NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VANNSON

Formules fondamentales de l'analyse sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 5-26

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir t. XVII, p. 307),

PAR M. VANNSON.

Propriétés des tangentes.

L'équation de la tangente sera

$$\frac{yy'}{b^2} + \frac{xx'}{a^2} = 1.$$

Étant donnée une circonférence de grand cercle $y = Ax + B$, si on demande la condition pour qu'elle soit tangente à l'ellipse, on écrira que les deux équations sont identiques, ce qui conduira à la condition

$$B = \pm \sqrt{A^2 a^2 + b^2}.$$

L'équation d'une tangente pourra donc se représenter par la formule

$$y = Ax \pm \sqrt{A^2 a^2 + B^2}.$$

Si on cherche la rencontre des deux lignes ainsi représentées, on trouvera qu'elle a lieu à 90 degrés de l'origine ou du centre en un point dont la latitude a pour tangente

A (*voyez* la tangente au cercle). Le signe + se rapporte à la tangente LC située au-dessus du diamètre LO, et le signe — à la tangente LD au-dessous de LO; LO a pour équation

$$y = mx.$$

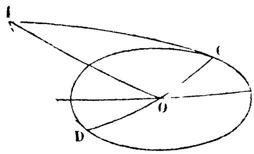
Si on mène un rayon au point de contact C, et qu'on désigne par A′ le coefficient angulaire de ce rayon, on aura

$$A' = \frac{y'}{x'};$$

donc entre ce coefficient et celui A de la tangente on a la relation

$$AA' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Fig. 1



Soit OL le conjugué de OC et A″ son coefficient, on a aussi

$$A' A'' = -\frac{b^2}{a^2},$$

donc

$$A = A'';$$

d'où il résulte que la tangente et le diamètre OL se rencontrent à 90 degrés du centre en un point dont la latitude a pour tangente

$$A = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

On pourrait donc mener une tangente en C en menant le diamètre OC, déterminant son conjugué (nous avons vu le moyen plus haut), prenant sur ce conjugué OL un arc égal à 90 degrés, et joignant le point obtenu au point C.

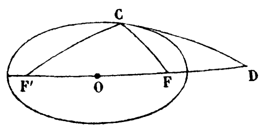
On peut aussi se servir de la relation

$$X x' = a^2,$$

X étant la tangente du segment déterminé par la rencontre de la tangente avec l'axe.

Théorème. *La tangente divise en parties égales l'angle formé par un rayon vecteur mené du foyer au point de contact et le prolongement de l'autre rayon vecteur.*

Fig. 2.



Il suffit pour cela de démontrer qu'on a la relation

$$\frac{\sin F'C}{\sin FC} = \frac{\sin F'D}{\sin FD}.$$

Or, nous avons trouvé précédemment

$$\operatorname{tang}\left(\frac{F'C + FC}{2}\right) = a \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\left(\frac{F'C - FC}{2}\right) = \frac{Cx'}{a}.$$

Ajoutant et soustrayant membre à membre, puis divisant, on trouve

$$\frac{\sin F'C}{\sin FC} = \frac{a^2 + Cx'}{a^2 - Cx'};$$

d'autre part nous avons trouvé

$$\operatorname{tang} OD = \frac{a^2}{x'};$$

on a d'ailleurs

$$\tang OF = C ;$$

opérant sur ces équations comme sur les précédentes, on a

$$\frac{\sin F' D}{\sin FD} = \frac{a^2 + Cx'}{a^2 - Cx'} ;$$

donc

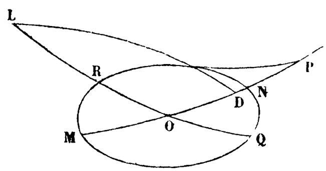
$$\frac{\sin F' C}{\sin FC} = \frac{\sin F' D}{\sin FD} . \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela donne le moyen de mener par un point quelconque une tangente à l'ellipse, comme sur un plan.

Quand la courbe est rapportée à deux diamètres conjugués, l'équation de la tangente ne change pas de forme, c'est toujours

$$\frac{yy'}{b_{,}^2} + \frac{xx'}{a_{,}^2} = 1 .$$

Fig. 3.



