avait instruit dans cet art difficile, put servir de sûr interprète (*).

On raconte aussi de lui qu'un mathématicien hollandais (Adrianus Romanus) ayant proposé à tous les savants du monde la solution d'un problème, et ayant oublié, dans la liste des mathématiciens qu'il avait rédigée, d'en octroyer un à la France, Viète, mandé par le roi pour soutenir l'honneur du royaume, n'eut qu'à lire l'énoncé du problème pour en donner aussitôt plusieurs solutions. Lorsque Adrianus Romanus fut instruit du fait, il se rendit à Paris, de Paris à Fontenay, de Fontenay à la maison de campagne de Viète, toujours courant après le mathématicien et lui soumettant par écrit des propositions que Viète résolvait aussitôt. Enfin les deux savants finirent par se rencontrer, et le Hollandais charmé resta chez son hôte pendant six semaines.

Viète, au milieu des immenses travaux qu'exigeaient ses publications, ne négligeait aucun de ses devoirs de magistrat, et s'il a laissé quelques œuvres auxquelles manque la dernière main, c'est que les loisirs manquèrent à leur auteur. Il mourut au mois de février 1603.

Viète est incontestablement le créateur de l'algèbre; c'est à lui qu'on doit l'ingénieuse idée de représenter les quantités par des signes qui, ne pouvant se fondre par le calcul, présentent, au moyen de certaines notions conventionnelles, la trace des opérations effectuées pour arriver à la solution des questions proposées; et c'est cette idée qui a fait de cette science le plus puissant instrument du génie. Sans Viète, on peut le dire hautement, Descartes, Fermat, Newton, Pascal, Leibniz,

(*) *Voir* t. IX, p. 237; 1850.

qui ont éclipsé leur maître, seraient aujourd'hui bien moins connus que lui, ou plutôt sans Viète ils n'eussent pas existé. Nous pouvons donc le répéter, Viète est incontestablement l'un des plus grands hommes qu'ait enfantés le Poitou, et en songeant à tout ce que ce puissant génie a donné au monde, nous pouvons prononcer avec orgueil ce nom trop peu connu, même des héritiers de sa gloire modeste.

Pour les détails sur les ouvrages de Viète, *voir* sa Notice publiée par M. B. Fillon et Ritter, dont nous n'avons fait que présenter le résumé.

François laissa de Julienne Leclerc, son épouse, Suzanne, morte fille en janvier 1618.

§ II. — *Deuxième branche.*

III. — *Viète* (Nicolas), seigneur de la Motte de Mouzeuil, fils puîné d'Etienne et de Marguerite Dupont, rapportés IIe degré du § Ier, avocat, contrôleur ancien et conseiller en l'élection de Fontenay, mort en 1626, épousa: 1° Anne Quinefault, fille de Guillaume et de Penette Audayer, et 2° Marie Bauchier. Il eut du premier lit : 1° Nicolas, qui suit; 2° Marie, épouse d'Étienne Bran, seigneur de la Grande-Maison, conseiller en l'élection de Fontenay; 3° François, prêtre, prévôt de Notre-Dame de Fontenay, chanoine de Luçon; 4° Élisabeth, mariée le 22 mars 1595 à Jean de Saint-Micheau, conseiller en l'élection de Fontenay; 5° Jeanne, femme de Pierre Guillemin, écuyer, seigneur de Thouars; 6° Barnabé, écuyer, seigneur d'Aziré, assesseur au siége de la Rochelle, épousa Élisabeth Galais, dont il eut : 1° Élisabeth, mariée le 19 mars 1626 à Jean Faure, seigneur du Chiron, avocat à Fontenay; 2° Pierre, écuyer, échevin de la Rochelle, fut un des signataires de la capitulation de cette ville en 1628. Sa postérité existait encore en 1747 dans la personne d'Étienne-Auguste, écuyer, seigneur de la Livagerie, conseiller au présidial de la Rochelle. Il est à croire que MM. Prosper et Hyacinthe Viète de la Livagerie, officiers en retraite, qui habitent aujourd'hui la Rochelle, descendent de ce dernier; ce sont alors les seuls représentants de la famille de notre illustre compatriote.

