Trigonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 439-441

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__439_1>

TRIGONOMÉTRIE.

a étant un nombre entier positif, on a généralement

$$(1)\quad \begin{cases} \sin\dfrac{a\pi}{2} = \dfrac{1}{2}[1-(-1)^a](-1)^{\frac{a-1}{2}}, \\[2ex] \cos\dfrac{a\pi}{2} = \dfrac{1}{2}[1+(-1)^a](-1)^{\frac{a}{2}}. \end{cases}$$

M. Carl Spitz, professeur à l'École Polytechnique de Carlsruhe, déduit de là l'universalité des formules connues de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$. (*Archives de Grunert*, t. XXXII, p. 289; 1859.) Il procède ainsi :

α étant plus petit que $\frac{\pi}{2}$ et a un entier positif, on connaît les diverses valeurs $\pm\sin\alpha$, $\pm\cos\alpha$ et $\sin\left(\alpha+\dfrac{a\pi}{2}\right)$;

on pose

$$\sin\left(\alpha + \frac{a\pi}{2}\right) = x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

et prenant pour a les diverses valeurs $4n$, $4n \pm 1$, $4n + 2$, on détermine x et y, et l'on a finalement

$$\sin\left(\alpha + \frac{a\pi}{2}\right) = \sin\alpha\cos\frac{a\pi}{2} + \cos\alpha\sin\frac{a\pi}{2},$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{a\pi}{2}\right) = \cos\alpha\cos\frac{a\pi}{2} - \sin\alpha\sin\frac{a\pi}{2}.$$

De même, en s'appuyant sur les expressions (1), soient $\alpha = \alpha' + \frac{a\pi}{2}$, $\beta = \beta' + \frac{b\pi}{2}$, α' et β' moindres chacun que $\frac{\pi}{4}$, a et b deux nombres entiers positifs. Faisons

$$a + b = c;$$

on a, d'après ce qui précède,

$$\sin\alpha = \sin\alpha'\cos\frac{a\pi}{2} + \cos\alpha'\sin\frac{a\pi}{2},$$

$$\cos\alpha = \cos\alpha'\cos\frac{a\pi}{2} - \sin\alpha'\sin\frac{a\pi}{2},$$

$$\sin\beta = \sin\beta'\cos\frac{b\pi}{2} + \cos\beta'\sin\frac{b\pi}{2},$$

$$\cos\beta = \cos\beta'\cos\frac{b\pi}{2} - \sin\beta'\sin\frac{b\pi}{2};$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\sin(\alpha+\beta) = \sin\left(\alpha' + \beta' + \frac{c\pi}{2}\right) \\ &= \sin(\alpha' + \beta')\cos\frac{c\pi}{2} + \cos(\alpha' + \beta')\sin\frac{c\pi}{2}; \end{aligned}\right.$$

car $\alpha' + \beta' < \frac{\pi}{2}$; or $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, en y substituant les valeurs de ci-dessus, amène au membre à droite de l'équatian (2); d'où

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

Même raisonnement pour $\cos(\alpha + \beta)$.