Si on cherche l'intersection de la tangente avec l'axe des x, on trouve

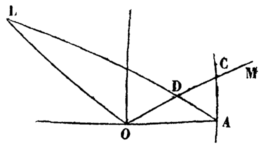
$$xx' = a_{,}^2 ;$$

d'où l'on voit que si l'on prolonge une tangente jusqu'à la rencontre d'un diamètre quelconque en P, et qu'on joigne le point du conjugué à 90 degrés de l'origine au point de contact, qu'on prolonge l'arc obtenu jusqu'au premier diamètre en D, on aura

$$\tang ON \tang OP = \tang^2 ON .$$

Première application. *On donne dans une ellipse* a, α, α', *trouver les trois autres quantités* **b**, a′, **b**′ (*Voir* t. XIII, p. 169).

Fig. 4.



Soit OA = le demi-axe dont a est la tangente ; j'élève au point A un arc perpendiculaire à OA, il sera tangent à la courbe. Soit C sa rencontre avec un des diamètres dont on donne la direction.

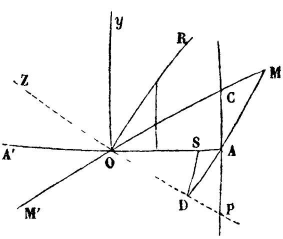
Si nous prenons sur l'autre OL = 90°, que nous menions l'arc LA qui coupe en D le diamètre OM, on aura par le théorème précédent

$$a_{,}^{2} = \operatorname{tang} OD \operatorname{tang} OC.$$

Ce qui permettra de construire le diamètre suivant OM. Le reste a déjà été exposé.

Deuxième application. *On donne* a, α, b', *trouver les trois autres quantités.*

Fig. 5.



Soient AA′ l'axe donné et MOA l'angle α. J'élève au point A sur l'axe un arc perpendiculaire AC qui est tangent à la courbe. Soit OP la direction inconnue du conjugué.

Prenons OCM $= 90^{\circ}$. Joignons MA par un arc qui coupe en D l'arc OP. Nous aurons par le théorème précédent

$$\operatorname{tang} OD \operatorname{tang} OP = b_{\prime}^{2}.$$

Soit mené l'arc DS perperdiculaire sur OP, nous aurons

$$\frac{\operatorname{tang} OD}{\operatorname{tang} OS} = \frac{\operatorname{tang} OA}{\operatorname{tang} OP};$$

d'où

$$\operatorname{tang} OS \operatorname{tang} OA = \operatorname{tang} OD \operatorname{tang} OP = b_{\prime}^{2}.$$

On a donc

$$\operatorname{tang} OS = \frac{b_{\prime}^{2}}{a},$$

ce qui détermine le point S.

Mais le lieu des sommets des triangles rectangles ayant pour hypoténuse OS est une ellipse dont nous avons déjà déterminé les axes. OS est l'un des axes et l'autre β se trouve par la formule

$$\sin \beta = \operatorname{tang} \frac{OS}{2};$$

la question revient donc à trouver la rencontre d'un grand cercle MA avec une ellipse dont on connaît les axes. (Problème déjà résolu.)

Discussion. Pour que le problème soit possible, il faut que le cercle MAD coupe l'ellipse. Or celle-ci a pour équation (résultat déjà trouvé)

$$x^{2} + y^{2} - A x = 0,$$

A étant la tangente de OS $= \frac{b_{\prime}^{2}}{a}$. Le cercle MA passant par un point M de latitude α et par le point A a pour équation

$$y = \alpha'(x - a), \quad (\alpha' = \operatorname{tang} \alpha);$$

combinant ces deux équations, on trouve par l'élimination de y,

$$(\alpha_{,}^2+1)x^2-(2a\alpha_{,}^2+A)x+a^2\alpha_{,}^2=0.$$

Pour que les racines soient réelles, il faut avoir

$$A>2a\,\text{tang}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right);$$

d'où

$$b_{,}^2>2a^2\,\text{tang}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ce qui donne le minimum de b'. Si on suppose pour b' sa valeur minimum, les racines sont égales et on trouve

$$x=a\sin\alpha';$$

d'où

$$y=-\alpha' a(1-\sin\alpha').$$

Si on divise y par x, on aura la tangente de l'angle AOZ compris entre la direction du diamètre b' et l'axe de la courbe a. On trouve que cet angle $\text{AOZ}=\frac{\alpha'+90^\circ}{2}+90^\circ$. Ce qui démontre que la direction du diamètre b', dans le cas du minimum, est bissectrice de l'angle formé par l'axe des y et OM′ prolongement de OM. De là résulte ce théorème :

Parmi toutes les ellipses qu'on peut construire sur un axe donné, il y en a une pour laquelle le conjugué d'un diamètre OM *de direction connue est minimum, et dans cette ellipse, la direction de ce conjugué divise en parties égales l'angle formé par le second axe et le prolongement du diamètre donné* OM.