IV. — *Viète* (Nicolas), écuyer, seigneur de la Grais-Pissote, fut maître des requêtes de la maison et couronne de France, substitut du procureur du roi, puis se fit prêtre. Il avait épousé, le 6 juin 1609, Jeanne Aléaume, fille de Jean, seigneur de la Chenulière, avocat du roi à Fontenay, et de Marie Regnouf, dont il eut: 1° Louis, écuyer, seigneur de Saint-Thomas; 2° Marie; 3° Jeanne, mariée: 1° le 7 novembre 1641 à Jean Baucher, écuyer, seigneur de l'Aulnay, et 2° le 8 février 1640 à François Bourgaing, écuyer, seigneur de la Grande-Basse; 4° Catherine, morte fille.

§ III. — *Troisième branche.*

III.— *Viète* (René), fils puîné d'Étienne et de Marguerite Dupont, relaté au IIe degré du § Ier, seigneur du Breuil, de Longesve, lieutenant général en l'élection de Fontenay-le-Comte, épousa Gabrielle de Saint-Micheau, fille de René, seigneur de la Guerinière, et de Catherine Chabot, et fut père de: 1° Gabrielle, mariée: 1° le 8 juin 1614 à Charles Masson, seigneur du Pin, et 2° à Charles Clavier; 2° Catherine, mariée le 11 février 1617 à Lancelot Pailler, seigneur de la Macardière, avocat du roi en l'élection de Fontenay-le-Comte; 3° René, né le 28 octobre 1593, mort jeune; 4° Marguerite, née le 12 août 1595, mariée le 13 mars 1620 à René de la Court, écuyer, seigneur du Fonteinan; 5° Claude, née le 7 novembre 1596, épousa le 19 septembre 1621 Jean Audouart, écuyer, seigneur de la Bigatière, avocat du roi au siége de Niort;

6° Anne, née le 18 février 1598, fut reçue le 19 avril 1623 religieuse du tiers-ordre de Saint-François à Fontenay; 7° Jeanne, née le 26 avril 1599. Peut-être est-ce la même que Jeanne Viète, épouse de Jean Gabriault, écuyer, conseiller au parlement de Rennes; 8° André, né le 23 septembre 1600, mort jeune; 9° Marie, née le 5 février 1602, épousa François Régnier, écuyer, seigneur de la Remaudière; 10° François, écuyer, seigneur du Breuil, maître des eaux et forêts en la sénéchaussée de Livrai.

§ IV. — *Quatrième branche.*

II. — *Viète* (Mathurin), fils aîné de François Viette, rapporté au Ier degré du § Ier, seigneur de la Bretinière, de Faussays, mourut en février 1598, laissant de Nicole née Robin, son épouse : 1° Jean, qui suit; 2° François, rapporté § V; 3° Jeanne, femme de Nicolas Pigueriet, seigneur de la Martinière; 4° Jacques, seigneur de la Motte-d'Ardin, épousa, le 26 mai 1568, Marie Renaillon, fille de Pierre et d'Honorée Gaultran, dont il eut : Marie, femme de Jean Thubin, seigneur de Sérigué; Élisabeth, épouse de Jean Caut, seigneur de Maigre-Souris; Catherine, mariée le 22 août 1604 à Salomon Pougart, seigneur de Thies; Suzanne, mariée : 1° le 16 avril 1598 à Benjamin Gilbert, seigneur de la Dacotière; 2° en mai 1608 à Louis Lezin, seigneur du Maigue; elle est morte en septembre 1612; Judith, femme d'André Pauillan; Jeanne, mariée le 25 avril 1594 à Hélye Desayvre, seigneur de la Vergue; 5° Gilles, marchand à Foussays, mort en juillet 1563, et qui, de Marie Boureau, son épouse, laissa Gilles, émancipé le 11 juin 1579, époque à laquelle il était déjà l'époux de N. Jausseaume, fille de Jacques.

