J. del Beccaro

Solution de la question 351

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 73-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__73_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 351

(voir t. XV, p. 459) ;

PAR M. LE Dr J. DEL BECCARO,
Ancien élève de l'Ecole Normale de Pise.

Soient les équations

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0 \quad (\text{racines } \alpha, \alpha', \alpha''),$$
$$x^3 - p'x^2 + q'x - r' = 0 \quad (\text{racines } \beta, \beta', \beta''),$$

et posons

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} \quad D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix} \quad D_6 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 27r^2 + 4q^3 - 18pqr + 4p^3r - p^2q^2,$$
$$\Delta' = 27r'^2 + 4q'^3 - 18p'q'r' + 4p'^3r' - p'^2q'^2.$$

Démontrer que l'équation suivante en t

$$t[t + (p^2 - 3q)(p'^2 - 3q'^2)]^2$$
$$- \frac{1}{16}\left[\sqrt{\Delta}\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right) \pm \sqrt{\Delta'}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)\right]^2 = 0$$

a pour racines les quantités $-D_1^2$, $-D_2^2$, $-D_3^2$, $-D_4^2$, $-D_5^2$, $-D_6^2$. (MICHAEL ROBERTS.)

Du développement de la quantité D_1^2,

$$D_1^2 = (p^2p_1^2 - 4M) + 2pp'z_1 - 3z_1^2$$

où

$$M = p^2 q' + p'^2 q - 3qq',$$

et z_1 exprime la fonction

$$z_1 = \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'',$$

on déduit ceux de D_2^2, D_3^2, D_4^2, D_5^2, D_6^2 en y échangeant z_1 en z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, qui sont les valeurs différentes que peut prendre la fonction z. Laissant les α et changeant β' en β'' et *vice versâ* pour z_2, etc.

Puisque z_1, z_2, z_3 peuvent être regardées comme racines de l'équation

$$z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N - \sqrt{\Delta\Delta'}) = 0,$$

et z_4, z_5, z_6 de l'autre équation

$$z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N + \sqrt{\Delta\Delta'}) = 0$$

(voir *Nouvelles Annales*, M. Roberts, t. XV, p. 77), on peut calculer, par la théorie des fonctions symétriques, les coefficients des deux équations suivantes

$$t^3 + t^2\Sigma D_1^2 + t\Sigma D_1^2 D_2^2 + D_1^2 D_2^2 D_3^2 = 0,$$
$$t^3 + t^2\Sigma D_4^2 + t\Sigma D_4^2 D_5^2 + D_4^2 D_5^2 D_6^2 = 0,$$

qui ont pour racines $-D_1^2$, $-D_2^2$, $-D_3^2$ et $-D_4^2$, $-D_5^2$, $-D_6^2$.

$$\Sigma z_1 = pp',$$
$$\Sigma z_1^2 = p^2 p'^2 - 2M,$$
$$\Sigma z_1 z_2 = M,$$
$$\Sigma z_1 z_2^2 = pp'M - \frac{3}{2}(N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$
$$\Sigma z_1^2 z_2^2 = M^2 - pp'(N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$

$$z_1 z_2 z_3 = \frac{1}{2}\left(N - \sqrt{\Delta\Delta'}\right),$$

$$\Sigma z_1 z_2 z_3^2 = \frac{1}{2} pp' \left(N - \sqrt{\Delta\Delta'}\right),$$

$$\Sigma z_1^2 z_2^2 z_3 = \frac{1}{2} M \left(N - \sqrt{\Delta\Delta'}\right),$$

$$(z_1 z_2 z_3)^2 = \frac{1}{4}\left(N - \sqrt{\Delta\Delta'}\right)^2;$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Sigma D_1^2 &= 3(p^2 p'^2 - 4M) + 2pp'\Sigma z_1 - 3\Sigma z_1^2 \\ &= 2(p^2 - 3q)(p'^2 - 3q'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma D_1^2 D_2^2 &= 3(p^2p'^2 - 4M)^2 + 4(p^2p'^2 - 4M)pp'\Sigma z_1 \\ &\quad - 6(p^2p'^2 - 4M)\Sigma z_1^2 + 4p^2p'^2\Sigma z_1 z_2 \\ &\quad - 6pp'\Sigma z_1^2 z_2 + 9\Sigma z_1^2 z_2^2 = (p^2 - 3q)^2(p' - 3q')^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&D_1^2 D_2^2 D_3^2 \\ &= M^2(p^2p'^2 - 4M) + pp'N(9M - 2p^2p'^2) \\ &\quad - \frac{27}{4}(N^2 + \Delta\Delta') + \sqrt{\Delta\Delta'}\left(\frac{27}{2}N - 9pp'M + 2p^3p'^3\right) \\ &= -\Delta'' - \frac{27}{4}\Delta\Delta' + \sqrt{\Delta\Delta'}\cdot\frac{1}{2}\left(27N - 18pp'M + 4p^3p'^3\right),\end{aligned}$$

désignant par Δ'' le discriminant de l'équation

$$z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}N = 0.$$

Mais au moyen des expressions

$$\frac{d\Delta}{dr}\cdot\frac{d\Delta'}{dr'} = 4(27N - 18pp'M + 4p^3p'^3),$$

on a

$$\Delta'' = \frac{1}{16}\left[\Delta\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right)^2 + \Delta'\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)^2 - 108\,\Delta\Delta'\right]$$

(voir *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 78) la fonction $D_1^2 D_2^2 D_3^2$ devient

$$D_1^2 D_2^2 D_3^2 = -\frac{1}{16}\left[\sqrt{\Delta}\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right) - \sqrt{\Delta'}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)\right]^2.$$

De même les quantités ΣD_4^2, $\Sigma D_4^2 D_5^2$, $D_4^2 D_5^2 D_6^2$ s'expriment de la manière suivante :

$$\Sigma D_4^2 = \Sigma D_1^2,$$

$$\Sigma D_4^2 D_5^2 = \Sigma D_1^2 D_2^2,$$

$$\begin{aligned} D_4^2 D_5^2 D_6^2 &= -\Delta'' - \frac{27}{4}\Delta\Delta' - \sqrt{\Delta\Delta'}\cdot\frac{1}{2}(27\,N - 18pp'M + 4p^3p'^3) \\ &= -\frac{1}{16}\left[\sqrt{\Delta}\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right) + \sqrt{\Delta'}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)\right]^2. \end{aligned}$$

De sorte que les équations en t deviennent

$$\begin{aligned} &t[t + (p^2 - 2q)(p'^2 - 2q')]^2 \\ &- \frac{1}{16}\left[\sqrt{\Delta}\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right) \mp \sqrt{\Delta'}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)\right]^2 = 0; \end{aligned}$$

et sont satisfaites par les quantités $-D_1^2$, $-D_2^2$, $-D_3^2$, $-D_4^2$, $-D_5^2$, $-D_6^2$, comme il fallait le démontrer.

Corollaire. L'équation dont les racines sont les déterminants D_1^2, D_2^2, D_3^2, D_4^2, D_5^2, D_6^2 est

$$\begin{aligned} &t[t - (p^2 - 2q)(p'^2 - 2q')]^2 \\ &+ \frac{1}{16}\left[\sqrt{\Delta}\left(\frac{d\Delta'}{dr'}\right) \pm \sqrt{\Delta'}\left(\frac{d\Delta}{dr}\right)\right]^2 = 0. \end{aligned}$$