Le même théorème a lieu sur un plan.

Théorème à démontrer. *Si aux extrémités* AB *d'un* *axe, on mène deux tangentes et qu'on les coupe par une troisième aux points* M *et* N, *qu'on projette* AM *et* BN *sur l'autre axe, le produit des tangentes des deux projections est égal à la tangente carrée de la moitié de cet axe, et si on multiplie* tang AM *par* tang BN, *on trouve la tangente carrée de ce même demi-axe multipliée par le cosinus carré du premier.*

La première partie de l'énoncé est encore vraie, quand on remplace les axes par un système de diamètres conjugués.

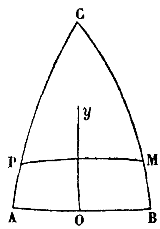
Ce théorème peut servir à résoudre le problème suivant :

On donne un des axes d'une ellipse et une tangente, trouver l'autre axe.

On peut aussi en tirer le corollaire :

Étant donné un triangle bi-rectangle ABC, si on coupe

Fig. 6



par un arc les côtés en M et P, de manière que le produit des tangentes des segments à partir de la base soit constante $= \text{tang}^2\varphi$, la courbe enveloppe de l'arc sécant est une ellipse sphérique, dont un axe est AB et dont l'autre s'obtient en prenant $AP = BM = \varphi$, et joignant PM, l'intersection de cet arc avec la perpendiculaire Oy donne l'extrémité du second axe.

Théorème a démontrer. *Si on mène en un point* A *d'une ellipse une tangente, qu'on la prolonge jusqu'à la rencontre en* M, N *de deux diamètres conjugués pris pour axes, qu'on construise le demi-diamètre conjugué de celui qui passe au point* A, *la tangente carrée de la projection de ce demi-diamètre sur un des deux premiers égale le produit des tangentes des projections des deux segments de la tangente (il s'agit ici de projections obliques)*.

Si au lieu de deux diamètres on prend les axes, et qu'on appelle b' la tangente du diamètre conjugué de celui qui passe au point de contact, le produit des tangentes trigonométriques des deux segments de la tangente égalera

$$b'^2 \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b.$$

Cette relation sert à résoudre le problème suivant :

Étant donnés les axes d'une ellipse non construite, lui mener une tangente telle, que le produit des tangentes des deux segments interceptés entre le point de contact et les axes soit égal à une quantité donnée P.

La relation donnera b'^2. Connaissant a, b et b', on pourra par une construction déjà faite trouver la direction du diamètre b', ainsi que la direction et la grandeur OA de son conjugué; il suffira alors de joindre le point A à un point pris sur b' à 90 degrés de l'origine.

Discussion. Pour que le problème soit possible, il ne suffit pas qu'on trouve pour b'^2 une valeur positive, il faut qu'on la trouve comprise entre a^2 et b^2. Ce qui conduit aux conditions

$$P < \sin^2 \alpha, \quad P > \sin^2 \beta,$$

α et β désignant les demi-axes. Dans le cas du maximum, la tangente sera menée par l'extrémité du petit axe et réciproquement.

Théorème. *Si des deux foyers d'une ellipse on abaisse des arcs perpendiculaires sur une tangente, le produit des sinus de ces arcs est constant et égal à* $\sin^2 \beta \cos^2 \gamma$, *$\gamma$ étant la distance du centre au foyer, et β le demi-axe perpendiculaire à l'axe des foyers.*