III. — *Viète* (Jean), époux de Jeanne Avord ou Auvard, fut père de : 1° Elisabeth; 2° Suzanne, élevée par son oncle Nicolas Viète, seigneur de la Motte de Maugeuil. Elle épousa, le 16 avril 1612, Paul Poyblon; 3° Jeanne; 4° Pierre.

§ V. — *Cinquième branche.*

III. — *Viète* (François), fils puîné de Mathurin et de Nicole, rapporté au IIe degré du § IV, seigneur de Saint-Nicolas, marchand à Morons et receveur des décimes du domaine de la Maillezais, épousa Catherine Jouslain et fut probablement père de : 1° Guy, mort garçon à Saint-Hilaire-de-la-Forêt, vers 1594; 2° Guillaume, notaire à Morons; 3° Loys, marchand à Niort; 4° René, qui suit :

IV. — *Viète* (René), demeurant à Saint-Hilaire-d'Ysernay, épousa Périnne Chanteau, dont Hilaire.

Armoiries. — François Viète, membre du conseil privé du roi, portait *d'argent au chevron d'azur accosté de six étoiles de..., accompagné en chef d'un soleil de... et en pointe d'un lys de jardin arrosé par une main dextre issant d'une nuée au côté senestre du chevron.*

Cette dernière figure fait allusion aux services rendus par le célèbre mathématicien au roi de Navarre à l'occasion de la découverte du chiffre des dépêches diplomatiques espagnoles. Quant au soleil et aux étoiles, ils rappellent le système planétaire connu au XVIe siècle.

Note du Rédacteur. Nous avons inséré avec plaisir cet arbre généalogique. La noblesse *réelle,* celle du génie, est décernée de Dieu.

J'ai lu quelque part, l'endroit m'échappe, qu'à l'article de la mort, la famille a eu beaucoup de peine à faire accepter à Viète l'intervention d'un prêtre. A ce qu'il paraît, il était libre penseur ou seulement partisan du libre examen.

CALCUL INFINITÉSIMAL.

LA TEORICA DELLE FUNZIONI ELLITICHE, monografia del prof. *Henrico Betti* (*Annali di Matematica*. Marzo e aprile 1860, p. 85-128).

C'est l'exposition, à ma connaissance, la plus satisfaisante des fonctions monodromes, monogènes, synectiques, elliptiques à double période. La haute estime que nous professons pour le talent du célèbre analyste nous enhardit à dire que l'on découvre ici une qualité inattendue, la clarté; d'autant plus que nous considérons cette qualité comme très-précieuse, mais non pas comme la plus essentielle. La limpidité des petits ruisseaux, dit Voltaire, tient souvent à leur peu de profondeur. On arrange plus facilement une échoppe qu'un vaste magasin d'idées. Lorsque cette importante production sera terminée, nous en parlerons dans le corps du Journal. En attendant, nous en conseillons la fructueuse lecture aux géomètres familiers avec l'harmonieux idiome de l'antique Ausonie. Dans aucun temps, sous aucun régime, cette terre n'a été stérile en hommes de génie. Au XIII^e siècle, l'apparition de Durante est un phénomène prodigieux, inexplicable.

> O navis, referent in mare te novi
> Fluctus?

L'habile géomètre, M. le capitaine Dewulf, traduit le Mémoire italien qui sera un utile commentaire au savant ouvrage de MM. Briot et Bouquet, aujourd'hui sur les rayons de toutes les bibliothèques mathématiques, et dont M. le professeur Garlin, qui vient de conquérir un rang honorable dans l'agrégation, nous a promis de rendre compte.

PENSÉE DE GERGONNE SUR LES EXAMENS EN 1814.

« Il n'est point du tout démontré que ce qu'il faut
» faire pour briller dans les examens, du moins suivant
» leur mode actuel, soit aussi ce qu'il y a de plus propre
» à se rendre habile dans les sciences. » (*Journal* de Gergonne, t. V, p. 62.)

Il y a de cela un demi-siècle. Que dirait-il aujourd'hui de notre enseignement hypertrophique?

