Nouvelles annales de mathématiques

Gerono

Question du programme officiel : équations les plus simples des hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 393-397

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__393_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

QUESTION DU PROGRAMME OFFICIEL :

Equations les plus simples des hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes.

S'agit-il de trouver les équations des hyperboloïdes rapportés à leurs plans principaux, ou de représenter ces surfaces par des équations réduites au plus petit nombre de termes possible? La question ne manque pas d'intérêt pour les candidats à l'École Polytechnique, car, aux examens d'admission, on a proposé de réduire l'équation

$$x^2 + 2y^2 + 2yz = 1$$

à sa forme la *plus simple*.

L'équation des hyperboloïdes rapportés à leurs plans principaux est, comme on sait,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

Mais, la différence de carrés, $\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)$, peut être remplacée par un rectangle $\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \times \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)$, et il en résulte qu'au moyen d'une transformation de coordonnées, le premier membre de l'équation est réductible à deux termes. Pour effectuer cette réduction, il suffit de rapporter la surface aux trois plans

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad x = 0 \quad (*),$$

(*) Les deux premiers sont tangents au cône asymptote

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

et le troisième passe par les deux génératrices de contact puisque les fonctions $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$, $\frac{y}{b}-\frac{z}{c}$ deviennent alors des monômes.

D'après cela on voit que les hyperboloïdes peuvent toujours être représentés par une équation de la forme

$$Mx^2+Nyz=P,$$

et cette équation est évidemment l'équation la plus simple des hyperboloïdes, si l'on fait consister la plus grande simplicité dans le plus petit nombre de termes.

La détermination des coefficients M, N, P de l'équation réduite ne présente aucune difficulté d'analyse; les valeurs de ces coefficients s'obtiennent par l'application des formules de la transformation des coordonnées.

Pour considérer le cas le plus général, supposons qu'un hyperboloïde soit, d'abord, donné par l'équation complète

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy \\ +2Cx+2C'y+2C''z+D=0. \end{array}\right.$$

La résolution des équations

$$f'_{(x)}=0,\quad f'_{(y)}=0,\quad f'_{(z)}=0,$$

fera connaître les coordonnées α, β, γ du centre. Et, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes, au centre, l'équation de l'hyperboloïde deviendra

$$(2)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=P,$$

en désignant par P la quantité connue

$$-(C\alpha+C'\beta+C''\gamma+D).$$

On pourra ensuite, par la décomposition en carrés de la fonction quadratique,

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+Byz+2B'xz+2B''xy,$$

donner à l'équation (2) la forme

$$(3)\qquad F^2X^2 + G^2Y^2 - H^2Z^2 = P,$$

et il ne restera plus qu'à rapporter la surface aux trois plans

$$(4)\qquad GY + HZ = 0,\quad GY - HZ = 0,\quad X = 0,$$

pour que son équation se réduise à

$$(5)\qquad Mx^2 + Nyz = P.$$

Remarquons que pour établir les formules de transformation de coordonnées qui servent à rapporter la surface au système défini par les équations (4), il suffit de connaître les *cosinus* des angles que les nouveaux axes forment avec les anciens. Or les nouveaux axes ont pour équations

$$(Y = 0,\ Z = 0),\quad (GY + HZ = 0,\ X = 0),$$
$$(GY + HZ = 0,\ X = 0),$$

et l'on sait comment se déterminent les cosinus des angles qu'une droite forme avec les axes, lorsque ses équations sont données.

Comme exemple, considérons l'hyperboloïde à une nappe déterminé par l'équation

$$x^2 + 2y^2 + 2yz = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + 2y(y + z) = 1.$$

En rapportant la surface aux trois plans

$$y = 0,\quad y + z = 0,\quad x = 0,$$

son équation prend la forme

$$x^2 + h.yz = 1;$$

h est une constante dont il faut trouver la valeur.

Les nouveaux axes ont pour équations

$$(y=0,\ z=0),\quad (y+z=0,\ x=0),\quad (y=0,\ x=0);$$

il en résulte que si l'on désigne par

$$(\alpha, 6, \gamma),\quad (\alpha', 6', \gamma'),\quad (\alpha'', 6'', \gamma'')$$

les angles qu'ils forment avec les anciens axes supposés rectangulaires, on aura

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha = 1, && \cos 6 = 0, && \cos\gamma = 0;\\
&\cos\alpha' = 0, && \cos 6' = -\frac{1}{\sqrt{2}}, && \cos\gamma' = \frac{1}{\sqrt{2}};\\
&\cos\alpha'' = 0, && \cos 6'' = 0, && \cos\gamma'' = 1.
\end{aligned}$$

Par suite, les formules de la transformation des coordonnées deviendront

$$x = x',\quad y = -\frac{y'}{\sqrt{2}},\quad z = \frac{y'}{\sqrt{2}} + z'.$$

La substitution de ces expressions à x, y, z dans

$$x^2 + 2y(y+z) = 1$$

donne immédiatement

$$x'^2 - y'z'\sqrt{2} = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 - yz\sqrt{2} = 1,$$

pour équation réduite au plus petit nombre de termes.

On trouvera de même que l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

se réduit à

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{4yz}{b^2+c^2} = 1,$$

lorsqu'on rapporte l'hyperboloïde aux plans que les équations

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0, \quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0, \quad x=0,$$

représentent G.