On sait qu'une tangente quelconque peut se représenter par l'équation

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}.$$

La distance δ du foyer à cette tangente est donnée d'après une formule ci-dessus démontrée par l'équation

$$\sin \delta = \frac{\sqrt{a^2 m^2 + h^2} + mc}{\sqrt{1 + b^2 + m^2(1 + a^2)}\sqrt{1 + c^2}},$$

l'autre distance est donnée par l'équation

$$\sin \delta' = \frac{\sqrt{a^2 m^2 + b^2} - mc}{\sqrt{1 + b^2 + m^2(1 + a^2)}\sqrt{1 + c^2}};$$

multipliant membre à membre et observant que

$$\cos a' = \cos b \cos \gamma,$$

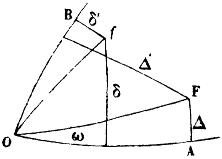
on trouve

$$\sin \delta . \sin \delta' = \sin^2 b \cos^2 c.$$

Ce théorème peut servir à trouver l'axe β, connaissant les foyers et une tangente.

Application. On donne un foyer et deux tangentes,

Fig. 7.



trouver le lieu du second foyer. Soient F le foyer donné, Δ et Δ' ses sinus distances aux deux tangentes OA, OB, f l'autre foyer, δ et δ' les sinus des deux distances.

On aura, par le théorème précédent,

$$\frac{\delta}{\delta'}=\frac{\Delta'}{\Delta};$$

mais

$$\frac{\delta}{\delta'}=\frac{\sin fOA}{\sin(\theta-fOA)};$$

soit

$$fOA=\alpha,$$

on aura

$$\frac{\delta}{\delta'}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)};$$

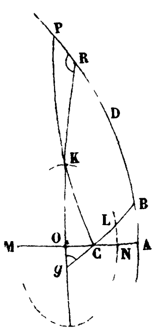
soit β l'angle FOB, on aura de même

$$\frac{\Delta'}{\Delta}=\frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}.$$

D'où on conclut aisément $\alpha=\beta$; donc le lieu du point f est une circonférence de grand cercle passant à l'origine et par un point symétrique de F relativement à la bissectrice.

Corollaire. Si d'un point O on mène deux tangentes à

FIG. 8.



une ellipse et qu'on joigne le point O aux deux foyers par deux arcs de grands cercles, ces arcs feront avec les deux tangentes, des angles égaux. Si on demandait le lieu du centre qui sur un plan est une ligne droite parallèle au lieu du foyer, je dis qu'on trouverait une ellipse sphérique. Cela revient à faire voir que le lieu du milieu de l'arc variable CB terminé d'une part à un point fixe C, et d'autre part à sa rencontre B avec une circonférence AD, est une ellipse.

Posons

$$CB = 2\rho, \quad \tang CA = p \quad \text{et} \quad BCA = \omega,$$

nous avons dans le triangle ABC,

$$p = \tang 2\rho \cos\omega \quad \text{ou} \quad 2 \tang\rho \cos\omega = p\,(1 - \tang\rho),$$

ou passant aux coordonnées rectangles,

$$1 - \frac{2x}{p} = y^2 + x^2.$$

C'est une ellipse dont on pourrait trouver les axes par son équation, mais on les obtient plus aisément par la géométrie. Soit N le point milieu de CA, N sera l'extrémité d'un axe. Prenons $NM = \frac{\pi}{2}$, M sera l'autre extrémité, OK perpendiculaire sur MN sera la direction du second axe. Pour en avoir l'extrémité, construisons le le triangle OCg, de manière que l'angle g = R. Soit K le milieu de gR, joignez CK, prolongez l'arc CK jusqu'en P, K sera, par suite d'une égalité de triangles, le milieu de CKP, donc K est un point du lieu, c'est un sommet. La courbe est alors facile à construire.

On voit donc que *quand on donne deux tangentes et un foyer, le lieu du centre est une ellipse.*

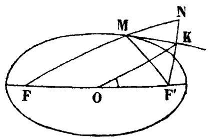
Problème. *Trouver le lieu des projections du foyer sur les tangentes.*

On peut prendre l'équation générale des tangentes

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

et celle d'une perpendiculaire abaissée du foyer sur cette tangente, puis éliminer m entre ces deux équations; mais le calcul est long et compliqué : on arrive beaucoup plus simplement au résultat par le moyen suivant : Soit MK une tangente en M; joignons le point M aux foyers par les

Fig. 9.