Supposons qu'une place de premier violon soit vacante à l'Opéra, et qu'on exige des candidats les connaissances suivantes : 1° la langue française; 2° la langue italienne; 3° l'histoire de la musique chez les peuples anciens et modernes; 4° la lecture et l'écriture de la musique; 5° les éléments du contre-point; 6° l'histoire de l'instrument; 7° la théorie des cordes vibrantes; 8° la théorie de la position du chevalet, de l'âme, des ouïes; 9° la théorie de la table de résonnance; 10° la théorie des sons normaux et harmoniques; 11° la théorie de l'archet, de ses extrémités et du milieu; 12° enfin l'exécution d'un adagio de Viotti.

Supposons, de plus, qu'on attache des coefficients numériques à ces diverses connaissances, et que leur somme soit décisive : il est possible qu'un ménétrier l'emporte sur un Paganini. *Rides : de te fabula narratur.*

LES TÉTRAGRAMMES MATHÉMATIQUES.

Jehovah s'écrit en hébreu avec quatre lettres; il est défendu à un israélite de prononcer ces lettres. Ainsi Jehovah, lisez *Adonaï*. Il en est de même maintenant pour certaines expressions qu'il n'est pas permis de prononcer dans l'enseignement secondaire.

Différentielle, prononcez *prime*.
Intégrale, prononcez *primitive*.
Couple, prononcez *rotation*.

Il y a même des mots sur lesquels il faut garder un silence respectueux; par exemple : *homothétie, rapport anharmonique*, *homographie*, *pôle*, *polaire*, *etc.*, et autres expressions qui, appartenant à la cabale mathématique, ne doivent pas être répandues chez le vulgaire. Je possède le fameux livre Razael : il y a des formules telles, qu'en les prononçant on peut incendier tel édifice qu'on veut. On comprend le danger qu'il y aurait de répandre de telles formules.

CROMWELL ET NEWTON COMPARÉS PAR VOLTAIRE.

Cromwell (Olivier), né en 1599, mort en 1658. Il n'y a guère d'exemples en Europe d'aucun homme qui, venu de si bas, se soit élevé si haut. Mais que lui fallait-il absolument avec tous ses grands grands talents? La fortune? il l'eut cette fortune. Mais fut-il heureux? il vécut pauvre et inquiet jusqu'à quarante-trois ans; il se baigna depuis dans le sang, passa sa vie dans le trouble et mourut avant le temps à cinquante-sept ans.

Newton (Isaac), né en 1642, mort en 1727. Que l'on compare à cette vie celle de Newton, qui a vécu quatre-vingt-quatre années, toujours tranquille, toujours honoré, toujours la lumière de tous les êtres pensants, voyant augmenter chaque jour sa renommée, sa réputation, sa fortune, sans avoir jamais ni soin, ni remords; et qu'on juge lequel a été le mieux partagé.

O curas hominum, o quantum est in rebus inane!

(PERS. *Sat.* I, v. 1.)

(*Dictionnaire philosophique*, article CROMWELL.)

PREMIER EXEMPLAIRE

de l'édition stéréotype des Tables de Logarithmes de Lalande, annoté par l'auteur.

Je possède le premier exemplaire que Lalande reçut en 1802.

Voici comment et de quelle manière ces Tables stéréotypées, qui sont devenues si répandues, ont été données au public.

Lalande (*), comme on le sait, notait minutieusement tout ce qui le concernait, et je joins ici ce qu'il a noté de sa plume de corbeau, dont il avait l'habitude de se servir, sur l'exemplaire dont il s'agit. Ce sont peut-être là des singularités de bibliomane; je suis loin d'en disconvenir. Il me semble cependant assez curieux de voir

(*) Jérome-François de La Lande, né à Bourg-en-Bresse, 11 juillet 1732, mort à Paris, 4 avril 1807.

que la publication de ces Tables, qui depuis ont été tant de fois réimprimées, a peut-être tenu à une misérable somme de 150 francs prêtée par Lalande à M. Didot, et que, sans cette facilité, l'imprimeur ne se serait peut-être pas décidé à fondre les caractères et à se risquer à imprimer, car les Tables à 6 décimales, publiées bien antérieurement et dès 1760 par les soins de La Caille et de Lalande, très-répandues à cette époque, et nombre de fois réimprimées avec la savante explication de l'abbé *Marie*, pouvaient être regardées comme suffisantes aux besoins des calculateurs.

