NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DEWULF

Propriétés focales des surfaces du deuxième ordre d'après M. Hellermann (voir t. XVII, p. 242)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 46-48

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__46_1>

PROPRIÉTÉS FOCALES DES SURFACES DU DEUXIÈME ORDRE D'APRÈS M. HELLERMANN (*)

(voir t. XVII, p. 242),

PAR M. DEWULF.

Je conserve la notation de M. Hellermann.

Par tout point d'un ellipsoïde passent deux lignes de courbure et deux plans osculateurs à ces lignes. Les deux lignes de courbure sont déterminées par les deux hyperboloïdes homofocaux à l'ellipsoïde qui passent par le point considéré, et les plans osculateurs aux lignes de courbure sont les plans tangents aux hyperboloïdes.

Soient donc

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation de l'ellipsoïde donné, $(x_1\ y_1\ z_1)$ un point M de cette surface.

(*) Ces admirables propriétés appartiennent à M. Valson, professeur de Faculté à Grenoble; il les a énoncées et démontrées dans une thèse remarquable soutenue à Paris en 1855; nous y reviendrons.

En remplaçant dans l'équation (1) a^2, b^2, c^2 par a^2-u^2, b^2-u^2, c^2-u^2, u ayant la valeur de l'une des deux racines de l'équation

$$(2) \qquad \frac{x_1^2}{a^2-u^2}+\frac{y_1^2}{b^2-u^2}+\frac{z_1^2}{c^2-u^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2},$$

nous aurons les équations des deux hyperboloïdes homofocaux qui passent par le point M. Désignons ces deux racines par u_0^2 et u_1^2.

Dans les équations des plans tangents à ces deux hyperboloïdes au point M, faisons $y=0$ et $z=0$, et désignons les distances OP et OQ par α et β; nous aurons

$$\alpha=\frac{a^2-u_0^2}{x_1}, \quad \beta=\frac{a^2-u_1^2}{x_1},$$

d'où

$$(3) \qquad \alpha.\beta=\frac{a^4-a^2(u_0^2+u_1^2)+u_0^2u_1^2}{x_1^2}.$$

Développons en simplifiant l'équation (2)

$$u^4-(a^2+b^2+c^2-x^2-y^2-z^2)u^2+\left(\begin{array}{l} a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \\ -(b^2+c^2)x^2 \\ -(a^2+c^2)y^2 \\ -(a^2+b^2)z^2 \end{array}\right)=0.$$

Tirant de là $u_0^2+u_1^2$ et $u_0^2u_1^2$ et substituant dans l'équation (3), il vient, après simplification,

$$\alpha\beta=\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2}.$$

Désignons par α_1 et β_1, α_2 et β_2 les longueurs qui correspondent à α et β sur les axes des y et des z, nous trouverons, par de simples changements de lettres,

$$\alpha_1\beta_1=-\frac{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{b^2},$$

et

$$\alpha_1\beta_1 = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{c^2}.$$

Le produit $\alpha\beta$ est indépendant de xyz; donc les points P et Q marquent sur l'axe a des divisions en involution dont O est le point central. Les points doubles de ces deux séries sont réels et sont situés de part et d'autre du centre à la distance $\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}{a}$. On sait que ces points doubles divisent harmoniquement les segments déterminés par deux points correspondants.

α_1, β_1 étant négatif, les points doubles sont imaginaires sur l'axe moyen b; ils sont réels sur le petit axe c.

Si par les points F et F′ et par l'intersection de deux plans osculateurs on mène deux plans, les angles qu'ils forment entre eux sont partagés en parties égales par les plans osculateurs.

Cela résulte de la théorie des faisceaux en involution. Dans un faisceau de plans en involution, il n'existe que deux plans correspondants rectangulaires, et ces plans sont les plans bissecteurs des angles des plans doubles.

Les normales à la surface menées par les ombilics coupent évidemment le grand axe aux points F et F′.

Les coordonnées des ombilics sont

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

et le rayon des sphères focales est

$$R = \frac{bc}{a}.$$