arcs MF, MF', prenons sur FM prolongé MN = MF', joignons NF' par un arc qui coupe la tangente en K. K est un point du lieu; j'appelle ρ la distance OK, ω l'angle KOF', et p la distance F'K ou KN dans le triangle KOF', nous aurons

$$(1) \qquad \cos p = \cos c \cos \rho + \sin c \sin \rho \cos \omega,$$

et dans le triangle NFF',

$$(2) \qquad \cos 2\alpha = \cos 2c \cos 2\rho + \sin 2c \sin 2p \cos F';$$

on a encore dans ORF'

$$\cos F' = \frac{\cos \rho - \cos p \cos c}{\sin p \sin c}.$$

Je remplace cos F' par cette expression dans l'équation (2), puis j'élimine $\cos p$ par l'équation (1), on trouve ainsi l'équation

$$\sin^2 \rho (\cos^2 c + \sin^2 c \cos^2 \omega) = \sin^2 \alpha,$$

et passant aux coordonnées rectangles

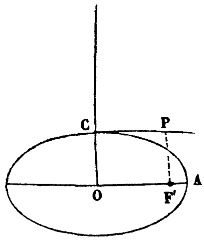
$$\frac{y^2(\cos^2 c - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Le lieu demandé est donc une ellipse concentrique à la première ayant un axe commun 2α ; l'autre axe 2β est donné par la formule

$$\operatorname{tang}^2 \beta = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 e - \sin^2 \alpha}.$$

Si le rayon de la sphère est infini, on trouve un cercle, car $\beta = \alpha$.

Fig. 10.



Quand on a reconnu que la courbe est du second degré, on peut trouver les axes sur la figure. Il est d'abord évident que OA est un axe de la courbe. Pour avoir l'autre, au sommet C menons une tangente CP et projetons le foyer F' sur cette tangente ; l'arc F'P projetant ira couper l'axe des y en un point D à $\frac{\pi}{2} + \beta$ de l'origine ($\beta = \mathrm{OC}$).

Donc on a pour le point P, $y' = -\frac{1}{b}$, l'équation de l'arc F'P sera donc

$$\frac{y}{-\frac{1}{b}} + \frac{x}{c} = 1$$

(c étant la tangente de OF'). Si dans cette équation nous faisons $y = b$, nous aurons les coordonnées du point D. Mais ces coordonnées doivent vérifier l'équation du lieu

$$\frac{y^2}{6'^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

il est donc facile d'avoir 6 ou $\tang 6$; on trouve comme par l'autre méthode

$$\tang^2 6 = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 c - \sin^2 \alpha}.$$

Si d'un point A, pris hors d'une ellipse sphérique, on mène deux tangentes et qu'on divise en parties égales les angles qu'elles font entre elles, les deux bissectrices viennent couper l'axe en deux points tels, que le produit des tangentes de leurs distances au centre est une constante c^2 égale au carré de la demi-distance des foyers. Les tangentes ont pour équations

$$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}, \quad y = m'x + \sqrt{a^2 m_1^2 + 6^2}.$$

Les bissectrices ont pour équations

$$\frac{y - mx - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + b^2 + m^2(1 + a^2)}} = \frac{y - m'x - \sqrt{a^2 m_1^2 + b^2}}{\pm\sqrt{1 + b^2 + m_1^2(1 + a^2)}},$$

ou

$$r(y - mx - s) = r'(y - m'x - s'),$$

en appelant r et r' les inverses des dénominateurs et s, s', les deux radicaux du numérateur. Faisant $y = 0$, on trouve

$$x = \frac{rs - r's'}{m'r' - mr};$$

pour l'autre bissectrice, il faut changer le signe de r', ce qui donne

$$X = -\frac{rs + r's'}{m'r' + mr};$$

d'où on tire

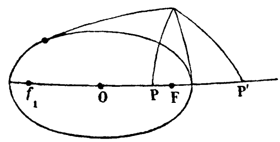
$$Xx = \frac{r_{,}^2 s_{,}^2 - r^2 s^2}{m_{,}^2 r_{,}^2 - m^2 r^2} = \frac{r_{,}^2 (a^2 m_{,}^2 + b^2) - r^2 (a^2 m_{,}^2 + b^2)}{m_{,}^2 r_{,}^2 - m^2 r^2}$$

$$= a^2 + \frac{b^2 (r_{,}^2 - r^2)}{m_{,}^2 r_{,}^2 - m^2 r^2} = a^2 + \frac{b^2 (1 + a^2)(m^2 - m_{,}^2)}{m_{,}^2 (1 + b^2) - m^2 (1 + b^2)}$$

$$= a^2 - \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = C^2,$$

C désignant la tangente de la demi-distance des foyers.