Ces Tables allaient souvent jusqu'à 20 000; mais, selon Lalande, elles ne doivent pas outrepasser les 10 000, ce nombre lui paraissant suffisant, à tel point que de l'exemplaire de la dernière de ces Tables dont il se servait au moment de sa mort, et que je possède chargé de ses annotations, il en avait supprimé les 10 000.

Au surplus, le projet de Lalande a porté ses fruits, et par l'exiguïté de son format et la netteté des caractères de MM. Didot, cette publication a puissamment contribué à propager l'usage si précieux du calcul logarithmique. Ces mêmes Tables à 5 décimales, de même que celles des sinus, des tangentes, etc., ont été stéréotypées toujours sous le nom de Lalande, en plus d'une partie du monde et spécialement à Leipsig en 1833 par les soins de M. *H.-G. Köhler*, docteur en philosophie, qui y a joint une assez grande quantité de Tables spéciales, de même que celles des logarithmes de M. *Gauss*, dont vous parlez dans votre *Bulletin*. En un mot, cette édition me paraît constituer un véritable manuel de calcul logarithmique.

Notes de Lalande sur son exemplaire de 1802.

6 novembre 1799. — Projet arrêté avec Didot.

13 novembre. — Commencé l'explication.

7 février 1800. — 150 francs prêtés à Didot pour la fonte.

17 mars. — Première page d'essai. Il change le caractère.

24 août 1801. — Dernière épreuve.

Octobre. — On fait un tirage de 2 000.

23 octobre 1803. — Mention de l'ouvrage dans le *Journal des Débats*.

23 octobre. — Mention de l'ouvrage dans le *Moniteur* du 24, dans la *Clef du Cabinet* et dans l'*Histoire de l'Astronomie*, à l'*errata*.

Le 25 octobre. — Je promets 100 francs pour chaque faute.

Le 6 juin 1803, il y en avait déjà 2 500 de vendus.

En novembre 1804, je corrige l'explication.

FOURNERAT,
Juge honoraire du tribunal de la Seine,
à Ancy-le-Franc (Yonne).

BIBLIOGRAPHIE.

DISSERTATIO INAUGURALIS QUA SELECTA DE JURIBUS MATHEMATICORUM CAPITA in illustri Academia Basileensi pro obtinendo jurium doctoris gradu publicæ disquisitioni submittit *Joh. Fridericus Weidlerus*. A. R. G., MDCCXXVII, d. 24. mart. Basileæ. Litteris Brandmillerini. In-4°, 40 pages.

Cette instructive Thèse renferme six chapitres.

CAP. I. *De nominis mathematicorum, prouti in legibus occurrit significatione singulari et ejus causis.*

Au titre 18, lib. 9, du Digeste, on lit : *De maleficis et mathematicis et ceteris similibus*. On confond les mathématiciens avec les astrologues, les magiciens, etc.

Voir Tacite, *Hist.* lib. I, c. 22. Juvenal, *Sat.* XIV, v. 248.

On lit dans Aulu-Gelle, *N. A.* lib. I, c. 9 : *Vulgus, quos Chaldeos gentilitio vocabulo dicere oportet, mathematicos dicit.*

Cap. II. *De methodi mathematicæ usu in jurisprudentia.*

Cap. III. *De juribus arithmeticorum.*

Ces arithméticiens portaient divers noms.

1° *Calculatores*; 2° *tabularii*; 3e *discussores*; 4° *ratiocinatores.*

Les calculateurs jouissaient de ce droit : le chef de la province (*provinciæ præses*) était tenu de juger leurs procès avant ceux des autres.

Discussores erant qui rationes publicas ab aliis tractatas sub examen vocabant.

Espèce de conseillers de la chambre des comptes; ils exerçaient aussi un certain arbitrage, ainsi que les *ratiocinatores.*

Tous ces arithméticiens étaient exempts de la milice et de payer certains impôts.