FIG. 11.



Il suit de là que si avec 2C comme arc diamétral on traçait un cercle, les deux points P et P' seraient tels, que la polaire de l'un relative à ce cercle passerait par l'autre, donc les points de rencontre des bissectrices avec l'axe et les deux foyers sont quatre points harmoniques. Ce théorème peut servir à construire une ellipse connaissant le centre, la direction de l'axe et deux tangentes. On peut encore en conclure que si on donne deux tangentes et un foyer, le lieu de l'autre foyer est une circonférence de grand cercle.

PROBLÈME. *Trouver le lieu des sommets d'angles droits dont les côtés sont tangents à une ellipse.*

Soient $x'y'$, $x''y''$ les tangentes des coordonnées des points de contact, les deux tangentes en ces points auront pour équations

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2,$$

$$a^2 yy'' + b^2 xx'' = a^2 b^2,$$

on a aussi

$$a^2y_{\prime}^2 + b^2x_{\prime}^2 = a^2b^2,$$

$$a^2y_{\prime\prime}^2 + b^2x_{\prime\prime}^2 = a^2b^2,$$

et pour que les deux tangentes soient rectangulaires, on a la condition connue

$$a''y'y'' + b''x'x'' + a''b'' = 0,$$

il faut éliminer x', x'', y', y'' entre ces quatre équations. L'élimination se fait comme pour l'ellipse plane, et on trouve pour équation du lieu

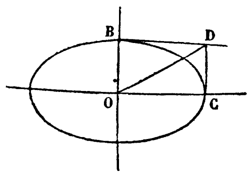
$$(1 - a^2)y^2 + (1 - b^2)x^2 = a^2 + b^2.$$

Premier cas.

$$a^2 < 1, \quad b^2 < 1,$$

on a une ellipse sphérique. Si par les points C et B, som-

FIG. 12.



mets de la courbe donnée, on mène deux tangentes se coupant en D, le cercle concentrique à l'ellipse et passant en D aura pour équation

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

et comme dans la courbe trouvée on a

$$x^2 + y^2 > a^2 + b^2,$$

tous les points de cette courbe sont extérieurs au cercle (OD), par suite ils sont extérieurs à l'ellipse; on pourra donc par chacun d'eux mener deux tangentes, qui se couperont à angle droit.

Deuxième cas. Si on a

$$a^2 > 1 \quad \text{et} \quad b^2 > 1,$$

l'équation trouvée ne sera satisfaite par aucune valeur réelle de y et de x, en sorte que le problème de mener à l'ellipse deux tangentes rectangulaires sera dans ce cas impossible.

Troisième cas.

$$a^2 > 1, \quad b^2 < 1.$$

L'équation trouvée pourra s'écrire ainsi :

$$(a^2 - 1)y^2 - (1 - b^2)x^2 = -(a^2 + b^2),$$

on pourra l'appeler une *hyperbole sphérique,* et tous ses points conviendront encore à la question.

Quatrième cas.

$$a = 1, \quad b < 1.$$

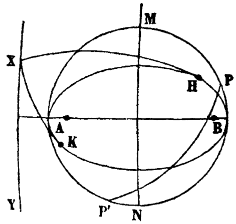
La courbe donnée est une *parabole sphérique,* le lieu trouvé a pour équation

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+b^2}{1-b^2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos 2\beta}},$$

2β représentant le petit axe de la courbe donnée; cette équation représente deux circonférences perpendiculaires à l'axe de 90 degrés; il est aisé de reconnaître que ces circonférences sont les deux directrices de la parabole. Ainsi les directrices d'une parabole sphérique ont, comme sur le plan, la propriété de contenir tous les sommets des angles droits circonscrits à la courbe.