On comprend l'importance qu'avaient les calculateurs avant l'introduction des chiffres arabes; certains comptes exigeaient autant de jours qu'aujourd'hui d'heures.

Cap. IV. *De juribus geometrarum.*

On distingue : 1° *mensores*; 2° *agrimensores*; 3° *geodætæ*; 4° *metatores.*

Il y avait des *mensores* : 1° *agrorum*; 2° *frumentorum*; 3° *militares.*

Mensuræ in jure romano sequentes commemorantur.

Digitus; tube d'un diamètre égal à l'épaisseur d'un doigt; en usage dans l'hydrométrie.

Pes, *cubitus*, *passus*, *decempeda*, *milliarium*.

Areæ agrorum : Actus = carré de 120 pieds de côté.

Jugerum = *actus duplicatus et ab eo quod erat junctum, nomen jugerius usurpavit.*

CAP. V. *Jure pictorum sive opticorum.*

CAP. VI. *Jure architectorum et mechanicorum.*

Severus et Celer étaient les mécaniciens de Néron. (Tacite, *Ann.* lib. XV, cap. 42.)

SUR LES DIVERSES DÉFINITIONS D'APRÈS LEIBNIZ.

Vers 1686, Leibniz écrivit en français (*) *un discours de métaphysique* qu'il envoya à l'illustre Arnauld pour en avoir son avis; il nie l'action du corps sur l'âme et des substances les unes sur les autres : ce sont des apparences, dont la réalité consiste dans l'intervention directe de Dieu; en d'autres termes, c'est son système de l'*harmonie préétablie*, développé depuis dans la Théodicée. Chaque substance exprime tout l'univers; c'est ce que Kant a nommé *das dingan sich selbst* (*ens per se*), et dont nous n'avons aucune connaissance; en résumé, ce discours est un développement scientifique de cette assertion de saint Jean, *vivimus in Deo;* cette vérité à laquelle nous devons la notion de certitude logique, de devoir moral, renferme en raccourci les bases des systèmes de Spinosa et de Malebranche, de Hegel. Leibniz croit aussi

---

(*) Parmi les géomètres du XVII^e siècle, Leibniz écrit notre langue aussi bien que Descartes et n'est inférieur qu'à Pascal, écrivain hors rang.

avoir expliqué la question épineuse de raccorder la prévision divine avec la liberté humaine, et il n'a fait qu'obscurcir la matière; le tout pour n'avoir pas, comme Kant, rangé le temps parmi les formes des aperceptions humaines, nullement applicable à Dieu; mais Leibniz nie la réalité de l'espace; en quoi il a un grand avantage sur Spinosa, qui fait de l'espace un attribut divin. Au reste, ces sujets sont étrangers à notre *Bulletin*, mais nous jugeons utile de rapporter le paragraphe XXIV de ce discours, qui a de l'intérêt pour les géomètres.

« 24. Pour mieux entendre la nature des idées, il faut toucher quelque chose de la variété des connoissances. Quand je puis reconnoître une chose parmi les autres, sans pouvoir dire en quoy consistent ces différences ou propriétés, la connoissance est *confuse*. C'est ainsi que nous connoissons quelquefois clairement, sans estre en doute en aucune façon, si un poëme ou bien un tableau est bien ou mal fait, parce qu'il y a un je ne sçais quoy qui nous satisfait ou qui nous choque (*) ; mais lorsque je puis expliquer les marques que j'ay, la connoissance s'appèle *distincte*. Et telle est la connoissance d'un essayeur, qui discerne le vray or du faux par le moyen de certaines épreuves ou marques qui sont la definition de l'or. Mais la connoissance *distincte* a des degrés, car ordinairement les notions qui entrent dans la definition, auraient besoin elles-mêmes de definition et ne sont connues que confusément (**). Mais lorsque tout ce qui entre dans une defini-

---

(*) Ces sortes de jugements, dont on ne peut toujours se rendre compte, constituent le bon goût. Les théories des osculations, des incommensurables, des quantités infinitésimales sont des connaissances confuses, mais certaines. Telle est aussi la notion sans laquelle aucune autre n'existe, du *moi*. Tm.

(**) La définition de la droite, *chemin le plus court;* mais chemin a besoin d'une définition. Tm.

tion ou connaissance distincte est connu distinctement, jusqu'aux notions primitives, j'appelle cette connoissance *adequate*. Et quand mon esprit comprend à la fois et distinctement tous les ingrediens primitifs d'une notion, il en a une connoissance *intuitive* (*) qui est bien rare, la plupart des connoissances humaines n'estant que confuses ou bien suppositives. Il est bon aussi de discerner les definitions nominales et les reelles. J'appelle *definition nominale*, lorsqu'on peut encore douter si la notion definie est possible, comme, par exemple, si je dis qu'une vis sans fin est une ligne solide (**) dont les parties sont congruentes ou peuvent inceder l'une sur l'autre; celuy qui ne connoist pas d'ailleurs ce que c'est qu'une vis sans fin, pourra douter si une telle ligne est possible, quoyque en effect ce soit une propriété reciproque (***) de la vis sans fin, car les autres lignes dont les parties sont congruentes (qui ne sont que la circonference du cercle et la ligne droite) sont planes, c'est-à-dire se peuvent decrire *in plano*. Cela fait voir que toute propriété reciproque peut servir à une definition nominale, mais lorsque la proprieté donne à connoistre la possibilité de la chose, elle fait la definition reelle, et tandis qu'on n'a qu'une definition nominale, on ne sauroit s'assurer des consequences qu'on en tire, car si elle cachoit quelque contradiction, ou impossibilité, on en pourroit tirer des conclusions opposées. C'est pourquoy les verités ne depen-

(*) Par *intuitive*, on entend ordinairement ce qu'on conçoit de suite, sans réflexion, du moins sans que nous ayons la conscience de cette réflexion. Il suffit de *regarder le sujet*, *intueri*. Tm.

(**) Ligne s'étendant dans l'espace, à double courbure.

(***) Ce mot *réciproque* n'a pas ici le sens habituel : il signifie ici deux choses qui s'obtiennent par la même voie. Deux droites parallèles sont partout également distantes; deux courbes parallèles sont une propriété réciproque, dans le sens de Leibniz.

dent pas des noms et ne sont point arbitraires comme quelques nouveaux philosophes ont cru (*). Au reste, il y a encore bien de la difference entre les especes de definitions reelles, car quand la possibilité ne se prouve que par experience comme dans la definition du vif argent dont on connoist la possibilité, parce qu'on sçait qu'un tel corps se trouve effectivement qui est un fluide extremement pesant, et neantmoins assé volatile, la definition est seulement reelle et pas davantage; mais si la preuve de la possibilité se fait *a priori*, la definition est encore *reelle* et *causale*, comme lorsqu'elle contient la generation possible de la chose; et quand elle pousse l'analyse a bout jusqu'aux notions primitives sans rien supposer, qui ait besoin de preuves *a priori* de sa possibilité, la definition est parfaite ou *essentielle.* » (Extrait du *Briefwechsel zwischen Leibniz, Arnauld, etc.;* édité par C.-L. Grotenfeld. Hanovre, 1846; p. 178.)

CHARLES (JACQUES) LE GÉOMÈTRE.

Né à Cluny (Saône-et-Loire) : on ignore l'année de sa naissance; décédé à Paris, hôtel Royal, place du Palais-Royal, et enterré le 22 août 1791 à Saint-Germain-l'Auxerrois. (Renseignement recueilli par M. Bienaymé, membre de l'Institut.)

Tous les biographes et bibliographes, sans exception, confondent le géomètre, membre de l'Académie, avec son homonyme le physicien, aéronaute, mort en 1823.

Une biographie de l'académicien est un *desideratum* à remplir par le Secrétaire perpétuel de l'Institut.

(*) Entre autres Pascal. TM.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME VI.)

Analyse algébrique.

Arithmologie.

Fonctions elliptiques.

Géométrie.

Mécanique.

Historique et Biographie.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des Collaborateurs sont précédés d'un astérisque.)

Pages.

ERRATUM.

TOME III.

Page 92, ligne 9, *au lieu de* 80, *lisez* 380.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.