Si on construit une courbe dont les points soient les pôles des tangentes de la courbe donnée, on trouve une

FIG. 13.



ellipse qu'on nomme ellipse *supplémentaire* de la première; elle a avec elle l'axe commun AB; le second axe MN est plus grand que AB. Cela posé, si par un point X de la directrice on mène les tangentes XH, XK, leurs pôles seront deux points P et P_1 de la courbe supplémentaire, l'arc PP' passera donc par le pôle de la directrice XY qui est le foyer de la parabole donnée, et il sera supplémentaire de l'angle X, c'est-à-dire de 90 degrés. On voit donc que si un ellipse a son petit axe de 90 degrés, tous les arcs de même longueur $\frac{\pi}{2}$, inscrits à la courbe, passeront par un point fixe qui sera le foyer de la parabole supplémentaire. (BORGNET.)

On résout, d'une manière analogue, le problème suivant : Trouver le lieu des intersections des tangentes menées par les extrémités de deux diamètres conjugués. L'équation est la même que sur le plan, savoir :

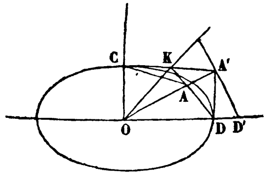
$$\frac{y^2}{(b\sqrt{2})^2} + \frac{x^2}{(a\sqrt{2})^2} = 1.$$

Si par le centre O on mène une sécante coupant les deux courbes aux points A' et A, on aura

$$\text{tang}\, OA' = \text{tang}\, OA \,.\, \sqrt{2}.$$

De là résulte un moyen simple d'obtenir les axes. Menons

FIG. 14.



aux sommets D et C les tangentes DA′, CA′; A′ sera un point du lieu; joignons AD, et abaissons OK perpendiculaire sur AD, puis de A′ abaissons aussi une perpendiculaire sur OK, cette perpendiculaire viendra couper OD en un point D′ qui sera l'extrémité d'un des axes; l'autre sommet C′ se trouve de même.

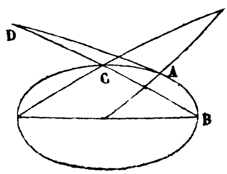
Propriétés des cordes supplémentaires.

Leur définition et la relation entre leurs coefficients angulaires sont comme pour l'ellipse plane. Ainsi en appelant ces coefficients α, α', on aura

$$\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad -\frac{b_{,}^2}{a_{,}^2},$$

selon que la courbe sera rapportée à ses axes ou à un système de diamètres conjugués. Or on a la même relation entre les coefficients angulaires 6, $6'$ d'une tangente et du

FIG. 15.



rayon mené au point de contact; si donc $\alpha = \beta$, on aura

$$\alpha' = \beta',$$

ce qui démontre que quand une tangente rencontre une corde CB à 90 degrés du centre, la corde supplémentaire de CB rencontre aussi à 90 degrés du centre le rayon mené au point de contact.

Cela donne un moyen facile de mener une tangente par un point donné sur la courbe ou par un point situé à 90 degrés du centre.

Si on appelle γ le coefficient angulaire d'un grand cercle et γ' le coefficient du rayon qui joint son pôle au centre, on a aussi

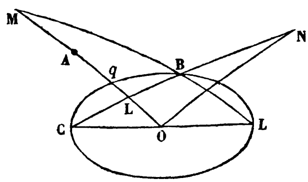
$$\gamma\gamma' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Si donc $\alpha = \gamma$, on aura

$$\alpha' = \gamma',$$

c'est-à-dire que si une corde CB rencontre à 90 degrés du

Fig. 16.



centre un grand cercle, la corde supplémentaire de CB rencontrera aussi à 90 degrés du centre l'arc allant du centre au pôle de ce cercle. Si donc on veut construire la polaire d'un point A, on joindra OA, on prendra sur OA prolongée OM $= 90^\circ$, on joindra M à l'extrémité L de l'axe ou d'un autre diamètre par un arc coupant l'ellipse en B. On mènera CB corde supplémentaire de BL, on prendra sur CB un point N à 90 degrés du centre, et le point N sera un point de la polaire de A. Il sera facile d'en trouver un second par la relation connue

$$\mathrm{tang}^2\, Oq = \mathrm{tang}\, OA \,.\, \mathrm{tang}\, OL.$$

On démontrera aussi facilement que si un diamètre et une corde se coupent à 90 degrés du centre, le conjugué et la corde supplémentaire se coupent à la même distance du centre, ce qui servira à construire deux diamètres conjugués dont l'un passe par un point donné.